FÍSICA

R. RESNICK
D. HALLIDAY

2

4ª edição

 LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA

ALGUMAS CONSTANTES FÍSICAS

(Para maiores informações, ver o Apêndice B, que contém os principais valores experimentais).

Velocidade da luz	c	$3{,}00 \times 10^{8}$ m/s
Relação massa-energia	c^2	$8{,}99 \times 10^{16}$ J/kg 931 MeV/u
Constante gravitacional	G	$6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante universal dos gases*	R	8,31 γ/mol · K 0,0832 li · atm/mol · K
Constante de permeabilidade	μ_0	$1{,}26 \times 10^{-6}$ H/m
Constante dielétrica	ϵ_0	$8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m
Constante de Avogadro*	N_0	$6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de Boltzmann	k	$1{,}38 \times 10^{-23}$ J/molécula · K $8{,}36 \times 10^{-5}$ eV/molécula · K
Constante de Planck	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ J · s $4{,}14 \times 10^{-15}$ eV · s
Carga elementar	e	$1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Massa de repouso do elétron	m_e	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Razão carga/massa para o elétron	e/m_e	$1{,}76 \times 10^{11}$ C/kg
Massa de repouso do próton	m_p	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

*Neste livro, consideramos "1 mol" = "1 molécula-grama" (= 10^{-3} kg · mol)

PROPRIEDADES FÍSICAS

Ar (seco, a 20°C e a 1 atm)	
Massa específica	1,29 kg/m³
Calor específico a pressão constante	$1{,}00 \times 10^{3}$ J/kg · K 0,240 cal/g · K
Razão de calores específicos (γ)	1,40
Velocidade do som	331 m/s
Água (20°C e 1 atm)	
Massa específica	$1{,}00 \times 10^{3}$ kg/m³ 1,00 gm/cm³
Velocidade do som	1,460 m/s
Índice de refração (λ = 5.890Å)	1,33
Calor específico a pressão constante	4,180 J/kg · K 1,00 cal/g · K
Calor de fusão (0°C)	$3{,}33 \times 10^{5}$ J/kg 79,7 cal/g
Calor de vaporização (100°C)	$2{,}26 \times 10^{6}$ J/kg 539 cal/g
Terra	
Massa	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Raio médio	$6{,}37 \times 10^{6}$ m 3.960 mi
Distância média entre a Terra e o Sol	$1{,}49 \times 10^{8}$ km $9{,}29 \times 10^{7}$ mi
Distância média entre a Lua e a Terra	$3{,}80 \times 10^{5}$ km $2{,}39 \times 10^{5}$ mi
Gravidade padrão	9,81 m/s² 32,2 ft/s²
Atmosfera padrão	$1{,}01 \times 10^{5}$ Pa 14,7 lb/in² 760 mm-Hg 29,9 in-Hg

FÍSICA

R. RESNICK
D. HALLIDAY

2

FÍSICA

R. RESNICK

PROFESSOR DE FÍSICA DO
RENSSELAER POLYTECHNIC INSTITUTE

D. HALLIDAY

PROFESSOR DE FÍSICA DA
UNIVERSITY OF PITTSBURGH

2

4ª EDIÇÃO



LIVROS
TÉCNICOS E
CIENTÍFICOS EDITORA S.A.

Rio de Janeiro-RJ • São Paulo-SP

Edição brasileira:

3ª edição: 1980
Reimpressões: 1981 (duas), 1982 (duas)
4ª edição: 1984
Reimpressões: 1984, 1985, 1986 e 1987 (duas)

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Resnick, Robert.
R342f Física / David Halliday [e] Robert Resnick;
4v. tradução [de] Antônio Luciano Leite Videira; Revisão técnica [de] Adir Moyses Luiz. – 4ª ed. – Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1984.

Tradução de: Physics
Apêndice

1. Física I. Halliday, David II. Título

CDD – 530
83-0275 CDU – 53

ISBN: 85-216-0299-5 (vol. 1)
ISBN: 85-216-0300-2 (vol. 2)
ISBN: 85-216-0301-0 (vol. 3)
ISBN: 85-216-0302-9 (vol. 4)
ISBN: 85-216-0298-7 (obra completa)
ISBN: 0-471-02456-2 (John Wiley & Sons, Inc.)

Direitos reservados por:


LIVROS TECNICOS E CIENTIFICOS EDITORA S.A.

MATRIZ	FILIAL
Rua Vieira Bueno, 21 20.920 – Rio de Janeiro – RJ Brasil – End. Telegráfico: LITECE Tels.: 580-6055 Vendas: 580-9374	Rua Vitória, nº 486 – 2º andar 01.210 – São Paulo – SP Tel: (011) 223-9866 Caixa Postal 4.817

Participaram na elaboração da edição brasileira:

Na tradução

para a segunda edição,

Professores
Antônio Máximo R. Luz
Beatriz Alvarenga Alvarez
Jésus de Oliveira
Márcio Quintão Moreno
do Departamento de Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais

e, para a terceira edição

Professor
Nicim Zagury
do Departamento de Física da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Na revisão técnica

Paulo Cesar Pfaltzgraff Ferreira
Engenheiro Eletricista
Professor de Eletromagnetismo — UCP
Adir Moysés Luiz, D. Sc.
Professor Adjunto do Instituto de Física — UFRJ

Coordenação geral
(até a 3ª edição)

Professor
Nicim Zagury, Ph. D.
Deptº de Física — PUC/Rio

Responsável pela reformulação dos problemas da 4ª edição

Professor
Adir Moysés Luiz, D. Sc.
Professor Adjunto do Instituto de Física — UFRJ

aos quais a Editora deixa aqui consignado o seu agradecimento.

prefácio à 4ª edição

A quarta edição brasileira desta obra, apresentada também em 4 volumes, inclui modificações em relação a anterior. O texto sofreu nova revisão técnica e gráfica. Os problemas foram inteiramente revistos e muitos deles modificados e adaptados à realidade brasileira. Entretanto, essas modificações não alteraram a orientação didática da edição original, nem modificaram significativamente a forma e o grau de dificuldades dos problemas propostos na terceira edição. A reformulação foi feita pelo professor Adir Moysés Luiz que possui larga experiência no campo do ensino da Física, onde leciona essa disciplina há 15 anos ininterruptos no ciclo básico do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro. O professor Adir Moysés Luiz é doutor em ciência (D. Sc.) pela UFRJ e possui cerca de 50 trabalhos publicados.

Na terceira edição, somente os problemas ímpares possuíam respostas ao passo que nesta quarta edição são os problemas pares que oferecem essas respostas. Esperamos que o esforço de melhoria desta obra, cuja adoção no Brasil é bastante ampla, seja aceita por professores e alunos e estamos ao inteiro dispor de toda a comunidade acadêmica brasileira para receber críticas e sugestões objetivando futuras atualizações.

Rio de Janeiro, setembro de 1983

A EDITORA

prefácio à 3ª edição

A primeira edição em inglês desta obra foi publicada em 1960 (*Physics for Students of Science and Engineering*), a segunda, em 1966 (Physics) e a terceira em 1978 (Physics).

O texto é dirigido aos alunos que estudam cálculo, concomitantemente, com os de Ciências Exatas e Engenharia. O objetivo principal é estruturar uma base sólida com os princípios da Física Clássica e capacitar o estudante para solucionar problemas. Deu-se também atenção à aplicação prática, às teorias mais modernas, e ao interesse histórico e filosófico dos eventos. Isto é feito com inclusão de seções especiais e de questões que exigem mais raciocínio e com a apresentação da matéria em forma integrada. Há um grande número de exemplos desenvolvidos e uma quantidade considerável de problemas ao final de cada capítulo. Dispensou-se cuidado especial aos artifícios pedagógicos que se têm mostrado eficazes para o bom aprendizado.

A segunda edição de Física em inglês deu-se há onze anos. Durante todo este período, a obra foi e continua sendo bem recebida por toda parte. A correspondência com aqueles que dela fazem uso didático tem sido copiosa em todos estes anos. Chegou-se, então, à conclusão de que seria oportuna, agora, uma nova edição.

Tendo em vista o crescente uso do sistema métrico decimal nos Estados Unidos, bem como, de um modo geral, em todo o mundo, decidimos enfaticamente adotar a total aplicação das unidades e nomenclaturas do "Sistema Internacional" (SI).

A obra foi cuidadosamente revisada no sentido de obter maior rendimento pedagógico, com base, principalmente, na experiência dos que lecionam a matéria e na literatura científica mais recente. Em conseqüência, reestruturou-se, de modo significativo, partes previamente selecionadas, visando a melhor apresentação, a precisão e a física propriamente dita. Foram incluídos novos exemplos desenvolvidos em tópicos ou setores nos quais sentiu-se haver necessidade. As referências foram atualizadas e maior número de figuras proporciona maior clareza do assunto. As tabelas e os apêndices foram ampliados e atualizados com dados mais recentes e maiores informações. Acrescentou-se, ainda, um tópico suplementar sobre a teoria da relatividade.

Acentuados melhoramentos foram feitos nas questões e problemas, somente na parte da Mecânica, Calor e Acústica houve acréscimo de 35%, contando-se agora 1567. Nas questões, passou-se de 413 para 611, cobrindo campo maior e dando força às aplicações, com referências atualizadas à literatura científica popular. Tal como nas questões, a maioria dos problemas anteriores foi mantida e revista para maior clareza da exposição. 225 novos melhoram a cobertura do material e permitem elevar o nível de conhecimento do estudante, dando ao professor maior possibilidade de escolha.

Nas partes de Eletromagnetismo, Ótica e Física Quântica foram acrescentados assuntos (semicondutores, indutância mútua, magnetismo terrestre, radioastronomia, objetos virtuais e instrumentos óticos) que não constavam da edição anterior. O capítulo de oscilações eletromagnéticas, muito longo na 2ª edição, foi dividido em dois, reescritos para maior clareza do assunto, acrescentando-se, ainda, um capítulo, inteiramente novo, sobre correntes alternadas. Com os acréscimos feitos nesta fonte, o número total de questões aumentou de 57%, passando de 778 para 1219, enquanto que os problemas cresceram 29%, aumentando de 1441 para 1864. A maioria dos novos problemas e questões foi testada em salas de aulas.

Para auxiliar alunos e professores no desenvolvimento e resolução de tão extenso número de problemas: 1º) os problemas foram grupados em cada capítulo de acordo com o número da seção; por exemplo, a primeira seção precisa ser estudada para que seja possível solucionar os respectivos problemas; 2º) cada conjunto de problemas foi disposto em ordem aproximada de crescente dificuldade. Naturalmente que tal disposição, por seção ou por dificuldade, não é incondicional, tendo em vista as diferentes formas para resolver certos problemas, sem contar as preferências e conveniências pedagógicas; 3º) as ilustrações foram relacionadas; 4º) as respostas dos problemas de número ímpar foram colocados logo após o enunciado, ao invés de fazê-lo no final do livro.

Uma nova diagramação do livro dá melhor aspecto, menos compacto e monótono que o anterior, tomando mais fácil ao estudante ler a matéria, fazer anotações e distinguir os vários componentes de cada capítulo (texto, figuras, exemplos, tabelas, citações, referências, perguntas, problemas e assim por diante).

O texto, dentro de cada capítulo, que trata do assunto mais avançado, especializado ou histórico, está impresso em tipo menor.

Somos gratos a John Wiley and Sons e a Donald Deneck, editor de física, pela prestimosa cooperação. Ao Dr. Edward Derringh nosso reconhecimento pelo inestimável auxílio nas séries de problemas apresentados, assim como à Sra. Carolyn Clemente, por sua valiosa colaboração nos trabalhos de secretaria exigidos para a concretização desta obra.

Agradecemos ainda aos professores e alunos que enviaram críticas à edição anterior e particularmente a Robert P. Bauman, Kenneth Brownstein, Robert Karplus e Brian A. McInnes, que nos assessoraram de várias maneiras.

Esperamos que esta terceira edição possa contribuir para o aprimoramento do ensino de Física.

Janeiro 1978

ROBERT RESNICK
DAVID HALLIDAY

sumário

APÊNDICES 283

15
oscilações

15-1 *OSCILAÇÕES*

Qualquer movimento que se repete a intervalos de tempo iguais constitui um *movimento periódico*. Como será visto, o movimento periódico de uma partícula pode sempre ser expresso em função de senos e co-senos, motivo pelo qual ele é denominado também *movimento harmônico*.

Se a partícula em movimento periódico se move para diante e para trás na mesma trajetória, seu movimento é denominado *oscilatório* ou *vibratório*. Há muitos movimentos vibratórios na natureza, tais como o do volante de um relógio, o de uma corda de violino, o de uma massa presa a uma mola, o dos átomos nas moléculas ou em uma rede cristalina, o das moléculas de ar atingidas por uma onda sonora.

Muitos corpos oscilantes não se movem para diante e para trás entre limites precisamente definidos, devido às forças de atrito que dissipam a energia do movimento. É o caso, para exemplificar, de uma corda de violino, cujo movimento cessa rapidamente, ou o de um pêndulo que logo deixa de balançar. Tais movimentos denominam-se *harmônicos amortecidos*. Embora não possamos eliminar o atrito no movimento periódico de corpos macroscópicos, freqüentemente podemos cancelar seu efeito amortecedor fornecendo energia ao sistema oscilante, de forma a compensar a energia dissipada pelo atrito. A mola de um relógio de pulso e os pesos suspensos de certos relógios de pêndulo fornecem energia externa desse modo, de maneira que o sistema oscilante, isto é, o volante ou o pêndulo, movem-se como se não fossem amortecidos.

Não apenas os sistemas mecânicos podem oscilar. As ondas de rádio, as microondas e a luz visível resultam de campos elétricos e magnéticos oscilantes. É o caso de um circuito sintonizado, em um rádio, ou de uma cavidade metálica fechada, na qual se introduz energia sob a forma de microondas, que podem oscilar eletromagneticamente. A analogia é grande, fundamentando-se no fato de que as *oscilações mecânicas e as eletromagnéticas são descritas pelas mesmas equações básicas*. Esta analogia será acentuada principalmente em capítulos posteriores.

O *período T* de um movimento harmônico é o tempo necessário para que a partícula móvel percorra uma vez a trajetória fechada, isto é, para completar uma oscilação ou *ciclo*. A *freqüência* do movimento, ν, é o número de oscilações (ou ciclos) realizados por unidade de tempo. Ela é igual, portanto, ao inverso do período, isto é,

$$\nu = 1/T. \tag{15-1}$$

A unidade de freqüência no SI, é o *hertz*[1] (símbolo Hz), ou ciclo/s. A posição da partícula oscilante para a qual é nula a resultante das forças aplicadas é chamada *posição de equilíbrio*. O *deslocamento* (linear ou angular) é a distância (linear ou angular) a que se encontra a partícula, de sua posição de equilíbrio, em determinado instante.

Focalizemos a atenção em uma partícula que oscile em um segmento de reta bem definido. Seu deslocamento **x** varia periodicamente tanto em módulo como em sentido; sua velocidade **v** e sua aceleração **a** também variam periodicamente em módulo e sentido e, devido à relação **F** = m**a**, o mesmo acontece com a força que atua na partícula.

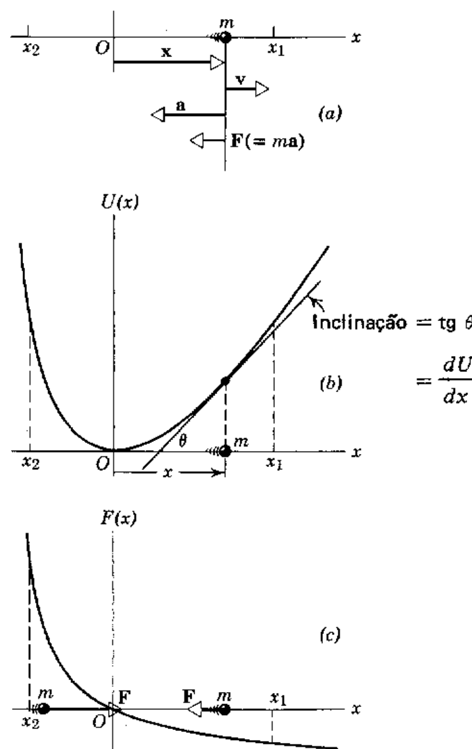


figura 15-1
(a) Uma partícula de massa m oscila harmonicamente entre os pontos x_1 e x_2, sendo O a posição de equilíbrio. (b) A energia potencial da partícula como função da posição. A força que atua na partícula, no ponto x, é dada por $F = -dU/dx$. (c) A força que atua na partícula como função da posição x; note que a força está sempre dirigida para a posição de equilíbrio.

As forças associadas com o movimento harmônico são as de tipo mais geral que foram discutidas até agora. Nos capítulos iniciais lidamos apenas com forças (e acelerações) constantes. Depois, ao considerar forças variáveis com o tempo, examinamos um tipo de força (e portanto de aceleração) de sentido variável, embora seu módulo permanecesse constante (a força centrípeta da Seç. 6-3) e uma força (e portanto uma aceleração) de módulo variável, embora de sentido constante (a força impulsiva da Seç. 10-1). No movimento harmônico tanto a força como a aceleração variam, *quer* em módulo *quer* em sentido.

Em termos de energia, pode dizer-se que uma partícula em movimento harmônico passa repetidamente por um dado ponto (sua posição de equilíbrio) no qual a energia potencial da partícula é mínima. Um pêndulo oscilante é um bom exemplo: sua energia potencial é mínima na parte mais baixa da trajetória, isto é, na posição de equilíbrio. A Fig. 15-1a representa uma partícula que oscila entre os limites x_1 e x_2, sendo O a posição de equilíbrio. Na Fig. 15-1b indica-se a curva correspondente de energia potencial que apresenta valor mínimo naquela posição. A força que atua na partícula em qualquer posição é derivável da função energia potencial, de acordo com a Eq. 8-7,

$$F = -dU/dx, \tag{8-7}$$

estando representada na Fig. 15-1c. A força é nula na posição de equilíbrio O, está orientada para a direita (isto é, tem valor positivo)

[1] Esta unidade de freqüência recebeu seu nome em homenagem a Heinrich Hertz (1857-94), cujas pesquisas em eletromagnetismo foram universalmente reconhecidas como a confirmação experimental das ondas eletromagnéticas previstas por James Clerk Maxwell.

quando a partícula se encontra à esquerda de O, e para a esquerda (ou seja, tem valor negativo) quando a partícula estiver à direita da posição de equilíbrio. Trata-se de uma *força restauradora*, porque ela atua sempre de modo a acelerar a partícula para a posição de equilíbrio. Portanto, no movimento harmônico, a posição de equilíbrio é sempre de equilíbrio *estável*.

A energia mecânica total E de uma partícula oscilante é a soma de suas energias cinética e potencial, ou seja,

$$E = K + U, \tag{15-2}$$

em que E permanece constante se não agirem forças não conservativas, tal como o atrito. A Fig. 15-2 representa E para o movimento da Fig. 15-1. Note como a Eq. 15-2 é obedecida quando a partícula estiver na posição indicada. A partícula não pode mover-se fora dos limites x_1 e x_2, pois nessas regiões U excede E. Conforme evidencia a Eq. 15-2, isto exigiria que a energia cinética fosse negativa, o que é impossível.

Para uma vizinhança dada, isto é, para uma função dada $U(x)$, uma partícula oscilante possui várias energias totais, dependendo do modo pelo qual ela inicia seu movimento. Por exemplo, a energia total pode ser E' e não E, caso em que os limites de oscilação seriam x_1' e x_2', conforme indica a Fig. 15-2, e não x_1 e x_2.

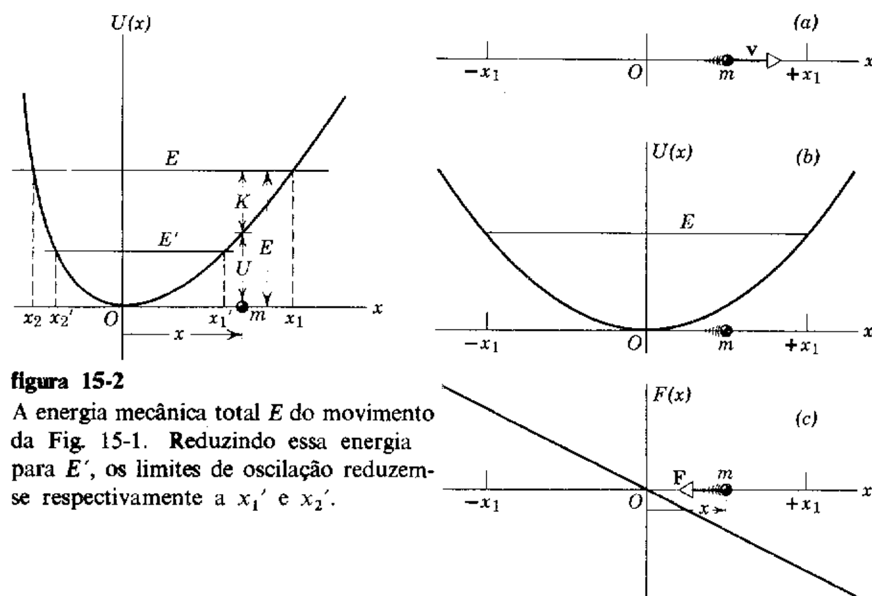


figura 15-2
A energia mecânica total E do movimento da Fig. 15-1. Reduzindo essa energia para E', os limites de oscilação reduzem-se respectivamente a x_1' e x_2'.

figura 15-3
(*a*) Uma partícula de massa m oscila com movimento harmônico simples entre os pontos $+x_1$ e $-x_1$, sendo O sua posição de equilíbrio. (*b*) A energia potencial e a energia mecânica total. (*c*) A força que atua na partícula. O estudante deve comparar cuidadosamente esta figura com a Fig. 15-1, que ilustra o caso geral de movimento harmônico.

15-2 *O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES*

Consideremos uma partícula oscilante (Fig. 15-3*a*) em torno de uma posição de equilíbrio; a energia potencial da partícula varia de acordo com a função

$$U(x) = \tfrac{1}{2} kx^2, \tag{15-3}$$

onde k é uma constante (ver Fig. 15-3*b*). A força que atua na partícula é dada pela Eq. 8-7:

$$F(x) = -\,dU/dx = -\,d(\tfrac{1}{2} kx^2)/dx = -\,kx, \tag{15-4}$$

conforme a Fig. 15-3*c*. Tal partícula oscilante denomina-se *oscilador harmônico simples* e seu movimento chama-se *movimento harmônico*

simples. Mostra a Eq. 15-3 que em tal movimento a curva de energia potencial é uma função quadrática do deslocamento e, conforme a Fig. 15-4, a força atuante na partícula é proporcional ao deslocamento e tem sentido oposto ao deste. No movimento harmônico simples os limites de oscilação são simétricos em relação à posição de equilíbrio. Em geral esta propriedade não é válida para o movimento mais geral da Fig. 15-1, que, embora harmônico, não é harmônico simples. O módulo do deslocamento máximo, isto é, x_1 na Fig. 15-3, sempre considerado positivo, chama-se *amplitude* do movimento harmônico simples.

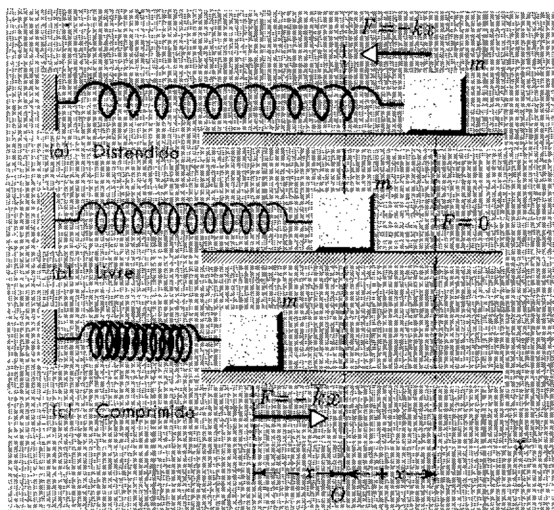


figura 15-4
Um oscilador harmônico simples. Em cada caso é indicada a força exercida pela mola. O bloco escorrega sobre uma mesa horizontal lisa.

O estudante terá reconhecido que a Eq. 15-3, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, é a expressão da energia potencial de uma mola "ideal", que se comprime ou distende de um comprimento x, cf. Seç. 8-4. Nessa mesma seção definiu-se uma mola ideal como aquela que, comprimida ou distendida, exerce uma força expressa por $F(x) = -kx$ (ver Eq. 15-4), sendo k denominado *constante elástica* ou *constante de força* da mola.

Portanto, um corpo de massa m preso a uma mola ideal, cuja constante de força é k, e que pode mover-se sobre uma superfície horizontal lisa, é um exemplo de oscilador harmônico simples (ver Fig. 15-4). Note que na posição de equilíbrio (ver Fig. 15-4*b*) a mola não exerce força sobre o corpo. Se o corpo é deslocado para a direita (como na Fig. 15-4*a*), a força exercida pela mola sobre o corpo está dirigida para a esquerda, expressando-se por $F = -kx$. Deslocando o corpo para a esquerda (Fig. 15-4*c*), a força aponta para a direita, sendo expressa ainda por $F = -kx$. Em cada caso trata-se de uma força *restauradora* e o movimento da massa oscilante é *harmônico simples.*

Apliquemos a segunda lei de Newton, $F = ma$, ao movimento da Fig. 15-4. Substituindo F por $-kx$ (cf. Eq. 15-4) e a aceleração a por d^2x/dt^2 $(=dv/dt)$ obtém-se

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

ou seja,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (15\text{-}5)$$

Por envolver derivadas, esta equação é denominada *diferencial.* Resolver tal equação significa determinar a dependência funcional, entre o deslocamento x da partícula e o tempo t, que satisfaça a equação. Quando se sabe como x depende do tempo, conhecemos o movimento da partícula; por isso a Eq. 15-5 chama-se *equação de movimento* de um oscilador harmônico simples. Na seção seguinte resolveremos essa equação e descreveremos em detalhe o movimento.

O problema do oscilador harmônico simples é importante por duas razões. Em primeiro lugar, a maioria dos problemas que envolvem vibrações mecânicas reduzem-se ao do oscilador harmônico simples, quando a amplitude do movimento é pequena, ou então a uma combinação de tais vibrações. Isso equivale a dizer que, se considerarmos uma porção suficientemente pequena da curva que representa a força restauradora, Fig. 15-1*c* (em torno da origem), ela se aproximará arbitrariamente de um segmento de reta que, de acordo com a Fig. 15-3*c*, é característica de um movimento harmônico simples. Em outras palavras, a curva de energia potencial, Fig. 15-1*b*, para o movimento oscilatório geral, reduz-se à da Fig. 15-3*b* do movimento simples quando a amplitude de vibração em torno da posição de equilíbrio O for suficientemente pequena.

Em segundo lugar, como já foi mencionado, as equações do tipo da 15-5 ocorrem em muitos problemas físicos — em acústica, óptica, mecânica, circuitos elétricos e mesmo em física atômica. O oscilador harmônico simples apresenta aspectos comuns a vários sistemas físicos.

A Eq. 15-4 ($F = -kx$) é uma relação empírica conhecida como *Lei de Hooke.* Ela é um caso especial de uma relação mais geral, que descreve a deformação elástica dos corpos, descoberta por Robert Hooke (1635-1703).[2] As molas e outros corpos elásticos obedecem a tal lei, desde que sua deformação não seja excessivamente grande. Se o sólido for deformado além de certo ponto, denominado *limite elástico,* ele não retomará sua forma inicial quando suprimida a força aplicada (Fig. 15-5). Ocorre que a Lei de Hooke é válida quase até o limite elástico, para a maioria dos materiais comuns. O intervalo de valores das forças aplicadas para os quais é válida a lei de Hooke denomina-se "região proporcional". Além do limite elástico, a força não pode mais ser especificada por uma função energia potencial, pois a força depende então de muitos fatores, inclusive a rapidez da deformação e a história prévia do sólido.

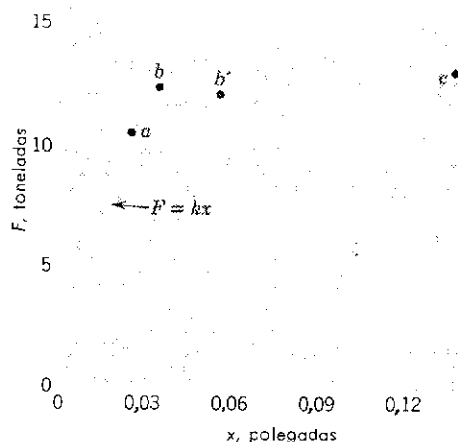


figura 15-5
Gráfico típico da força aplicada F como função do alongamento resultante de uma barra de alumínio sob tensão. A amostra tinha trinta centímetros de comprimento e 6,5 cm² de área transversal. Note que podemos considerar $F = kx$ somente para o trecho Oa, uma vez que além de a a inclinação da curva não é mais constante, variando com x de modo complicado. Em um ponto como b (o *limite elástico*) a amostra não retorna a seu comprimento original quando suprimida a força aplicada. Entre b e b' o alongamento aumenta, mesmo se a força for constante; o material escoa como um líquido viscoso. Em c a amostra não pode mais ser esticada; qualquer aumento de elongação provoca a ruptura da amostra. A força aplicada é igual em módulo à força restauradora, razão pela qual não existe o sinal negativo na relação $F = kx$.

Note que a força restauradora e a função energia potencial do oscilador harmônico simples são os mesmos que os de um sólido deformado em uma dimensão, na região proporcional. Se libertado, o sólido deformado vibrará, tal como o oscilador harmônico. Portanto, enquanto a amplitude de vibração se mantiver suficientemente pequena, isto é, enquanto a deformação permanecer na região proporcional, as vibrações mecânicas se comportam exatamente como osciladores harmônicos simples. É fácil generalizar essa discussão e mostrar que qualquer problema que envolva vibrações mecânicas de pequena amplitude, em três dimensões, reduz-se a uma combinação de osciladores harmônicos simples.

[2] Inicialmente Hooke exprimiu sua lei como o criptograma, em latim, *ceiiinosssttuv.* Dois anos mais tarde ele o decifrou como *ut tensio sic vis,* que pode ser traduzido como *a tensão é proporcional à força.*

Cordas ou membranas vibrantes, vibrações sonoras, as oscilações de átomos em sólidos, assim como as oscilações elétricas ou acústicas em uma cavidade, podem ser todas descritas sob forma matematicamente idêntica à de um sistema de osciladores harmônicos. A analogia permite-nos resolver problemas em uma área, usando as técnicas desenvolvidas em outras áreas.

15-3 *O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES*

Vamos agora resolver a equação de movimento do oscilador harmônico simples,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{15-6}$$

Lembremos que qualquer sistema de massa m, sobre o qual atue a força $F = -kx$, será governado por essa equação. No caso de uma mola, a constante de proporcionalidade k é a constante elástica, determinada pela dureza da mola. Em outros sistemas oscilantes k pode estar relacionada a outras propriedades físicas do sistema, como será visto posteriormente. Podemos usar como protótipo a mola oscilante.

A Eq. 15-6 é uma equação diferencial, isto é, uma relação entre dada função do tempo $x(t)$ e sua derivada segunda em relação ao tempo, d^2x/dt^2. Para determinar a posição da partícula como função do tempo devemos ter uma função $x(t)$ que satisfaça aquela equação, que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \tag{15-7}$$

Esta última significa que $x(t)$ é uma função tal que sua derivada segunda em relação ao tempo seja igual à própria função, com sinal oposto, a menos de um coeficiente constante k/m. Sabe-se do cálculo que as funções seno e co-seno têm tal propriedade,[3] por exemplo,

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\operatorname{sen} t, \text{ e } \frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t = -\cos t.$$

Essa propriedade não é afetada se a função co-seno for multiplicada por uma constante A. Devemos considerar o fato de que a função seno se comportará do mesmo modo e que a Eq. 15-7 contém um fator constante, escrevendo-se por isso uma possível solução da Eq. 15-7 como

$$x = A\cos(\omega t + \delta). \tag{15-8}$$

Por outro lado, como

$$\cos(\omega t + \delta) = \cos\delta\cos\omega t - \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega t = a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t,$$

a constante δ abrangerá qualquer combinação de soluções em seno ou em co-seno. Portanto, com as constantes desconhecidas (ainda) A, ω e δ conseguimos escrever uma solução tão geral quanto possível da Eq. 15-7. A fim de determinar essas constantes de forma que

[3] O movimento harmônico é não somente periódico como também limitado. Apenas as funções seno e co-seno (ou combinações delas) possuem ambas as propriedades.

a Eq. 15-8 seja efetivamente a solução da Eq. 15-7, deriva-se a Eq. 15-8 duas vezes em relação ao tempo:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta);$$

substituindo na Eq. 15-7 obtém-se

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \delta).$$

Logo, se escolhermos a constante ω como

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{15-9}$$

resultará

$$x = A \cos(\omega t + \delta),$$

que de fato é uma solução da equação do oscilador harmônico simples.

As constantes A e δ continuam ainda indeterminadas e por isso são ainda completamente arbitrárias. Isso significa que qualquer escolha de A e δ satisfará a Eq. 15-7, isto é, o oscilador pode ter uma grande variedade de movimentos. De fato, esta é uma das características de uma equação diferencial de movimento, que não descreve um único movimento mas um grupo ou uma família de movimentos possíveis que têm alguns aspectos comuns e outros diferentes. No presente caso ω é comum a todos os movimentos permitidos, porém A e δ podem diferir de um para outro. Veremos mais tarde que A e δ são determinados, para um movimento harmônico particular, pelo modo como ele começa.

Determinaremos agora o significado *físico* da constante ω. Se o tempo t na Eq. 15-8 for aumentado de $2\pi/\omega$ a função torna-se

$$\begin{aligned} x &= A \cos[\omega(t + 2\pi/\omega) + \delta] \\ &= A \cos(\omega t + 2\pi + \delta) \\ &= A \cos(\omega t + \delta), \end{aligned}$$

isto é, a função apenas se repete após o intervalo de tempo $2\pi/\omega$, que é por isso denominado *período* do movimento, T. Como $\omega^2 = k/m$ resulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{15-10}$$

Portanto, todos os movimentos descritos pela Eq. 15-7 têm o mesmo período de oscilação, determinado apenas pela massa m da partícula vibrante e pela constante elástica k. A *freqüência* ν do oscilador é o número de oscilações completas realizadas na unidade de tempo, e é expressa por

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{15-11}$$

Logo

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{15-12}$$

A grandeza ω é às vezes denominada *freqüência angular* e difere da freqüência ν pelo fator 2π. Tem as dimensões de inverso de tempo (como a velocidade angular) e mede-se na unidade rad/s. Na Seç. 15-6 será indicado o significado geométrico dessa freqüência angular.

A constante A tem significado físico simples. A função co-seno pode assumir apenas os valores entre -1 e $+1$. O *deslocamento* x, em relação à posição central de equilíbrio $x = 0$ tem portanto o valor máximo A. Logo, $A(= x_{máx.})$ é a *amplitude* do movimento. Como A não é fixado pela nossa equação diferencial, são possíveis movimentos de várias amplitudes, todos de mesma freqüência e mesmo período. *A freqüência do movimento harmônico simples é independente da amplitude do movimento.*

A grandeza $(\omega t + \delta)$ denomina-se *fase* do movimento e a constante δ é a *constante de fase.* Dois movimentos podem ter a mesma amplitude e a mesma freqüência mas diferir em fase. Por exemplo, se $\delta = -\frac{\pi}{2}$,

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t - 90°)$$
$$= A \operatorname{sen} \omega t,$$

portanto o deslocamento era nulo no instante $t = 0$. Quando $\delta = 0$, o deslocamento $x = A\cos\omega t$ é máximo no instante $t = 0$. Outros deslocamentos iniciais correspondem a outras constantes de fase.

A amplitude A e a constante de fase δ da oscilação são determinadas pela posição e pela velocidade iniciais da partícula; essas duas condições iniciais determinam A e δ exatamente.[4] Desde que o movimento tenha começado, no entanto, a partícula continuará a oscilar com amplitude e fase constantes, a uma freqüência fixa, a menos que outras forças perturbem o sistema.

Na Fig. 15-6 o deslocamento está representado como função do tempo para vários movimentos harmônicos simples descritos pela Eq. 15-8. Fazem-se três comparações. Na Fig. 15-6*a*, I e II têm a mesma amplitude e mesma freqüência mas diferem em fase de $\delta = \pi/4$ ou 45°. Na Fig. 15-6*b*, I e III têm a mesma freqüência e mesma constante de fase, diferindo em amplitude por um fator 2. Na Fig. 15-6*c*, I e IV têm amplitude e constante de fase idênticas, mas suas freqüências diferem por um fator 1/2 (ou seus períodos por um fator 2). O estudante deve estudar com atenção essas curvas, familiarizando-se com a terminologia usada no movimento harmônico simples.

Outro aspecto característico do movimento harmônico simples é a relação entre deslocamento, velocidade e aceleração do oscilador. Comparemos essas grandezas na curva I da Fig. 15-6, que é típica.

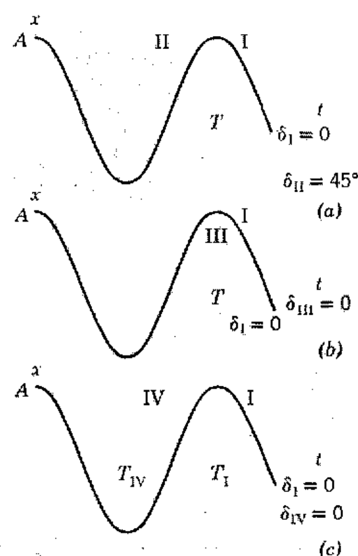


figura 15-6
Várias soluções da equação do movimento harmônico simples. (*a*) Ambas as soluções têm a mesma amplitude e mesmo período, mas diferem em fase de 45°. (*b*) Ambas têm o mesmo período e a mesma constante de fase, diferindo em amplitude por um fator 2. (*c*) Ambas têm a mesma constante de fase e mesma amplitude, diferindo em período por um fator 2.

[4] Uma constante de fase pode ser aumentada de um múltiplo inteiro de 2π (ou 360°) e ainda descrever bem o movimento.

Na Fig. 15-7 representam-se separadamente o deslocamento x, a **velocidade** $v = dx/dt$ **e a** aceleração $a = d^2x/dt^2$, **todos como função** do tempo, t. As equações dessas curvas são, respectivamente:

$$x = A\cos(\omega t + \delta),$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\,\omega A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \delta) \qquad (15\text{-}13)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\,\omega^2 A\cos(\omega t + \delta).$$

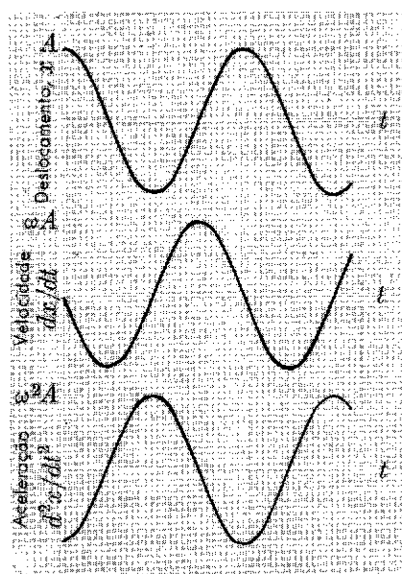


figura 15-7
As relações entre deslocamento, velocidade e aceleração no movimento harmônico simples. A constante de fase δ é nula neste caso particular, pois o deslocamento é máximo para $t = 0$; ver Eq. 15-8.

Para o caso representado tomou-se $\delta = 0$. As unidades e a escala para deslocamento, velocidade e aceleração foram omitidas, para fins de comparação. Note que o deslocamento máximo é A, a velocidade máxima ωA e a aceleração máxima $\omega^2 A$ (ver Eq. 15-13).

Quando o deslocamento é máximo, em qualquer sentido, a velocidade é nula porque a velocidade deve então mudar de sentido. A aceleração nesse instante, tal como a força restauradora, tem valor máximo mas seu sentido é oposto ao do deslocamento. Quando este for nulo, a velocidade da partícula será máxima e a aceleração é nula, correspondendo a uma força restauradora nula. A velocidade aumenta à proporção que a partícula se move para a posição de equilíbrio, depois decresce quando se aproxima do deslocamento máximo, tal como no pêndulo.

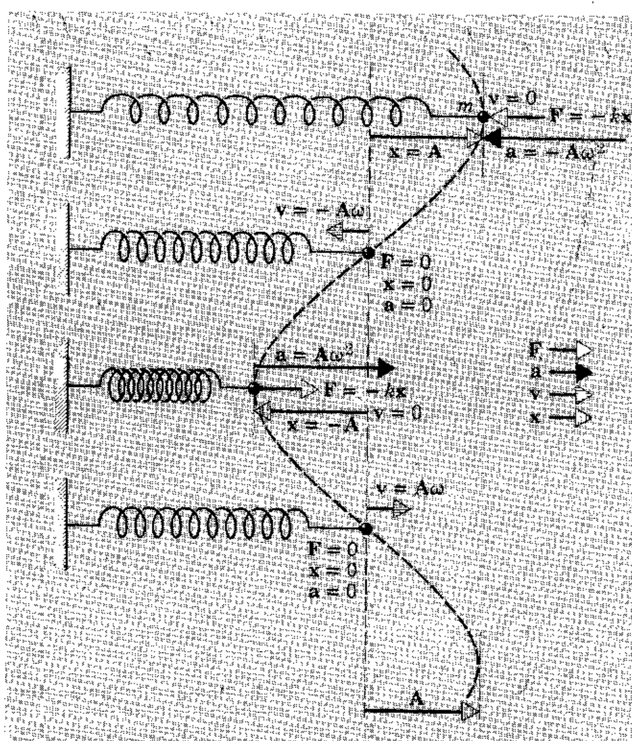


figura 15-8
Força atuante, aceleração, velocidade e deslocamento para uma partícula de massa *m* que executa movimento harmônico simples. Comparar cuidadosamente com a Fig. 15-7.

Na Fig. 15-8 mostram-se os valores instantâneos de **x**, **v** e **a** em quatro instantes de movimento de uma partícula que oscila presa à extremidade de uma mola.

15-4 CONSIDERAÇÕES DE ENERGIA NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

A Eq. 15-2 significa que, para o movimento harmônico, inclusive o movimento harmônico simples (em que não atuam forças dissipativas) a energia mecânica total $E(= K + U)$ se conserva. Esta relação pode agora ser estudada em pormenor para o caso especial do movimento harmônico simples, no qual a expressão do deslocamento é

$$x = A\cos(\omega t + \delta). \tag{15-8}$$

A energia potencial U em qualquer instante é dada por

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$= \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \tag{15-14}$$

A energia potencial apresenta o valor máximo $\frac{1}{2}kA^2$. Durante o movimento a energia potencial varia entre zero a este valor máximo, como mostram as curvas das Figs. 15-9*a* e 15-9*b*.

A energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$, utilizadas as relações

$$v = dx/dt = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

e

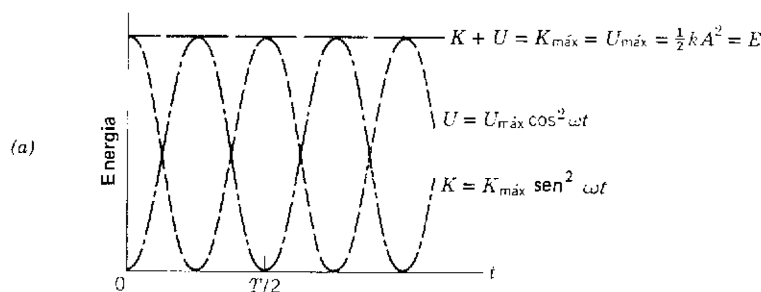
$$\omega^2 = k/m,$$

pode ser escrita sob a forma

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\,\text{sen}^2(\omega t + \delta)$$

$$= \tfrac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t + \delta). \tag{15-15}$$

A energia cinética, portanto, tem valor máximo de $\frac{1}{2}kA^2$ ou $\frac{1}{2}m(\omega A)^2$, em concordância com a velocidade máxima ωA antes citada. Durante o movimento a energia cinética varia entre zero e este máximo, de acordo com os gráficos das Figs. 15-9*a* e 15-9*b*.



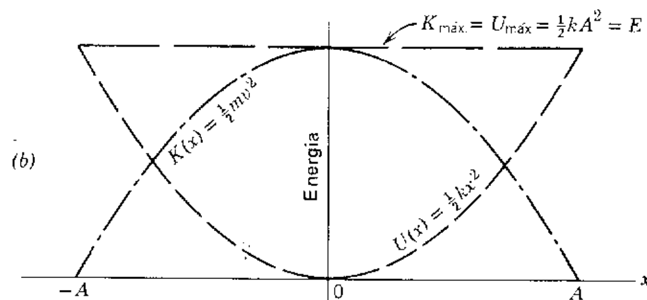


figura 15-9
Energias de um oscilador harmônico simples. (*a*) Energia potencial (linha interrompida, - - - -), energia cinética (linha mista . - . - . —) e energia total (linha interrompida paralela a *Ot*). (*b*) Energias cinética, potencial e total, representadas como funções do deslocamento em relação à posição de equilíbrio. Comparar com a Fig. 8-4.

A energia mecânica total é a soma da cinética com a potencial. Usando-se as Eqs. 15-14 e 15-15 obtêm-se

$$E = K + U = \\ = \tfrac{1}{2} kA^2 \operatorname{sen}^2 (\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega t + \delta) = \tfrac{1}{2} kA^2; \quad (15\text{-}16)$$

vê-se que a energia mecânica total é constante como poderia ser previsto, tendo o valor $\frac{1}{2} kA^2$. Quando o deslocamento for máximo a energia cinética será nula e a energia potencial será $\frac{1}{2} kA^2$. Na posição de equilíbrio a energia potencial será nula, mas a energia cinética valerá $\frac{1}{2} kA^2$. Nas posições intermediárias, os dois tipos de energia terão valores tais que sua soma terá sempre o valor $\frac{1}{2} kA^2$. A curva da energia total constante está mostrada nas Figs. 15-9*a* e 15-9*b*. *A energia total de uma partícula em movimento harmônico simples é proporcional ao quadrado da amplitude do movimento.* Está claro (Fig. 15-9*a*) que a energia cinética *média* do movimento durante um período é exatamente igual à energia potencial *média* e cada uma dessas quantidades médias vale $\frac{1}{4} kA^2$.

A expressão mais geral da Eq. 15-16 é

$$K + U = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} kA^2. \quad (15\text{-}17)$$

A partir dessa relação obtém-se $v^2 = \dfrac{k}{m}(A^2 - x^2)$ ou

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}\,. \quad (15\text{-}18)$$

Esta relação mostra claramente que a velocidade é máxima na posição de equilíbrio $x = 0$ e nula nos pontos de deslocamento máximo $x = A$. Com efeito, pode-se partir do princípio de conservação da energia, Eq. 15-17 (em que $\frac{1}{2} kA^2 = E$) e por integração da Eq. 15-18 obtém-se o deslocamento como função do tempo. O resultado é idêntico ao da Eq. 15-18, que foi obtido a partir da equação diferencial do movimento, Eq. 15-6 (ver Probl. 29).

O efeito das forças dissipativas será discutido na Seç. 15-9.

EXEMPLO 1

A mola horizontal da Fig. 15-4 distende-se 7,5 cm em relação à posição de equilíbrio, quando atua nela uma força de 3,0 N. Um corpo de 0,70 kg é prendido então à extremidade da mola e afastado 10 cm da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal lisa. Largando-se o corpo ele executará movimento harmônico simples.

(*a*) Qual a constante elástica da mola?

Uma força de 3,0 N que atua na mola produz um deslocamento de 7,5 cm; portanto,

$$k = \frac{F}{x} = \frac{3{,}0\ \text{N}}{0{,}075\ \text{m}} = 40\ \text{N/m}.$$

Por que não usamos aqui a relação $k = -F/x$?

(*b*) Qual a força exercida pela mola sobre o corpo de 0,70 kg, exatamente antes de ser largado?

A mola distende 10 cm, portanto a força exercida *pela* mola é

$$F = -kx = -40\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}10\ \text{m} = -4{,}0\ \text{N},$$

o sinal negativo indicando que o sentido da força é oposto ao do deslocamento.

(*c*) Qual o período de oscilação depois de largar o corpo?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}70\,\text{kg}}{40\,\text{N/m}}} = 0{,}83\,\text{s},$$

ao qual corresponde a freqüência $\nu(= 1/T)$ igual a 1,2 Hz e a freqüência angular $\omega(= 2\pi\nu)$ de 7,6 rad/s.

(*d*) Qual a amplitude do movimento?

Ao deslocamento máximo corresponde energia cinética nula e energia potencial máxima. Esta é a condição inicial antes de largar o corpo, portanto a amplitude é o deslocamento inicial de 10 cm, logo $A = 10\,\text{cm}$.

(*e*) Qual a velocidade máxima do corpo vibrante?

Pela Eq. 15-13, $v_{\text{máx.}} = \omega A = \left(\frac{2\pi}{T}\right) = A,$

$$v_{\text{máx.}} = 7{,}6\,\text{s}^{-1} \cdot 10\,\text{cm} = 0{,}76\,\text{m/s}.$$

A velocidade máxima ocorre na posição de equilíbrio, onde $x = 0$. Este valor é alcançado duas vezes em cada período, sendo a velocidade $-0{,}76$ m/s quando o corpo passa por $x = 0$ pela primeira vez depois de largado, e $+0{,}76$ m/s quando passa no mesmo ponto ao voltar.

(*f*) Qual a aceleração máxima do corpo?

Pela Eq. 15-13, $a_{\text{máx.}} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A,$

$$a_{\text{máx.}} = \frac{40\,\text{N/m}}{0{,}70\,\text{kg}} \cdot 0{,}10\,\text{m} = 5{,}7\,\text{m/s}^2.$$

A aceleração máxima ocorre nos extremos da trajetória, onde $x = \pm A$ e $v = 0$. Portanto, $a = -5{,}7\,\text{m/s}^2$ em $x = +A$ e $a = +5{,}7\,\text{m/s}^2$ em $x = -A$; a aceleração e o deslocamento têm sentidos opostos.

(*g*) Calcular a velocidade, a aceleração e as energias potencial e cinética do corpo quando ele se move de sua posição inicial até metade da distância desta à posição de equilíbrio.

Nesse ponto $x = A/2 = 5\,\text{cm}$ e, pela Eq. 15-18,

$$v = -\sqrt{\frac{40}{0{,}70}(0{,}10)^2 - (0{,}05)^2}\ \text{m/s} =$$

$$= -\sqrt{0{,}43}\ \text{m/s} = -0{,}65\,\text{m/s}$$

$$a = -\frac{k}{m}x = \frac{40}{0{,}70} \times 0{,}05\,\text{m/s}^2 = -0{,}29\,\text{m/s}^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}70 \times 0{,}43\,\text{J} = 0{,}15\,\text{J}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}40 \times (0{,}10)^2\,\text{J} = 0{,}05\,\text{J}.$$

(*h*) Calcular a energia total do sistema oscilante.

Como a energia total se conserva, podemos calculá-la em qualquer estágio do movimento. Usando os resultados anteriores obtém-se

$E = K + U = 15 \times 10^{-2}\,\text{J} + 5 \times 10^{-2}\,\text{J} = 20 \times 10^{-2}\,\text{J}$ (partícula em $x = A/2$)

$E = U_{\text{máx.}} = \frac{1}{2}kx^2_{\text{máx.}} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot (10^{-1})^2\,\text{J} = 20 \times 10^{-2}\,\text{J}$ (partícula em $x = A$)

$E = K_{\text{máx.}} = \frac{1}{2}mv^2_{\text{máx.}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}70 \cdot (0{,}76)^2\,\text{J} = 20 \times 10^{-2}\,\text{J}$ (partícula em $x = 0$)

(*i*) Qual o deslocamento do corpo como função do tempo?

Tem-se em geral

$$x = A \cos(\omega t + \delta).$$

Já obtivemos $A = 0{,}10$ m; devemos determinar agora ω e δ.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}83} = 7{,}6 \text{ rad/s},$$

portanto,

$$x = 10 \cos (7{,}6\,t + \delta).$$

No instante $t = 0$, $x = 0{,}10$ m, logo nesse instante

$$x = 0{,}10 \cos \delta = 0{,}10 \text{ m},$$

ou seja,

$$\delta = 0 \text{ rad}.$$

Portanto, com $A = 0{,}10$ m, $\omega = 7{,}6$ rad/s e $\delta = 0$ tem-se

$$x = 0{,}10 \cos 7{,}6t,$$

equação que descreve o movimento do corpo (x em metros, t em segundos e 7,6 em radianos).

15-5 *APLICAÇÕES DO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES*[5]

Serão estudados nesta seção alguns sistemas físicos que se movem em movimento harmônico simples. Outros serão considerados ao longo do livro.

O Pêndulo Simples. O pêndulo simples é um corpo ideal que consiste de uma massa puntiforme suspensa por um leve fio inextensível. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e largado, o pêndulo oscilará em um plano vertical, sob a ação da gravidade. O movimento é periódico e oscilatório. Desejamos determinar o período do movimento.

A Fig. 15-10 representa um pêndulo de comprimento l, sendo m a massa da partícula; o fio forma com a vertical o ângulo θ. As forças que atuam em m são $m\mathbf{g}$, seu peso, e $\mathbf{T}$, a tração do fio. Escolhamos um sistema de referência em que um dos eixos seja tangente à trajetória circular percorrida pela massa m, e o outro tenha a direção do fio, isto é, do raio do círculo. Decompondo $m\mathbf{g}$ segundo esses eixos, o módulo da componente radial será $mg \cos \theta$ e o da tangencial será $mg \operatorname{sen} \theta$. A resultante das forças radiais origina a força centrípeta necessária para manter m na trajetória circular. O componente tangencial de $m\mathbf{g}$ constitui a força restauradora que atua em m e que faz o corpo tender a voltar à posição de equilíbrio. A força restauradora será, portanto,

$$F = -mg \operatorname{sen} \theta.$$

Note que esta força não é proporcional ao deslocamento angular θ, e sim a sen θ; o movimento resultante, portanto, não será harmônico simples. No entanto, *se o ângulo θ for pequeno*, sen θ será muito aproximadamente igual a θ (medido em radianos).[6] O

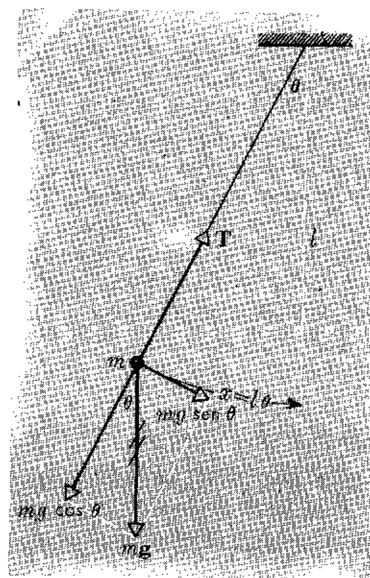


figura 15-10
As forças que atuam em um pêndulo simples são a tração **T** no fio e o peso $m\mathbf{g}$ da massa m. São indicados os módulos das componentes radial e tangencial de $m\mathbf{g}$.

---

[5] Veja "A Repertoire of S.H.M." por Eli Maor, *The Physics Teacher*, outubro, 1972, para uma descrição completa de 16 sistemas físicos que apresentam movimento harmônico simples.

[6] Por exemplo:

		Diferença %
$\theta = 0° = 0{,}0000$ radiano	sen $\theta = 0{,}0000$	0
$= 2° = 0{,}0349$ "	$= 0{,}0349$	0,00
$= 5° = 0{,}0873$ "	$= 0{,}0872$	0,11
$= 10° = 0{,}1745$ "	$= 0{,}1736$	0,51
$= 15° = 0{,}2618$ "	$= 0{,}2588$	1,14

deslocamento ao longo do arco é $x = l\theta$ e, para pequenos ângulos, o movimento será praticamente retilíneo. Portanto, supondo sen $\theta \cong \theta$ pode-se escrever

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x.$$

Logo, *se os deslocamentos forem pequenos*, a força restauradora será proporcional ao deslocamento e terá o sentido oposto, o que constitui a característica fundamental do movimento harmônico simples. A constante mg/l desempenha a função da constante k na equação $F = -kx$. Verifique as dimensões de k e de mg/l. O período de um pêndulo simples, quando a amplitude for pequena, é pois

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} \quad \text{ou} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (15\text{-}19)$$

Observe que o período é independente da massa da partícula suspensa.

Quando a amplitude de oscilação não é pequena, pode ser demonstrado que a equação geral do período será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\cdot \text{sen}^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot \text{sen}^4\frac{\theta_m}{2} + \ldots\right) \qquad (15\text{-}20)$$

em que θ_m é o deslocamento angular máximo e os termos seguintes tornam-se cada vez menores. O período pode então ser calculado com o grau de precisão necessário, tomando-se número suficiente de termos da série. Quando $\theta_m = 15°$, correspondente ao deslocamento angular total de 30°, o período verdadeiro difere do que é previsto pela Eq. 15-19 em menos de 0,5 %.

Como o período de um pêndulo simples é praticamente independente da amplitude, o pêndulo é útil como relógio. Desde que as forças amortecedoras reduzem a amplitude de oscilação, o período permanece muito aproximadamente inalterado. Em um relógio de pêndulo a energia é fornecida automaticamente por um mecanismo de escapamento que compensa as perdas devidas ao atrito. O relógio de pêndulo com escapamento foi inventado por Christian Huygens (1629-1695).

O pêndulo simples proporciona também um método conveniente para medir o valor da aceleração da gravidade, g. Em lugar de realizar uma experiência de queda livre, bastará medir l e T.

O Pêndulo de Torção. Na Fig. 15-11 mostra-se um disco suspenso de um fio preso ao seu centro de massa; no extremo oposto o fio está fixado firmemente a um suporte. Na posição de equilíbrio, traça-se uma linha radial que parte do centro do disco e vai até P. Girando o disco em um plano horizontal até a posição radial Q, o fio será torcido e exercerá um torque no disco, tendendo a fazê-lo retornar à posição de equilíbrio P. Trata-se de um torque restaurador. Se a torção for pequena, verifica-se que o torque restaurador é proporcional à torção ou ao deslocamento angular (Lei de Hooke), isto é,

$$\tau = -\kappa\theta, \qquad (15\text{-}21)$$

em que κ é uma constante que depende das propriedades do fio, denominando-se *módulo de torção.* O sinal negativo indica que o sentido do torque é oposto ao do deslocamento angular θ. A Eq. 15-21 é uma condição para haver *movimento harmônico simples angular.*

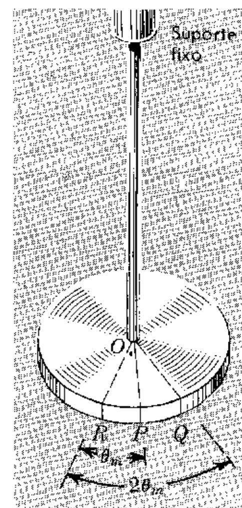


figura 15-11
O pêndulo de torção. A linha traçada desde P até o centro oscila entre Q e R, descrevendo um ângulo $2\theta_m$, sendo θ_m a amplitude (angular) do movimento.

A equação de movimento desse sistema é

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

logo, usando a Eq. 15-21, obtém-se

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ou seja,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta. \tag{15-22}$$

Note a semelhança entre esta equação, de um movimento harmônico simples angular, e a Eq. 15-17 do movimento harmônico simples linear. Com efeito, ambas as equações são matematicamente idênticas. Basta substituir o deslocamento angular θ pelo deslocamento linear x, o momento de inércia I pela massa m e o módulo de torção κ pela constante elástica k. A solução da Eq. 15-22 será, portanto, um movimento harmônico simples na variável, $\theta(t)$, isto é,

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \delta), \tag{15-23}$$

em que θ_m é o deslocamento angular máximo, ou seja, a amplitude da oscilação angular. Na Fig. 15-11 o disco oscila em torno da posição de equilíbrio $\theta = 0$ (linha OP), sendo $2\theta_m$ o percurso angular total (de OQ até OR).

O período de oscilação será, por analogia com a Eq. 15-10,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \tag{15-24}$$

Conhecido κ e medindo T, pode ser determinado o momento de inércia I de qualquer corpo rígido, em relação ao eixo de rotação. Conhecido I e medindo T, o módulo de torção κ de qualquer fio pode também ser determinado.

Muitos instrumentos de laboratório envolvem oscilações de torção, notadamente o galvanômetro. A balança de Cavendish é um pêndulo de torção (Cap. 16). O volante de um relógio é outro exemplo de movimento harmônico angular; o torque restaurador é neste caso fornecido por uma mola espiral ("cabelo").

EXEMPLO 2

Uma barra delgada de 0,10 kg e 0,10 m de comprimento é suspensa por um fio que passa pelo seu centro e é perpendicular a seu comprimento. O fio é torcido e a roda começa a oscilar com período de 2,0 s. Quando um corpo achatado, com a forma de triângulo eqüilátero, é suspenso da barra pelo seu centro de massa, o período passa a 6,0 s. Determinar o momento de inércia do triângulo em torno do eixo.

O momento de inércia da barra é $Ml^2/12$ (ver Tab. 12-1), portanto,

$$I_{\text{barra}} = \frac{0{,}10\ \text{kg}\cdot(0{,}10\ \text{m})^2}{12} = 8{,}3\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

e pela Eq. 15-24,

$$\frac{T_{\text{barra}}}{T_{\text{triângulo}}} = \left(\frac{I_{\text{barra}}}{I_{\text{triângulo}}}\right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad I_{\text{triângulo}} = I_{\text{barra}}\left(\frac{T_t}{T_b}\right)^2,$$

portanto,

$$I_{\text{triângulo}} = 8{,}3 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot \left(\frac{6{,}0\ \text{s}}{2{,}0\ \text{s}}\right)^2 = 7{,}5 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

A amplitude de oscilação afeta o período nestes casos?

O Pêndulo Físico. Qualquer corpo rígido suspenso de forma que possa oscilar em um plano vertical, em torno de um eixo que passe pelo corpo, é denominado pêndulo físico ou pêndulo composto. Trata-se de uma generalização do pêndulo simples, em que um fio sem peso suporta uma partícula. Realmente todos os pêndulos reais são pêndulos físicos.

Por conveniência escolhemos o pêndulo em forma laminar como, por exemplo, uma peça cortada de uma folha de madeira compensada, e o eixo de oscilação em ângulo reto com o plano do corpo. Com esta restrição nada de essencial é perdido na discussão do problema.

Na Fig. 15-12 representa-se um corpo de forma irregular que pode girar em torno de um eixo horizontal sem atrito que passa pelo ponto P e é deslocado de um ângulo θ em relação à posição de equilíbrio, que corresponde à posição em que o centro de massa C do corpo está verticalmente abaixo de P. Sendo d a distância do eixo ao centro de massa e I a inércia rotacional (momento de inércia) do corpo em relação ao eixo e M a massa do corpo, o torque restaurador, para um deslocamento angular θ, será

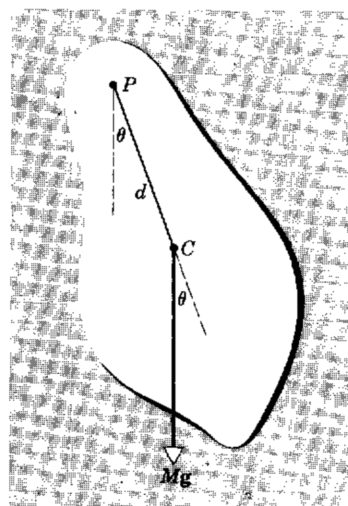


figura 15-12
Um pêndulo físico laminar, cujo centro de massa é C, gira em torno de um eixo que passa por P quando deslocado de um ângulo θ em relação à sua posição de equilíbrio (que corresponde a C diretamente abaixo de P). O peso $M\mathbf{g}$ proporciona um torque restaurador.

$$\tau = -\,Mgd\ \text{sen}\,\theta,$$

e é devido à componente tangencial da força da gravidade. Como τ é proporcional a $\text{sen}\,\theta$ e não a θ, não é válida aqui, em geral, a condição de movimento harmônico simples angular. Se os deslocamentos angulares forem pequenos, entretanto, a aproximação $\text{sen}\,\theta \cong \theta$ será excelente, como antes, e portanto, para *pequenas amplitudes*,

$$\tau = -\,Mgd\theta$$

ou

$$\tau = -\,\kappa\theta,$$

em que $\kappa = Mgd$. Mas

$$\tau = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\alpha,$$

portanto,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\tau}{I} = -\,\frac{\kappa}{I}\,\theta,$$

e o período de oscilação de um pêndulo físico que oscile com pequena amplitude terá por valor

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \qquad (15\text{-}25)$$

Para maiores amplitudes o movimento continuará harmônico, mas não simples.

Note que o método se aplica a um objeto laminar de qualquer forma e que o eixo pode passar por qualquer ponto. Como caso

especial consideremos uma partícula de massa m, presa à extremidade de um fio de comprimento l. Neste caso $I = ml^2$, $M = m$ e $d = l$, portanto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

que é o período de um pêndulo simples com pequena amplitude. O pêndulo físico é utilizado para determinações de g de grande precisão.

Resolvendo a Eq. 15-25 para a inércia rotacional I, obtém-se

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}. \qquad (15\text{-}26)$$

As grandezas do segundo membro são todas diretamente mensuráveis e o centro de massa pode ser determinado por suspensão, como na Fig. 14-4. Portanto, a inércia rotacional em relação a um eixo que não passe pelo centro de massa de um corpo de qualquer forma, pode ser determinada suspendendo-o do referido eixo, como um pêndulo físico.

EXEMPLO 3

Determinar o comprimento de um pêndulo simples cujo período seja igual ao de determinado pêndulo físico.

Igualando o período de um pêndulo simples ao de um pêndulo físico tem-se

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

logo,

$$l = \frac{I}{Md}, \qquad (15\text{-}27)$$

isto é, no que se refere ao período, a massa de um pêndulo físico pode considerar-se como concentrada em um ponto cuja distância em relação ao eixo seja $l = I/Md$. Este ponto chama-se *centro de oscilação* do pêndulo físico e depende da localização do eixo, para qualquer corpo.

EXEMPLO 4

Um disco pode oscilar em torno de um eixo que passa pela sua borda (Fig. 15-13). Determinar seu período para pequenas oscilações e o comprimento do pêndulo simples equivalente.

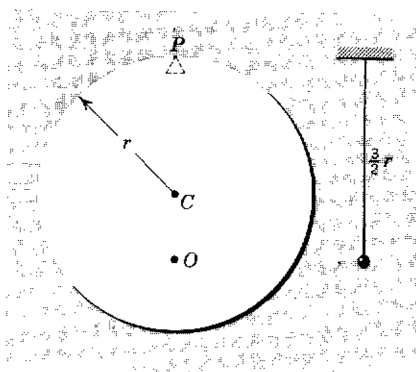


figura 15-13
Exemplo 4. Um pêndulo físico constituído de um disco que gira em torno de um eixo que passa na borda (P), ao lado de um pêndulo simples de mesmo período. O é o centro de oscilação.

A inércia rotacional de um disco em relação a um eixo que passe pelo seu centro de massa é $\frac{1}{2}Mr^2$, sendo r o raio e M a massa do disco. A inércia rotacional, em relação ao eixo que passa pela borda será

$$I = \tfrac{1}{2}Mr^2 + Mr^2 = \tfrac{3}{2}Mr^2.$$

O período, portanto, com $d = r$, será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\ Mr^2}{2\ Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}},$$

independente da massa do disco.

O pêndulo simples de mesmo período terá comprimento

$$l = \frac{I}{Mr} = \tfrac{3}{2}r,$$

ou seja, três quartos do diâmetro do disco. O centro de oscilação do disco que oscila em torno de P será portanto O, abaixo e distante $\frac{3}{2}r$ do ponto de suspensão. Exige-se do pêndulo simples alguma massa determinada?

Se suspendermos o disco de um ponto intermediário, entre a borda e o centro, como em O, encontra-se $I = \frac{3}{4}Mr^2$ e $d = \frac{1}{2}r$; o período T será

$$T = 2\pi\sqrt{3r/2g},$$

como antes. Isto ilustra uma propriedade geral do centro de oscilação O e do ponto de suspensão P, a saber, se o pêndulo for suspenso de um eixo que passe por O, seu período não se altera e P torna-se novo centro de oscilação.

Se o disco fosse suspenso no centro, qual seria seu período de oscilação?

EXEMPLO 5

O centro de oscilação de um pêndulo físico tem outra propriedade interessante. Se uma força impulsiva (suposta horizontal e no plano de oscilação) atua no centro de oscilação, nenhuma reação é sentida no ponto de sustentação. Provar esta afirmação para força impulsiva **F** que atua, no sentido da direita para a esquerda, no ponto O da Fig. 15-13. Supor que o pêndulo está inicialmente em repouso.

Este é um caso de movimento combinado de translação e rotação (ver Seç. 12-7). O efeito de translação, atuando sozinho, ocasionaria o deslocamento de P, na Fig. 15-13, para a esquerda com aceleração

$$\mathbf{a}_{esfera} = F/M.$$

O efeito rotacional, atuando sozinho, ocasionaria uma aceleração angular no sentido horário em torno do ponto C de módulo igual a

$$\begin{aligned}\alpha &= \tau/I \\ &= (F)(r/2)(Mr^2/2) \\ &= F/Mr.\end{aligned}$$

Devido a esta aceleração angular P se deslocaria para a direita com uma aceleração de

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{direita} &= \alpha r \\ &= (F/Mr)(r) = F/M.\end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{a}_{esquerda} = -\,\mathbf{a}_{direita}$ e não há nenhum movimento no ponto P.

Quando encarado segundo este ponto de vista o centro de oscilação é freqüentemente chamado de *centro de percussão*. Jogadores de "beisebol" sabem que a menos que o impacto do seu taco seja contra o centro de percussão, o efeito do impacto será sentido em suas mãos. A força nas mãos tem direção diferente dependendo de que lado a bola bate em relação ao centro de percussão.

EXEMPLO 6

O período de um disco de raio $r = 10{,}0$ cm, que executa pequenas oscilações em torno de uma suspensão em sua borda é de 0,784 s. Determinar o valor local de g.

A partir de $T = 2\pi\sqrt{3r/2g}$ obtém-se

$$g = \frac{6\pi^2 r}{T^2}.$$

Substituindo os valores fornecidos resulta

$$g = \frac{6\pi^2 \cdot 0{,}100}{(0{,}784)^2}\ \text{m/s}^2 = 9{,}79\ \text{m/s}^2.$$

15-6 *RELAÇÃO ENTRE MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME*

Consideremos agora a relação entre o movimento harmônico simples, que é retilíneo, e o movimento circular uniforme. Essa relação é útil ao descrever muitos aspectos de movimento harmônico simples, assim como permite atribuir um significado geométrico simples à freqüência angular ω e à constante de fase δ. O movimento circular uniforme é também um exemplo de superposição de movimentos harmônicos simples, fenômeno que mais tarde encontraremos com freqüência, ao estudar o movimento ondulatório.

Na Fig. 15-14, Q é um ponto que percorre um círculo de raio A, com velocidade angular constante ω, expressa, suponhamos, em radianos/segundo. P é a projeção de Q sobre o diâmetro horizontal, que supomos coincidir com o eixo Ox. Chamemos Q de *ponto de referência* e o círculo sobre o qual ele se move de *círculo de referência.* À proporção que o ponto de referência gira, sua projeção P se move também, para diante e para trás, ao longo do diâmetro horizontal. O componente x do deslocamento de Q é idêntico ao deslocamento de P; de modo análogo, os componentes x da velocidade e da aceleração de Q coincidem respectivamente com a velocidade e a aceleração de P.

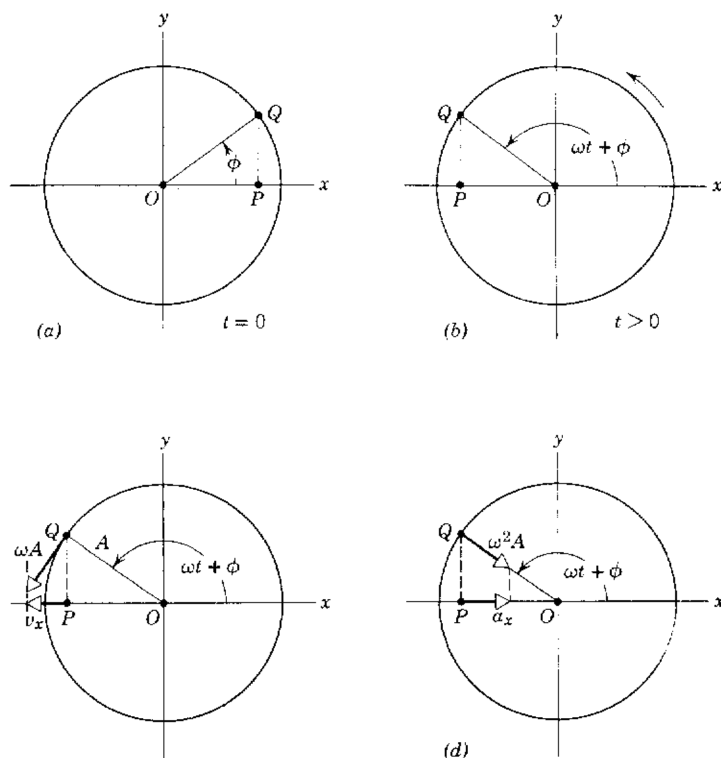


figura 15-14
Relação entre movimento harmônico simples e movimento circular uniforme. Q executa um movimento circular uniforme e P um movimento harmônico simples. Q tem velocidade angular ω. P freqüência angular ω. (*a*, *b*) O componente x do deslocamento de Q é sempre igual ao deslocamento de P. (*c*) O componente x da velocidade de Q é sempre igual à velocidade de P. (*d*) O componente x da aceleração de Q é sempre igual à aceleração de P.

Chamemos δ o ângulo entre o raio OQ e o eixo Ox, no instante $t = 0$. Em qualquer instante posterior esse ângulo valerá $\omega t + \delta$, pois Q se move com velocidade angular constante. A coordenada x de Q, a qualquer instante, será portanto

$$x = A \cos(\omega t + \delta). \qquad (15\text{-}28)$$

Portanto, o ponto projetando P move-se sobre o eixo $x'x$ com movimento harmônico simples, que pode, como se vê, ser descrito como a *projeção de um movimento circular uniforme ao longo de um diâmetro.*

A freqüência angular ω do movimento harmônico simples identifica-se também com a velocidade angular do ponto de referência. A freqüência do movimento harmônico simples é o número de revoluções do ponto de referência por unidade de tempo, portanto $\nu = \omega/2\pi$ ou $\omega = 2\pi\nu$. O tempo necessário a uma revolução completa é o período do movimento harmônico simples, logo $T = 2\pi/\omega$ ou $\omega = 2\pi/T$. A fase $\omega t + \delta$ do movimento harmônico simples é o ângulo formado por OQ com o eixo $x'x$, a qualquer instante (Fig. 15-14*b*, *c*, *d*); o valor desse ângulo no instante $t = 0$ (Fig. 15-14*a*) é δ, a constante de fase ou fase inicial do movimento. Finalmente, o raio do círculo de referência será a amplitude do movimento harmônico simples.

ωA é o módulo da velocidade tangencial do ponto de referência Q, portanto a componente x desta velocidade (Fig. 15-14*c*) é

$$v_x = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta).$$

Esta relação atribui a v_x valor negativo quando Q e P se movem para a esquerda, e valor positivo quando seu movimento é para a direita; além disso, v_x se anula nos pontos extremos do movimento harmônico simples, aos quais correspondem os ângulos $\omega t + \delta = 0$ e $\omega t + \delta = \pi$.

A aceleração de Q, que executa movimento circular uniforme, tem direção radial, sentido da periferia para o centro e módulo $\omega^2 A$; a aceleração de P será a componente x da aceleração do ponto de referência Q (Fig. 15-14*d*), portanto

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

exprime a aceleração do ponto que está em movimento harmônico simples. No ponto O, correspondente à posição de equilíbrio, a_x é nula, correspondendo a $\omega t + \delta = \pi/2$ e $\omega t + \delta = 3\pi/2$, respectivamente.

Estes resultados são idênticos aos que foram estabelecidos para o movimento harmônico simples ao longo de Ox; ver as Eqs. 15-13.

Se a projeção de Q houvesse sido tomada ao longo de Oy, seu movimento seria descrito pela equação

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta), \qquad (15\text{-}29)$$

que é também a equação de um movimento harmônico simples. Esta somente difere em fase da Eq. 15-28, pois se substituirmos δ por $\delta - \pi/2$ veremos que $\cos(\omega t + \delta)$ transforma-se em $\operatorname{sen}(\omega t + \delta)$.

Está claro que a projeção do movimento circular uniforme, ao longo de *qualquer* diâmetro, é um movimento harmônico simples.

Reciprocamente, o movimento circular uniforme pode ser descrito como uma combinação de dois movimentos harmônicos simples, executados em direções perpendiculares, de mesma amplitude e freqüência, e cujas fases diferem de 90°. Quando um dos movimentos componentes tem deslocamento máximo, o outro ponto encontra-se na posição de equilíbrio. Combinando essas componentes (Eqs. 15-28 e 15-29) obtém-se imediatamente a relação

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A.$$

Combinando as relações correspondentes para v_y e a_y, deduzem-se também as relações

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \omega A,$$

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \omega^2 A,$$

que correspondem respectivamente, aos módulos do deslocamento, da velocidade e da aceleração no movimento circular uniforme.

Muitos movimentos complicados podem ser considerados como combinações de movimentos harmônicos simples; o movimento circular é um exemplo particularmente simples. Na seção seguinte serão consideradas outras combinações.

EXEMPLO 7

No Exemplo 1 consideramos um corpo em movimento harmônico simples horizontal, cuja equação de movimento (em que unidades?) era

$$x = 0{,}10 \cos 7{,}6t.$$

Este movimento pode ser representado também como projeção do movimento circular uniforme ao longo de um diâmetro horizontal.

(*a*) Dar as propriedades do movimento circular uniforme correspondente. A componente x do movimento circular uniforme é

$$x = A \cos (\omega t + \delta),$$

portanto o ponto de referência deve ter raio $A = 0{,}10$ m, a fase inicial ou constante de fase deve ser $\delta = 0$ e a velocidade angular deve ser $\omega = 7{,}6$ rad/s, para que possamos obter a equação $x = 0{,}10 \cos 7{,}6t$ para a projeção horizontal.

(*b*) A partir do movimento do ponto de referência, determinar o tempo necessário para que o corpo percorra metade da distância entre sua posição inicial e o centro do movimento.

Quando o corpo houver percorrido a distância indicada, o raio que localiza o ponto de referência terá descrito o ângulo $\omega t = 60°$ (Fig. 15-15). A velocidade angular é constante, 7,6 rad/s, portanto o tempo necessário para descrever 60° será

$$t = \frac{60°}{\omega} = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{7{,}6 \text{ rad/s}} = \frac{\pi}{23} \text{ s} = 0{,}14 \text{ s}.$$

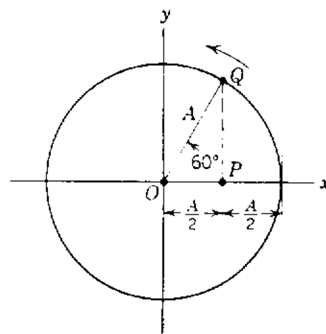


figura 15-15
Exemplo 7. As partículas *Q* e *P* da Fig. 15-14, no instante em que $\omega t = 60°$. Sendo conhecido ω, pode ser determinado t.

Esse tempo pode também ser determinado diretamente da equação de movimento:

$$x = 0{,}10 \cos 7{,}6t \text{ e } x = \frac{A}{2} = 0{,}05,$$

portanto,

$$0{,}05 = 0{,}10 \cos 7{,}6t \text{ ou } 7{,}6t = \text{arc cos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Logo

$$t = \frac{\pi}{23}\text{s} = 0{,}14\text{ s}.$$

15-7 *SUPERPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS HARMÔNICOS*

Freqüentemente dois movimentos harmônicos simples *perpendiculares*, se superpõem, resultando um movimento que é a soma de duas oscilações independentes. Consideremos primeiro o caso em que as *freqüências* das vibrações *são idênticas*, tal como

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta),$$
$$y = A_y \cos(\omega t + \alpha) \qquad (15\text{-}30)$$

Os movimentos ao longo de Ox e de Oy, entretanto, têm amplitudes e constantes de fase diferentes.

Se as constantes de fase forem iguais, isto é, se $\delta = \alpha$, o movimento resultante será retilíneo, o que pode ser demonstrado analiticamente, pois quando é eliminado entre as equações

$$x = A_x \cos(\omega t + \delta) \qquad y = A_y \cos(\omega t + \delta)$$

obtém-se

$$y = \frac{A_y}{A_x} x,$$

equação de uma reta de coeficiente angular A_y/A_x. Na Fig. 15-16*a*, *b*, mostra-se o movimento resultante para dois casos: $A_y/A_x = 1$ e $A_y/A_x = 2$. Em ambos os casos os deslocamentos ao longo de Ox e de Oy alcançam os respectivos máximos e mínimos simultaneamente, estando por isso em fase.

Se as constantes de fase forem diferentes, o movimento resultante não será retilíneo. Por exemplo, se as constantes de fase diferirem de $\pi/2$, o deslocamento máximo ao longo de Ox ocorre quando o correspondente deslocamento em Oy for nulo, e vice-versa. Quando as amplitudes forem iguais, o movimento resultante será circular, e se forem diferentes, resultará um movimento elíptico. Dois casos, os de $A_y/A_x = 1$ e $A_y/A_x = 2$, são mostrados na Fig. 15-16*c* e *d*, para $\delta = \alpha + \pi/2$; os casos $A_y/A_x = 1$ e $A_y/A_x = 2$, para $\delta = \alpha - \pi/4$, são mostrados na Fig. 15-16*e* e *f*.

Todas as combinações possíveis de dois movimentos harmônicos simples perpendiculares e de mesma freqüência correspondem a trajetórias *elípticas*; o círculo e a reta são casos particulares de trajetórias elípticas. Isto pode ser provado analiticamente combinando as Eqs. 15-30 e eliminando o tempo; o estudante pode mostrar que a equação resultante é a de uma elipse. A forma da elipse depende apenas da ração das amplitudes, A_y/A_x, e da *diferença de fase* entre as duas oscilações, $\delta - \alpha$. O movimento resultante pode ter tanto o sentido horário como o anti-horário, dependendo da componente que está em avanço de fase.

Um modo simples de produzir tais figuras é por meio de um osciloscópio, em que os elétrons são defletidos por dois campos elétricos perpendiculares entre si. As intensidades dos campos alternam-se senoidalmente com a mesma freqüência, mas suas fases e amplitudes podem variar. Desse modo os elétrons são levados a traçar as várias figuras discutidas acima em uma tela fluorescente.

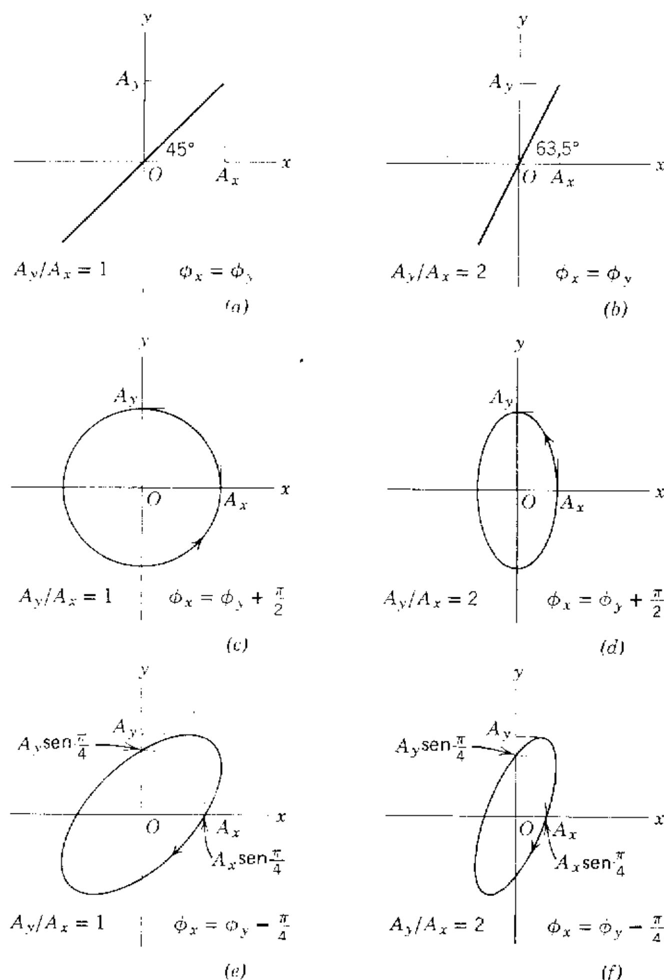


figura 15-16
Movimento harmônico simples em duas dimensões. (*a*) As amplitudes de x e y (isto é, A_x e A_y) são as mesmas, assim como suas constantes de fase. (*b*) A amplitude de y é o dobro da de x, mas suas constantes de fase são as mesmas. (*c*) Suas amplitudes são iguais, mas x está em avanço de fase de 90° sobre y. (*d*) Tal como em (*c*) exceto que a amplitude de y é o dobro da de x. (*e*) Amplitudes iguais, estando x em atraso de fase de 45° em relação a y. (*f*) Tal como em (*e*), mas a amplitude de y é o dobro da de x.

Pode-se também produzir mecanicamente tais figuras, por meio de um pêndulo que oscila com pequena amplitude, mas não limitado a um plano vertical. Tais combinações de dois movimentos harmônicos simples perpendiculares e de mesma freqüência são particularmente importantes no estudo da luz polarizada e dos circuitos de corrente alternada.

As superposições de movimentos harmônicos simples de mesma freqüência e *mesma direção*, embora de amplitudes e fases diferentes, apresentam interesse especial no estudo da interferência e da difração da luz, do som e das ondas eletromagnéticas, que serão discutidos posteriormente.

A superposição de duas oscilações perpendiculares entre si e de *freqüências diferentes* origina um movimento resultante mais complicado. O movimento não é nem mesmo periódico, a menos que as duas freqüências componentes, ω_1 e ω_2, estejam na mesma razão que números inteiros (veja Probl. 49). Podem combinar-se também oscilações de freqüências diferentes e de mesma direção; a análise desse movimento é particularmente importante no caso de vibrações sonoras e será feita no Cap. 20.

15-8 *OSCILAÇÕES DE DOIS CORPOS*

O oscilador harmônico simples da Fig. 15-4 é uma massa m acoplada por uma mola, de constante elástica, k, a uma parede maciça. A parede está ligada rigidamente à Terra, o conjunto constituindo portanto um sistema de dois corpos, um dos quais de massa infinita, ligados por uma mola. O suporte maciço permanece em

repouso em um referencial inercial, de forma que a variação de comprimento da mola é igual ao deslocamento da massa m; o outro extremo da mola não se move. Nesse caso define-se a energia potencial $U(x)$ do sistema oscilante da Fig. 15-4 como uma função do deslocamento x da massa m apenas (ver Figs. 15-3 e 15-9). Isso equivale a supor que um extremo da mola seja ligado a uma massa infinita, de forma que a sua extensão seja determinada apenas pelo movimento de m.

Freqüentemente encontram-se na natureza sistemas oscilantes de dois corpos em que *não* podemos considerar infinita a massa de um deles, devendo-se considerar os movimentos de ambos em um referencial inercial apropriado. São exemplos as moléculas diatômicas tais como H_2, CO, HCl, entre outras, que podem oscilar ao longo de seu eixo de simetria. O acoplamento dos átomos que constituem essas moléculas é eletromagnético, mas, para nosso objetivo, podemos imaginá-las como se estivessem ligadas por uma diminuta mola de massa nula.

O que é surpreendente nos osciladores constituídos de dois corpos é que, modificando levemente a definição de alguns termos e introduzindo um novo conceito (o de *massa reduzida*), podem descrever-se suas oscilações com as mesmas equações já estabelecidas para os sistemas constituídos de um só corpo, como na Fig. 15-4. Vamos provar isso.

A Fig. 15-17*a* representa dois corpos m_1 e m_2 ligados por uma mola (de massa desprezível) e constante elástica k; o sistema pode oscilar livremente em uma superfície horizontal sem atrito. Os extremos da mola são localizados pelas coordenadas $x_1(t)$ e $x_2(t)$, como está indicado. O comprimento da mola, em qualquer instante, é $x_1 - x_2$. Sendo l seu comprimento normal, sem distensão, a *variação* de comprimento da mola, $x(t)$ será portanto

$$x = (x_1 - x_2) - l. \qquad (15\text{-}31)$$

Se x for positivo a mola estará distendida; se $x = 0$ ela tem seu comprimento normal; e finalmente se x for negativo ela estará comprimida.

Supõe-se, na Fig. 15-17*a*, que a mola esteja esticada e portanto $x > 0$. Indicam-se também a força **F** exercida pela mola sobre m_2 e a força $-$ **F** exercida sobre m_1. Estas duas forças são iguais e opostas, como revela a figura, tendo módulo comum $F = kx$.

Aplicando a segunda Lei de Newton a m_1 e m_2 resulta

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = +kx.$$

Multiplicando a primeira equação por m_2 e a segunda por m_1 e subtraindo resulta

$$m_1m_2\frac{d^2x_1}{dt^2} - m_1m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2kx - m_1kx,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -kx. \qquad (15\text{-}32)$$

Chamemos de *massa reduzida* do sistema a grandeza $m_1m_2/(m_1+m_2)$, que tem as dimensões de massa, identificando-a pelo símbolo μ, isto é,

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}. \qquad (15\text{-}33)$$

Como l é constante, $d^2(x_1 - x_2)/dt^2 = d^2x/dt^2$ (ver Eq. 15-31) e a Eq. 15-32 pode então ser escrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{\mu}x = 0 \qquad (15\text{-}34)$$

de forma idêntica à da Eq. 15-5 estabelecida para as oscilações de um único corpo, Fig. 15-4. As diferenças são que: (1) x na Eq. 15-34 é o deslocamento *relativo* dos dois blocos em relação às suas posições de equilíbrio (ver Eq. 15-31) e não o deslocamento de um único bloco em relação à sua posição de equilíbrio; (2) μ é a *massa reduzida* do par de blocos e não a massa de um só bloco.

A Eq. 15-33 pode ser escrita tanto sob a forma

$$\mu = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = m_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

como sob essa outra

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Portanto, para massas finitas μ é sempre *menor* do que m_1 ou m_2; daí o nome *massa reduzida*. A Eq. 15-34, leva, pela dedução consecutiva à Eq. 15-6, aos resultados

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{ou} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} \qquad (15\text{-}35)$$

para a freqüência e o período de oscilação do sistema da Fig. 15-17*a*, respectivamente. É claro que este sistema tem a mesma freqüência e o mesmo período que um único bloco de massa μ, ligado a uma parede por uma mola semelhante, como na Fig. 15-17*b*. Conclui-se que a oscilação do sistema de dois blocos da Fig. 15-17*a* é equivalente à oscilação do bloco único da Fig. 15-17*b*. Uma partícula move-se em relação à outra como se essa outra fosse fixa e a massa da partícula móvel fosse reduzida a μ. O conceito de massa reduzida é amplamente utilizado em Física, especialmente em Física Quântica e Física do Estado Sólido.

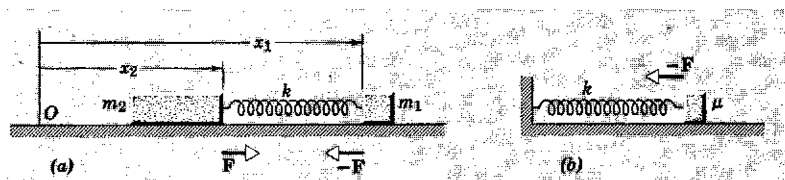


figura 15-17
(*a*) Dois corpos, de massas m_1 e m_2, ligados por uma mola (sem massa), cujo comprimento natural é l. (*b*) Um corpo único de massa μ (a massa reduzida) ligado por uma mola idêntica a uma parede rígida.

Pode-se resolver a Eq. 15-34 como na Seç. 15-3, obtendo-se

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$
$$v = dx/dt = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \delta)$$
$$a = dv/dt = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta),$$

equações idênticas às Eqs. 15-13, considerado que no presente caso x, v e a são respectivamente o *deslocamento*, a velocidade e a aceleração *relativos* dos dois blocos. Portanto,

$$x = (x_1 - x_2) - l$$
$$v = dx/dt = v_1 - v_2 \qquad (15\text{-}36)$$
$$a = dv/dt = a_1 - a_2,$$

em que os índices identificam os blocos.

A energia potencial de um oscilador harmônico simples de dois corpos é expressa por $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, que indica claramente ser a energia potencial uma característica do sistema como um todo, pois x depende da posição de ambos os blocos (ver Eq. 15-36).

Muitos osciladores reais de dois corpos, embora harmônicos, não são harmônico simples; as curvas de sua energia potencial, como a da Fig. 8-7*a*, que se refere a uma molécula diatômica, não são parabólicas. Mesmo esses osciladores, no entanto, comportam-se como osciladores harmônicos simples quando as oscilações são bastante pequenas. Note-se também que x na Fig. 8-7*a* tem significado diferente do que lhe foi atribuído no presente capítulo; no primeiro caso indicava a distância verdadeira, enquanto agora representa a diferença entre a distância real e a distância de equilíbrio (ver Eq. 15-36). Portanto, na Fig. 8-7*a* a posição de equilíbrio estável corresponde não a $x = 0$, como na Fig. 15-2, mas a $x = \sqrt[6]{2a/b}$. Trata-se apenas de mudança de origem do eixo Ox da curva de energia potencial, sem apresentar significado fundamental.

15-9 *MOVIMENTO HARMÔNICO AMORTECIDO*

Até agora supusemos que nenhuma força de atrito atuasse no oscilador. Se tal suposição fosse completamente certa, um pêndulo ou um peso em uma mola oscilariam indefinidamente. Em realidade, a amplitude da oscilação, devido ao atrito, decresce gradualmente até anular-se. O movimento diz-se amortecido por atrito e denomina-se *movimento harmônico amortecido.* Freqüentemente o atrito provém da resistência do ar ou de forças internas. O módulo da força de atrito usualmente depende da velocidade; em muitos casos de interesse ela é proporcional à velocidade do corpo, embora de sentido oposto. Um exemplo de oscilador amortecido está mostrado na Fig. 15-18.

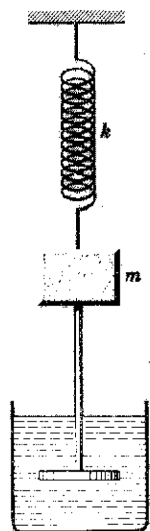


figura 15-18
Oscilador harmônico amortecido. Um disco é ligado à massa m e mergulhado em um fluido que exerce nele a força amortecedora $-b\,dx/dt$. A força restauradora elástica é $-kx$.

A equação de movimento do oscilador harmônico simples amortecido obtem-se aplicando a segunda lei do movimento, $F = ma$, em que F é a resultante da força restauradora $-kx$ e da força amortecedora $-b\,dx/dt$, sendo b uma constante positiva. Obtém-se $F = ma$, ou

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ou ainda

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \qquad (15\text{-}37)$$

Se b for *pequeno*, a solução dessa equação diferencial (dada sem prova)[7] é a seguinte:

$$x = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \delta), \qquad (15\text{-}38)$$

sendo

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \qquad (15\text{-}39)$$

Na Fig. 15-19 representa-se o deslocamento x como função do tempo t, para um movimento oscilatório de pequeno amortecimento.

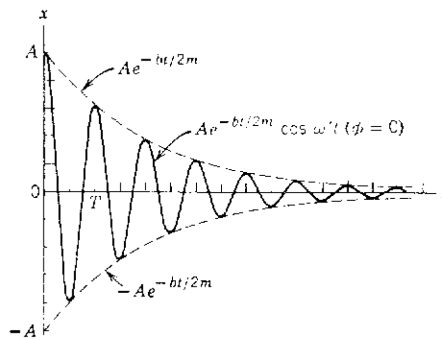


figura 15-19
Gráfico de um movimento harmônico amortecido em função do tempo. O movimento é oscilatório, de amplitude decrescente. A amplitude (- - -) tem inicialmente valor A, decaindo exponencialmente quando $t \to \infty$.

A interpretação dessa solução é a seguinte. Em primeiro lugar, a freqüência é menor e o período maior quando existe atrito, que diminui o movimento, como era de esperar. Se não houvesse atrito, b seria nulo e ω' igualaria $\sqrt{k/m}$ ou ω, a freqüência angular do movimento não amortecido. Existindo atrito, ω' é menor que ω, como indica a Eq. 15-39. Em segundo lugar, a amplitude do movimento decresce gradualmente, até anular-se. O intervalo de tempo durante o qual a amplitude reduz-se a $1/e$ de seu valor inicial denomina-se *vida média* da oscilação. O fator de amplitude é $Ae^{-bt/2m}$, portanto $\tau = 2m/b$. Mais ainda, se não houvesse atrito, b seria nulo e a amplitude teria o valor constante A; a vida média seria infinita.

Se a força de atrito for suficientemente grande, b aumenta a ponto de a Eq. 15-38 não ser mais solução da equação de movimento.[7] O movimento deixará

[7] Ver por exemplo, K. R. Symon, *Mechanics*, 3.ª edição, Addison-Wesley, 1971, Seç. 2-9.

então de ser periódico; o corpo simplesmente retorna à sua posição de equilíbrio, quando largado na posição de deslocamento inicial A.

No movimento harmônico amortecido a energia do oscilador é gradualmente dissipada pelo atrito, anulando-se com o tempo.

15-10 *OSCILAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA*

Até agora discutimos apenas as oscilações naturais de um corpo, isto é, as oscilações que ocorrem quando o corpo é deslocado e depois abandonado a si mesmo. Para um corpo suspenso de uma mola a freqüência natural é

$$\omega = 2\pi v = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

se não houver atrito, e

$$\omega' = 2\pi v' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2},$$

quando existe uma pequena força de atrito bv.

Entretanto, quando o corpo está sujeito a uma força externa oscilatória, ocorre uma outra situação. Por exemplo, uma ponte vibra sob o efeito de uma tropa de soldados em marcha cadenciada, o bloco de um motor vibra devido a impulsos periódicos provocados por uma irregularidade do eixo, um diapasão vibra sob o efeito de uma onda sonora. As oscilações resultantes denominam-se *forçadas* e têm a freqüência da *força externa* e não a freqüência natural do corpo. No entanto, a resposta do corpo depende da relação entre a freqüência natural e a aplicada. Uma sucessão de pequenos impulsos, aplicados com a freqüência própria, pode produzir oscilações de grande amplitude. Uma criança em um balanço aprende que, encolhendo e esticando as pernas com a freqüência adequada, ela consegue fazer o balanço oscilar com grande amplitude. O problema das oscilações forçadas é muito geral. Sua solução é útil em sistemas acústicos, circuitos de correntes alternadas, Física Atômica e Mecânica.

A equação de movimento de um oscilador forçado obtém-se aplicando a segunda lei de movimento. Além da força restauradora $-kx$ e da força amortecedora $-b\,dx/dt$, existe a força externa oscilante aplicada ao sistema. Suponhamos, por simplicidade, que essa força externa seja expressa por $F_m \cos \omega'' t$, sendo F_m o valor máximo da força externa, e ω'' $(= 2\pi v'')$ sua freqüência angular. Podemos imaginar tal força aplicada diretamente à massa suspensa da Fig. 15-18.

Partindo da equação

$$F = ma,$$

obtém-se

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega'' t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ou ainda

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t. \qquad (15\text{-}40)$$

A solução desta equação (apresentada sem demonstração)[8] é a seguinte:

$$x = \frac{F_m}{G} \operatorname{sen}(\omega'' t - \delta), \qquad (15\text{-}41)$$

[8] Ibid., Seç. 2-10.

sendo

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2} \tag{15-42}$$

$$\delta = \arccos \frac{b\omega''}{G}. \tag{15-43}$$

Consideremos de modo qualitativo o movimento resultante.

Note (Eq. 15-41) que o sistema vibra com a freqüência da força aplicada, ω'', e não com sua freqüência natural ω, e que o movimento é harmônico não amortecido.

O caso mais simples ocorre quando não há amortecimento, significando que $b = 0$ na Eq. 15-42. O fator G, cujo valor é $|m(\omega''^2 - \omega^2)|$ para $b = 0$, é grande quando a freqüência da força diretora ω'' é muito diferente da freqüência natural não amortecida do sistema, ω. Isto significa que, neste caso, é pequena a amplitude do movimento resultante, F_m/G. Quando a freqüência da força aplicada se aproxima da freqüência natural, isto é, quando $\omega'' \to \omega$, vemos que $G \to 0$ e a amplitude $F_m G \to \infty$. Na realidade há sempre algum amortecimento, de modo que a amplitude de oscilação, embora possa tornar-se grande, permanece finita.

Nos osciladores reais, sempre amortecidos (para os quais $b \neq 0$ na Eq. 15-42), existe um valor característico da freqüência ω'' para o qual a amplitude de oscilação atinge o máximo. Esta condição é chamada *ressonância*[9] e o valor de ω'' para o qual ela ocorre denomina-se *freqüência de ressonância.* Quanto menor o amortecimento em dado sistema, tanto mais próximas são a freqüência de ressonância e a freqüência natural não amortecida. Muitas vezes o amortecimento é bastante pequeno para que a freqüência de ressonância, com pequeno erro, possa considerar-se igual à freqüência natural não amortecida ω. De modo semelhante, quando o amortecimento é pequeno, a freqüência natural não amortecida ω $(= \sqrt{k/m})$ pode considerar-se igual à freqüência amortecida natural ω'' (ver Eq. 15-39), com pequeno erro.

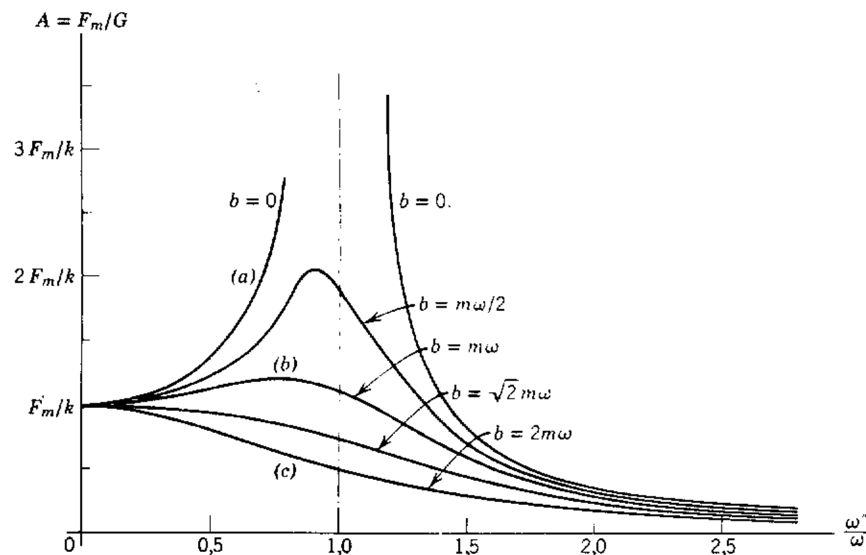


figura 15-20
Gráfico de um oscilador harmônico simples amortecido, sujeito a uma força aplicada, em função da razão entre a freqüência aplicada ω'' e a freqüência natural não amortecida ω. Estão desenhadas cinco curvas, para diferentes graus de amortecimento; a curva (*a*) corresponde a amortecimento nulo e a curva (*c*) a um elevado amortecimento. Note-se que o pico de ressonância aproxima-se cada vez mais da linha vertical correspondente a $\omega''/\omega = 1$, quando b diminui.

Na Fig. 15-20 estão desenhadas cinco curvas das amplitudes de vibrações forçadas como funções da razão entre a freqüência aplicada, ω'', e a freqüência natural não amortecida, ω. Cada uma das cinco curvas corresponde a um diferente valor da constante de amortecimento b. A curva (*a*) mostra a amplitude quando $b = 0$, isto é, quando não existe amortecimento. Neste caso, como vimos, a amplitude torna-se infinita quando $\omega'' = \omega$, pois a força aplicada está continuamente fornecendo energia ao sistema, sem dissipação. Na prática existe sempre algum atrito e conse-

[9] A ressonância foi considerada aqui como ocorrendo à freqüência em que as oscilações forçadas assumem sua amplitude máxima. Ela pode ser definida também de outros modos: por exemplo, há ressonância à freqüência em que é máxima a potência transmitida pela força aplicada ao sistema oscilante, ou à qual corresponde a velocidade máxima da massa oscilante. As definições não são equivalentes: a questão será discutida posteriormente, quando estudarmos as oscilações elétricas; ver Probl. 55.

qüentemente a amplitude alcança valor elevado mais finito. Está claro que, para amplitudes muito grandes, a Lei de Hooke não mais é válida e o limite elástico é ultrapassado; o sistema portanto não é mais governado pela Eq. 15-40. Às vezes o sistema é destruido, como no caso do desastre com a ponte Tacoma (Fig. 15-21). As curvas (*b*) e (*c*) dão a amplitude da vibração forçada para dois casos de amortecimento crescente.

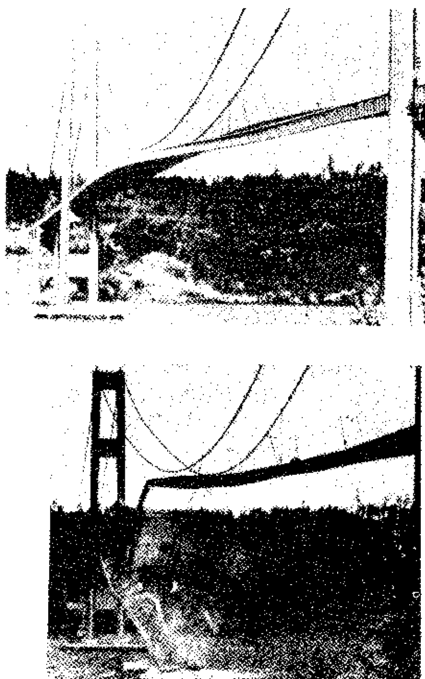


figura 15-21
Em 1.º de julho de 1940 a ponte Tacoma Narrows, em Puget Sound, Washington, foi completada e entregue ao tráfego. Exatamente quatro meses depois, uma brisa suave fez a ponte oscilar até que o vão principal rompeu-se, soltando-se dos cabos e caindo na água. O vento produzira uma força resultante que flutuava com a freqüência natural da estrutura, que entrou em ressonância. Houve um aumento continuo de amplitude, até que a ponte foi destruída. Muitas outras pontes, posteriormente, tiveram de ser reprojetadas, a fim de se tornarem aerodinamicamente estáveis.

O deslocamento causado por uma força constante F_m aplicada a um sistema cuja constante elástica seja k, é simplesmente F_m/k. Note (Fig. 15-20) que a amplitude das vibrações forçadas é bastante grande, comparada ao deslocamento estático. Uma coluna de soldados em marcha cadenciada sobre uma ponte pode levá-la a vibrar com uma amplitude tão grande a ponto de destruí-la, se ocorrer que a freqüência dos passos coincida com uma das freqüências naturais da ponte. Esta a razão pela qual os soldados atravessam uma ponte sem marchar. Considerações de ressonância são muito importantes em muitos aparelhos acústicos, elétricos e atômicos, como veremos depois.

questões

1. Dar alguns exemplos de movimentos que sejam aproximadamente harmônicos simples. Por que os movimentos realmente harmônico simples são raros?
2. Uma mola de fechar portas é tensionada em seu estado normal, de tal maneira que suas espirais ficam juntas e resistem à separação. Tal mola obedece à Lei de Hooke?
3. A Lei de Hooke é obedecida, mesmo aproximadamente, por um trampolim de madeira? Por uma plataforma de concreto? Por uma espiral feita de arame de chumbo?
4. Uma mola de constante elástica k suspende uma massa m. A mola é cortada ao meio e a mesma massa é suspensa por uma das metades. Como estão relacionadas as freqüências de oscilação antes e depois da mola ser cortada?
5. Uma mola não deformada tem constante elástica k. Ela é distendida por um peso colocado em sua extremidade, até um comprimento bastante inferior ao limite elástico. A mola terá a mesma constante elástica k para deslocamentos produzidos a partir dessa nova posição de equilíbrio?
6. Suponha que temos um bloco de massa desconhecida e uma mola de constante elástica também ignorada. Mostrar como se pode predizer o período de oscilação deste sistema mola-bloco, simplesmente medindo a distensão produzida na mola quando o bloco é suspenso nela.
7. Qualquer mola real tem massa. Tomando esta em conta, explicar qualitativamente como ela modificará a expressão do periodo de oscilação de um sistema mola-massa (ver Probl. 34).

8. Pode haver um oscilador que, mesmo para pequenas amplitudes, não seja harmônico simples? Isto é, pode-se ter uma força restauradora não linear em um oscilador mesmo se as amplitudes forem arbitrariamente pequenas?
9. Como é afetada, pela duplicação da amplitude, cada uma das seguintes propriedades de um oscilador harmônico simples: período, constante elástica, energia mecânica total, velocidade máxima, aceleração máxima?
10. Que mudanças você poderia fazer em um oscilador harmônico que duplicassem a velocidade máxima da massa oscilante?
11. Consideramos a troca de energia por um sistema massa-mola como uma transferência entre U e K, permanecendo constante sua soma; veja Fig. 15-9. Suponhamos uma massa que está oscilando entre duas molas distendidas como as da Fig. 15-23. Um estudante diz: "Consideremos a massa momentaneamente em repouso em uma extremidade de seu limite de oscilação. Então, $K = 0$. Entretanto, quando a massa começa a mover-se na direção de sua posição de equilíbrio, o valor de K aumenta. Além do mais, desde que $U = \frac{1}{2}kx^2$ (Eq. 8-11), ambas as molas aumentam sua energia potencial porque o sinal de x (compressão ou distensão) pouco importa. Por essa razão, ambos os valores de K e U aumentam. Como pode ser constante sua soma ($= E$)?" Que há de errado neste argumento?
12. Uma pessoa fica em pé sobre uma balança de banheiro que está sobre uma plataforma suspensa por uma grande mola. Todo o sistema executa um movimento harmônico simples na direção vertical. Descreva a variação de leitura da escala da balança de banheiro durante um período.
13. Seria possível construir um pêndulo simples?
14. Os padrões de massa, de comprimento e de tempo poderiam basear-se nas propriedades de um pêndulo? Explique.
15. Mostrar que, ao aproximar-se de 180° a amplitude θ_m da Eq. 15-20, o período aproxima-se de ∞. Isto é razoável?
16. Predizer, por argumentos qualitativos, se um pêndulo que oscila com grande amplitude terá período maior ou menor do que o período de oscilação para pequenas amplitudes (considere casos extremos).
17. Que acontece com a freqüência de um balanço quando suas oscilações diminuem de amplitude?
18. Como o período de um pêndulo afetado quando seu ponto de suspensão é (*a*) deslocado horizontalmente, com aceleração a; (*b*) deslocado verticalmente com aceleração a dirigida para cima; (*c*) deslocado verticalmente com aceleração a dirigida para baixo, sendo $a < g$. Algum desses casos se aplica a um pêndulo montado em um carro que desce por um plano inclinado?
19. Por que, ao usar a Eq. 15-26 para determinar I, foi excluída a hipótese de o eixo de rotação passar pelo centro de massa? Esta equação se aplica a tal eixo? Como se pode determinar I em relação a tal eixo, usando um pêndulo físico?
20. Enche-se com água uma esfera oca, através de um pequeno orifício. A esfera é suspensa mediante um longo fio e, à proporção que a água escapa lentamente pelo orifício, no fundo, verifica-se que o período de oscilação a princípio aumenta e depois diminui. Explique.
21. (*a*) O efeito da massa, m, do fio ligado ao prumo de um pêndulo cuja massa é M, é ampliar o período além do que teria um pêndulo simples em que $m = 0$. Torne essa afirmação plausível. (*b*) Embora o efeito da massa do fio seja aumentar o período do pêndulo, um fio de comprimento l, oscilando sem que qualquer objeto preso a sua extremidade ($M = 0$), tem um período menor que o de um pêndulo simples de comprimento l. Torne essa afirmação plausível. (Veja "Effect of the Mass of the Cord on the Period of a Simple Pendulum", de H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, junho, 1976.)
22. Dois pêndulos, cada um consistindo de um disco ligado a uma barra leve, são idênticos exceto quanto à ligação entre disco e barra. Em um deles a barra está montada rigidamente no disco; no outro existem rolamentos, de forma que o disco pode girar livremente em torno da extremidade da barra, por exemplo. Suspendem-se ambos os pêndulos, eles são afastados igualmente de suas posições de equilíbrio e abandonados. Qual deles terá maior período? Explique.
23. A freqüência de oscilação de um pêndulo de torção será alterada se ele for levado à Lua? O que dizer de um pêndulo simples? De um oscilador massa-mola? De um pêndulo físico?
24. Como se pode usar um pêndulo para traçar uma senóide?

25. Que movimentos harmônicos simples deveriam ser compostos para que o movimento resultante tivesse como trajetória um oito?

26. Existe alguma conexão entre a relação F como função de x, ao nível molecular, e a relação macroscópica entre F e x em uma mola?

27. (*a*) Sob que circunstâncias a massa reduzida de um sistema de dois corpos seria igual à massa de um só corpo? Explique. (*b*) Qual será a massa reduzida se os corpos tiverem massas iguais? (*c*) Os casos (*a*) e (*b*) dão os valores extremos da massa reduzida?

28. Por que em algumas máquinas usam-se dispositivos amortecedores? Dar um exemplo.

29. Dar alguns exemplos de fenômenos comuns em que a ressonância desempenha papel importante.

30. As marés oceânicas lunares são muito mais importantes do que as solares (ver Questão 18, Cap. 16, por exemplo). Entretanto, dá-se o contrário com as marés na atmosfera terrestre. Explique isto, usando idéias de ressonância, dado que a atmosfera tem um período natural de oscilação aproximadamente igual a 12 horas.

problemas

SEÇÕES 15-3 e 15-4

1. Mostre que $x = A$ sen ωt também é uma solução da Eq. 15-7.

2. Considere a solução mencionada no exercício anterior. Ache o valor de ω que satisfaz à Eq. 15-7. *Resposta:* $\omega = (k/m)^{1/2}$.

3. Considere $k = 200$ N/m e $m = 1$ kg. (*a*) Calcule o valor do *período* do movimento harmônico simples de um sistema massa-mola com estes dados. (*b*) É possível obter a *amplitude* das oscilações somente com estes dados? Em caso afirmativo, calcule o valor da amplitude.

4. Um bloco de 5,0 kg produz uma deformação de 15 cm numa certa mola. O bloco é removido e no seu lugar suspende-se um corpo de 1,5 kg. Esticando-se a mola e largando-se o corpo, inicia-se um movimento oscilatório. Calcule o período deste movimento, desprezando-se o atrito. *Resposta:* 0,42 s.

5. Um bloco de 2,0 kg está suspenso numa mola. Liga-se ao bloco um corpo de 200 g; verifica-se uma distensão adicional de 2,3 cm. Removendo-se a seguir o corpo de 200 g e deixando o bloco oscilar na vertical, qual será o período do seu movimento?

6. A escala de um dinamômetro tem 10 cm e ele pode medir de 0 até 200 N. Calcule o peso de um pacote suspenso ao dinamômetro sabendo que ele oscila verticalmente com freqüência de 2,0 Hz. *Resposta:* 124 N.

7. Quanto às oscilações verticais, um automóvel pode considerar-se montado sobre uma mola. Em certo carro as molas são ajustadas para a freqüência de 3,0 Hz. Qual a constante elástica da mola se o carro pesa 1.600 kgf? Qual será a freqüência de vibração se no carro subirem cinco passageiros, cada um de 80 kg?

8. (*a*) Seja x uma variável linear para designar deslocamento e t a variável temporal. Mostre que toda equação diferencial da forma $(d^2x/dt^2) = -Bx$ representa um movimento harmônico simples linear; obtenha uma expressão para o período deste movimento em função do parâmetro B. (*b*) Se θ for uma variável angular e t for o tempo, mostre que toda equação diferencial da forma $(d^2\theta/dt^2) = -C\theta$ representa um movimento harmônico simples com oscilações angulares; determine o período deste movimento harmônico em função do parâmetro C. *Resposta:* (*a*) $T = 2\pi\,(1/B)^{1/2}$. (*b*) $T = 2\pi\,(1/C)^{1/2}$.

9. Um bloco de massa m está preso à extremidade de uma mola que vibra com um período de 3,0 s; quando a massa sofre um acréscimo de 2,5 kg, o período passa a ser de 4,0 s. Calcule o valor de m.

10. Uma partícula descreve um movimento circular uniforme de raio $R = 2$ m. A aceleração centrípeta da partícula vale 18 m/s^2. Considere um sistema de coordenadas Oxy com a origem no centro da circunferência. Para $t = 0$, o ângulo formado entre o eixo Ox e o vetor posição da partícula é igual a zero. (*a*) Escreva a equação do deslocamento para o movimento harmônico simples que ocorre no eixo Ox. (*b*) Ache a equação do deslocamento para o movimento harmônico simples ao longo do eixo Oy. (*c*) Determine a freqüência, o período, a amplitude e a freqüência angular destes movimentos.
Resposta: (*a*) $x = 2 \cos 3t$. (*b*) $y = 2$ sen $3t$. (*c*) $f = 0{,}476$ Hz; $T = 2{,}1$ s; $A = R = 2$ m; $\omega = 2\pi f = 3$ rad/s.

11. Um bloco de 0,5 kg executa um movimento harmônico simples com amplitude igual a 1,5 m e período igual a 0,3 s. (*a*) Calcule o valor máximo da força que atua sobre o bloco. (*b*) Determine a constante elástica da mola necessária para produzir esta oscilação.

12. As freqüências de vibração dos átomos em sólidos, a temperaturas habituais, são da ordem de 10^{13} Hz. Imagine que os átomos estejam ligados entre si por meio de molas. Suponhamos que um único átomo de prata vibre com esta freqüência e que todos os

outros estejam em repouso. Determine a constante elástica de uma única mola. Um mol de prata tem massa de 108 g e contém $6,02 \times 10^{23}$ átomos. Suponha que o átomo interage apenas com o seu vizinho mais próximo. *Resposta:* 710 N/m.

13. Um bloco está sobre um pistão que se move verticalmente com movimento harmônico simples de período igual a 1,0 s. (*a*) Para que amplitude do movimento o bloco se separa do pistão? (*b*) Se o pistão tiver amplitude de 5,0 cm, qual a freqüência máxima para a qual o bloco e o pistão permanecerão continuamente em contato?

14. Um corpo executa um movimento harmônico simples de tal forma que a posição x do corpo em função do tempo é dada pela seguinte expressão

$$x = 0,15 \cos [7\pi t + (\pi/3)]$$

onde x é dado em metros e t é dado em segundos. Determine: (*a*) a freqüência angular, (*b*) a fase, (*c*) a freqüência, (*d*) o período, (*e*) a amplitude, (*f*) a posição do corpo para $t = 2$ s.
Resposta: (*a*) 7 rad/s. (*b*) $\pi/3$. (*c*) 3,5 Hz. (*d*) 0,286 s. (*e*) 15 cm. (*f*) 7,5 cm.

15. A extremidade de um dos ramos de um diapasão executa um movimento harmônico simples com freqüência de 1.200 Hz e amplitude de 0,40 mm. Calcule: (*a*) a aceleração máxima e a velocidade máxima da extremidade do diapasão, (*b*) a velocidade e a aceleração da mesma extremidade quando seu deslocamento for igual a 0,33 mm. (*c*) Obtenha a posição da extremidade em função do tempo se em $t = 0$ ela passa pela posição de equilíbrio.

16. Um corpo oscila com movimento harmônico simples, cuja equação é

$$x = 6,0 \cos (3\pi t + \pi/3),$$

onde x é dado em metros, t em segundos e os números entre parênteses estão em radianos. Qual é (*a*) o deslocamento, (*b*) a velocidade, (*c*) a aceleração e (*d*) a fase no tempo $t = 2,0$s? Determine também (*e*) a freqüência ν e (*f*) o período de movimento.
Resposta: (*a*) 3,0 m. (*b*) − 49 m/s. (*c*) − 270 m/s^2. (*d*) 20 rad. (*e*) 1,5 Hz. (*f*) 0,67 s.

17. Um alto-falante produz um som musical pela oscilação de um diafragma. Se a amplitude de oscilação é limitada a $1,0 \times 10^{-3}$ mm, que freqüências resultarão quando a aceleração do diafragma excede g?

18. Duas partículas executam movimento harmônico simples de mesmas amplitudes e freqüências, ao longo da mesma reta. Elas se cruzam quando, movendo-se em sentidos opostos, seus deslocamentos igualam a metade da amplitude. Qual a diferença de fase entre elas? *Resposta:* 120°.

19. Duas partículas se deslocam, com movimento harmônico simples, sobre um mesmo segmento de reta cujo comprimento vale A. As partículas possuem períodos iguais de 2,0 s, porém estão defasadas de 30°. (*a*) Determine a distância entre elas quando a partícula mais atrasada passa por uma das extremidades da sua trajetória. (*b*) Neste instante elas se movem em sentidos contrários ou no mesmo sentido?

20. Uma certa mola possui massa desprezível e constante elástica igual a 9,0 N/m. (*a*) Calcule a constante elástica de cada metade. (*b*) As duas metades, suspensas separadamente, suportam um bloco de massa M (veja Fig. 15-22). Calcule o valor de M sabendo que o sistema vibra com uma freqüência de 3,0 Hz. *Resposta:* (*a*) 18 N/m. (*b*) 101 g.

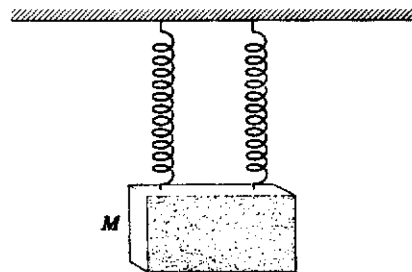


figura 15-22

21. Uma mola uniforme, cujo comprimento sem distensão é l, tem constante elástica k. A mola é partida em duas, cujos comprimentos sem distensão são l_1 e l_2, com $l_1 = nl_2$, n sendo inteiro. Quais as constantes elásticas correspondentes k_1 e k_2, em função de n e de k? Verificar seus resultados para $n = 1$ e $n = \infty$.

22. Duas molas são presas a uma massa m a suportes fixos como indica a Fig. 15-23. Mostre que a freqüência de oscilação neste caso é

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

(Dois capacitores combinados em série formam um sistema elétrico análogo a este.)



figura 15-23

23. Duas massas iguais, m, e três molas idênticas, de constante elástica k, são dispostas como indica a Fig. 15-24 (*a*). Sejam x_1, x_2 o deslocamento de cada massa em relação à respectiva posição de equilíbrio. Mostrar que

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - 2x_1)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - 2x_2).$$

(*b*) Determinar as freqüências de vibração do sistema, supondo para as equações soluções da forma $x_1 = A_1$ sen ωt e $x_2 = A_2$ sen ωt.

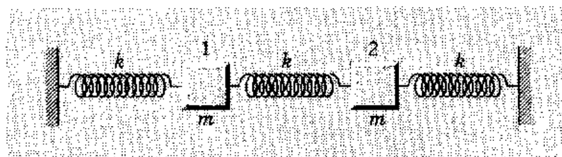


figura 15-24

SEÇÃO 15-4

24. Ligam-se duas molas e no extremo de uma delas coloca-se uma massa m, conforme a Fig. 15-25. As superfícies são lisas. Se as molas, separadas, têm constantes elásticas k_1 e k_2, mostrar que a freqüência de oscilação de m é

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

(Dois capacitores ligados em paralelo constituem um sistema elétrico análogo a este.)

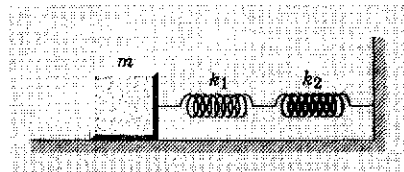


figura 15-25

25. A força de interação entre dois átomos em certas moléculas diatômicas pode ser representada por $F = -a/r^2 + b/r^3$, em que a e b são constantes positivas e r a distância de separação dos átomos. Faça um gráfico de F em função de r. (*a*) Mostre que a separação em equilíbrio é b/a; (*b*) mostre que para pequenas oscilações em relação a esta separação de equilíbrio a constante elástica é a^4/b^3; (*c*) determine o período deste movimento.

26. Uma certa mola possui massa desprezível e constante elástica igual a 20 N/m. A mola está presa ao teto e um bloco de 300 g é amarrado em sua extremidade e abandonado sob a ação do peso e da força da mola. Determine: (*a*) a distância vertical entre o ponto de equilíbrio da extremidade da mola e o ponto até onde a massa pode descer, (*b*) a freqüência das oscilações, (*c*) a amplitude das oscilações, supondo que o movimento seja harmônico simples (sem amortecimento).
Resposta: (*a*) 29,4 cm. (*b*) 1,3 Hz. (*c*) 14,7 cm.

27. Um sistema oscilante massa-mola possui energia mecânica igual a 2,0 J, amplitude de 0,10 m e velocidade máxima igual a 1,2 m/s. Determine: (*a*) a constante elástica da mola, (*b*) a massa e (*c*) a freqüência das oscilações.

28. (*a*) Quando o deslocamento de uma partícula em movimento harmônico simples for igual à metade da amplitude A, que fração da energia total é cinética e que fração é potencial? (*b*) Para que valor do deslocamento metade da energia será cinética e metade potencial?
Resposta: (*a*) $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$; (*b*) $A/\sqrt{2}$.

29. (*a*) Provar que no movimento harmônico simples a energia potencial média é igual à energia cinética média, quando se calcula a média em relação ao tempo, para um período do movimento, e que cada média vale $\frac{1}{4}kA^2$ (ver Fig. 15-9*a*). (*b*) Provar que, tomando a média em relação à posição, em um ciclo, a energia potencial média vale $\frac{1}{6}kA^2$ e a energia cinética média $\frac{1}{3}kA^2$ (ver Fig. 15-9*b*). (*c*) Explicar fisicamente por que os dois resultados anteriores são diferentes.

30. *Mola vertical em um campo gravitacional uniforme.* Consideremos uma mola sem massa, de constante elástica k, situada em um campo gravitacional uniforme. Suponhamos uma massa m suspensa da mola. (*a*) Mostrar que, sendo $x = 0$ a posição da extremidade da mola sem carga, a posição de equilíbrio estático é dada por $x = mg/k$ (ver Fig. 15-26). (*b*) Mostrar que a equação de movimento do sistema mola-massa é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

e que a solução para o deslocamento como função do tempo é $x = A\cos(\omega t + \delta) + mg/k$, sendo $\omega = \sqrt{k/m}$, como antes. (*c*) Mostrar, portanto, que os valores de ω, v, a, ν e T, em um campo gravitacional, são os mesmos que na ausência dele, com a única diferença de a posição de equilíbrio ter sido deslocada de mg/k. (*d*) Considere agora a energia do sistema, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mg(h - x) =$ constante e mostre que, diferenciando em relação ao tempo obtém-se a equação de movimento da parte (*b*). (*e*) Mostre que, se a massa cair de $x = 0$ à posição de equilíbrio estático, $x = mg/k$, a perda de energia potencial gravitacional transforma-se metade em energia potencial elástica e metade em energia cinética. (*f*) Considere, finalmente, o sistema em movimento e na posição de equilíbrio estático. Calcular separadamente a variação da energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica quando a massa m se mover *para cima* até o deslocamento $+A$ e também quando ela se mover *para baixo* até o deslocamento $-A$. Mostre que a variação *total* de energia potencial é a mesma em cada caso, isto é, $\frac{1}{2}kA^2$. Em vista dos resultados (*c*) e (*f*), pode-se simplesmente ignorar o campo gravitacional uniforme na análise, simplesmente deslocando a posição de referência de $x = 0$ para $x_0 = x - mg/k = 0$. A nova curva de energia potencial [$U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 +$ constante] tem a mesma forma parabólica que na ausência de um campo gravitacional [$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$].

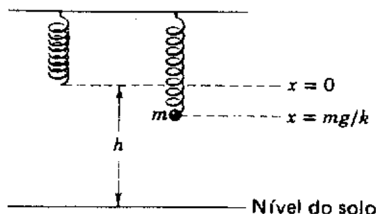


figura 15-26

31. Um bloco de 6,0 kg está suspenso em uma mola cuja constante elástica vale 16 N/m. Uma bala com massa igual a 50 g é disparada sobre o bloco, de baixo para cima, com velocidade de 150 m/s, ficando retida no interior do bloco. (*a*) Determine a amplitude do

movimento harmônico simples resultante. (*b*) Calcule a fração da energia cinética original da bala armazenada no oscilador harmônico. Há perda de energia neste Processo? Explique.

32. Partindo da Eq. 15-17 para a conservação da energia (sendo $\frac{1}{2}kA^2 = E$), obter o deslocamento em função do tempo, por integração da Eq. 15-18; compare com esta.

33. Imagine um cilindro maciço ligado a uma mola horizontal de massa nula; o cilindro pode *rolar sem escorregar* sobre a superfície, como na Fig. 15-27. A constante elástica da mola é $k = 3,0$ N/m. Desloca-se o sistema até a posição em que a mola se distende de 0,25 m, soltando-o em seguida. Calcular as energias cinéticas (*a*) de translação e (*b*) de rotação do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio. (*c*) Mostrar que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa o movimento harmônico simples cujo período é

$$T = 2\pi\sqrt{3M/2k}.$$

onde M é a massa do cilindro.

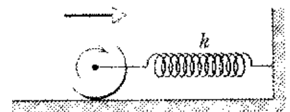


figura 15-27

34. Se a massa m_s de uma mola não for desprezível, porém for pequena comparada à massa m do objeto suspenso por ela, o período de movimento é $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Deduzir este resultado. (*Sugestão:* A condição $m_s << m$ é equivalente à hipótese de que a mola se distende proporcionalmente ao longo do seu comprimento.) (Veja H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, 37, 447 (1969) para uma solução completa do caso geral.)

SEÇÃO 15-5

35. Calcule o comprimento de um pêndulo simples cujo período vale 1,00 s num ponto onde $g = 9,82$ m/s^2.

36. Um pêndulo simples possui comprimento igual a 1,35 m e realiza 100 oscilações completas em 240 segundos. Calcule o valor da aceleração da gravidade neste local. *Resposta:* 9,25 m/s^2.

37. Uma esfera maciça de 1,5 kg está suspensa pela periferia por um arame preso ao teto. O raio da esfera vale 0,18 m; determine o período das pequenas oscilações angulares de torção. O módulo de torção do fio vale $6,0 \times 10^{-3}$ N · m/rad.

38. Um aro circular com raio de 80 cm e massa igual a 300 g está apoiado sobre um prego horizontal preso a uma parede. (*a*) Calcule o período das oscilações para pequenos deslocamentos em relação à posição de equilíbrio. (*b*) Determine o comprimento do pêndulo simples equivalente. *Resposta:* (*a*) 2,5 s. (*b*) 1,6 m.

39. Determinar a maior amplitude de um pêndulo simples para o qual o valor do período, obtido da Eq. 15-19, apresente um erro menor que 1,0%.

40. Uma barra longa, uniforme, de comprimento l e massa m pode girar livremente em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. Uma mola de constante elástica k é ligada horizontalmente entre a extremidade da barra e uma parede fixa como a Fig. 15-28 indica. Qual é o período das pequenas oscilações que resultam quando a barra é empurrada levemente para um lado e posteriormente abandonada? *Resposta:* $2\pi\sqrt{m/3k}$.

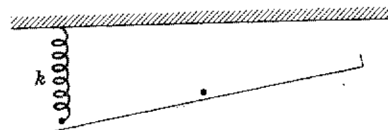


figura 15-28

41. O volante de um relógio vibra com amplitude angular de π radianos e período de 0,50 s. Determinar (*a*) sua velocidade angular máxima; (*b*) sua velocidade angular quando o deslocamento for de $\pi/2$ radianos, e (*c*) sua aceleração angular quando seu deslocamento for de $\pi/4$ rad.

42. (*a*) Calcule a freqüência de um pêndulo simples de 3,0 m de comprimento. (*b*) Calcule sua freqüência supondo que a extremidade superior do fio seja acelerada para *cima* a 2,5 m/s^2. (*c*) Qual seria sua freqüência supondo que a aceleração mencionada no item anterior seja orientada para *baixo*? *Resposta:* (*a*) 0,29 Hz. (*b*) 0,32 Hz. (*c*) 0,25 Hz.

43. Um pêndulo simples de comprimento l e massa m está suspenso de um carro que se move, com velocidade constante v, em um círculo de raio R. Se o pêndulo executa pequenas vibrações, em uma direção radial, em torno de sua posição de equilíbrio, qual será sua freqüência de oscilação?

44. Prove, para o pêndulo físico generalizado da Fig. 15-12, que os centros de oscilação e percussão coincidem. Veja Exemplos 4 e 5 para um caso especial.

45. Um pêndulo é formado ao articular uma barra longa e fina, de comprimento l e massa m, em torno de um ponto que está à distância d acima do centro da barra. (*a*) Ache o período das oscilações de pequena amplitude deste pêndulo em termos de d, l, m e g. (*b*) Mostre que o período tem um valor mínimo quando $d = l/\sqrt{12} = 0,289\ l$.

46. Um disco de 1,0 m de diâmetro é cortado de uma lâmina metálica. O disco oscila como pêndulo, em torno de um prego fixado em uma parede e que passa por um orifício do disco. Seja l a distância do prego ao centro do disco. (*a*) Para que valor(es) de l o período será de 1,7 s? (*b*) Suponha que você deseje um período tão pequeno quanto possível. Que valor de l deverá ser usado? *Resposta:* (*a*) 0,30 m; 0,42 m. (*b*) 0,35 m.

47. (*a*) Mostrar que a tensão máxima no fio de um pêndulo simples, quando a amplitude θ_m for pequena, é $mg\,(1 + \theta_m^2)$. (*b*) Para que posição do pêndulo a tensão será máxima?

SEÇÃO 15-7

48. Em um osciloscópio os elétrons são defletidos por dois campos elétricos perpendiculares entre si, de tal modo que, a qualquer instante, o deslocamento é dado por

$$x = A \cos \omega t, \qquad y = A \cos (\omega t + \alpha).$$

(*a*) Descrever a trajetória dos elétrons e determinar sua equação quando $\alpha = 0°$, (*b*) quando $\alpha = 30°$ e (*c*) quando $\alpha = 90°$.
Resposta: (*a*) Reta, $y = \pm x$. (*b*) Elipse, $y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 = A^2/4$. (*c*) circunferência, $x^2 + y^2 = A^2$.

49. Esboce a trajetória de uma partícula que se move no plano xOy, de acordo com as equações $x = A \cos (\omega t - \pi/2)$, $y = 2A \cos (\omega t)$, em que x e y são dados em metros e t em segundos.

50. A Fig. 15-29 mostra o resultado da combinação dos movimentos harmônicos simples $x = A_x \cos \omega_x t$ e $y = A_y \cos (\omega_y t + \phi_y)$. (*a*) Qual é o valor de A_x/A_y? (*b*) Qual é o valor de ω_x/ω_y? (*c*) Qual é o valor de ϕ_y? *Resposta:* (*a*) 1,0, (*b*) 0,50, (*c*) $\pm \frac{1}{2}\pi$.

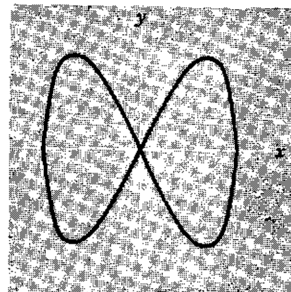


figura 15-29

51. Uma partícula de massa m move-se em um plano fixo ao longo da trajetória $\mathbf{r} = \mathbf{i} A \cos \omega t + \mathbf{j} A \cos 3\omega t$. (*a*) Esboce a trajetória da partícula. (*b*) Ache o momento angular da partícula como função de tempo. (*c*) Ache a força que atua sobre a partícula. Determine também (*d*) sua energia potencial e (*e*) sua energia total como funções de tempo. (*f*) O movimento é periódico? Em caso afirmativo, qual é o período?

52. *Figuras de Lissajous*. Superpondo oscilações de direções perpendiculares, as freqüências dos movimentos nas direções Ox e Oy não necessitam ser necessariamente iguais; portanto, no caso geral a Eq. 15-30 transforma-se em

$$x = A_x \cos (\omega_x t + \delta) \quad \text{e} \quad y = A_y \cos (\omega_y t + \alpha).$$

A trajetória da partícula não é mais uma elipse, mas uma curva denominada *figura de Lissajous*, em honra de Jules Antoine Lissajous (1822-1880), que pela primeira vez demonstrou tais curvas em 1857. (*a*) Se ω_x/ω_y for um número racional, de forma que as freqüências angulares são "comensuráveis", então a curva é fechada e o movimento se repete a intervalos de tempo iguais. Suponha $A_x = A_y$ e $\delta = \alpha$; desenhe a curva de Lissajous para $\omega_x/\omega_y = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. (*b*) Suponha ω_x/ω_y um número racional, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, por exemplo, e mostre que a forma da figura de Lissajous depende da diferença de fase $\alpha - \delta$. Desenhe as curvas para $\alpha - \delta = 0$, $\pi/4$ e $\pi/2$ radianos. (*c*) Se ω_x/ω_y não for um número racional, então a curva é "aberta". Convença-se de que, após um longo tempo, a curva terá passado por todos os pontos do retângulo limitado por $x = \pm A_x$ e $y = \pm A_y$ e que a partícula nunca passará duas vezes pelo mesmo ponto, com a mesma velocidade.

SEÇÃO 15-8

53. (*a*) Determinar a massa reduzida de cada uma das seguintes moléculas diatômicas: O_2, HCl, CO. Exprimir as respostas em unidades de massa atômica, sendo a massa do hidrogênio igual aproximadamente a 1,00 u.m.a. (*b*) Sabe-se que a molécula de HCl vibra com a freqüência fundamental $\nu = 8{,}7 \times 10^{13}$ Hz. Qual a "constante elástica" efetiva k para as forças de acoplamento entre os átomos da molécula? Em termos de sua experiência com molas comuns, você diria que a "mola das moléculas" é relativamente dura ou não?

54. (*a*) Mostrar que, quando $m_2 \to \infty$, na Fig. 15-33, então $\mu \to m_1$. (*b*) Mostre que, em relação ao caso anterior, o efeito de uma parede não-infinita ($m_2 < \infty$) sobre as oscilações da massa m_1 ligada à extremidade de uma mola presa a ela é o de reduzir o período ou aumentar a freqüência das oscilações. (*c*) Mostrar que, quando $m_2 = m_1$, o efeito é o mesmo como se a mola fosse dividida ao meio, cada parte oscilando independentemente em torno do centro de massa, situado na metade da mola.

55. A mola da Fig. 15-17*a* tem constante elástica $k = 250$ N/m. Seja $m_1 = 1{,}0$ kg e $m_2 = 3{,}0$ kg. (*a*) Qual a freqüência de oscilação do sistema de dois corpos? (*b*) Qual a razão K_1/K_2 das suas energias cinéticas?

56. Mostrar que a energia cinética do oscilador de dois corpos, Fig. 15.17*a*, é expressa por $K = \frac{1}{2}\mu v^2$, sendo μ a massa reduzida e $v(= v_1 - v_2)$ a velocidade relativa. Note que o momento linear se conserva durante a oscilação do sistema.

SEÇÃO 15-9

57. Para o sistema mostrado na Fig. 15-18, o bloco tem uma massa de 1,5 kg e a mola, constante $k = 8{,}0$ N/m. Suponha que o bloco seja puxado para baixo uma distância de 12 cm e então abandonado. Se a força de atrito é expressa por $-b\,dx/dt$, onde $b = 0{,}23$ kg/s determine o número de oscilações efetuadas pelo bloco durante o intervalo de tempo necessário para que a amplitude caia para um terço de seu valor inicial.

SEÇÃO 15-10

58. Partindo da Eq. 15-41, determinar a velocidade $v(=dx/dt)$ do movimento oscilatório forçado. Mostrar que a amplitude de velocidade é

$$v_m = F_m/[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}.$$

As equações da Seç. 15-10 são idênticas, em forma, às que representam um circuito elétrico que contém uma resistência R, uma indutância L e uma capacitância C, em série com uma força eletromotriz alternada $V = V_m \cos \omega'' t$. Portanto b, m, k e F_m são análogos respectivamente a R, L, $1/C$ e V_m; x e v são análogos à carga elétrica q e à intensidade de corrente i, respectivamente. No caso elétrico, a amplitude de corrente, i_m, análoga à amplitude de velocidade v_m, acima definida, é utilizada para descrever a qualidade da ressonância.

16
gravitação

16-1 *INTRODUÇÃO HISTÓRICA*[1]

Desde o tempo dos gregos, pelo menos, dois problemas foram motivo de constante especulações: (1) a tendência de objetos, tais como pedra, caírem quando soltos em direção à Terra, e (2) o movimento dos planetas, incluindo o Sol e a Lua que eram classificados como tais naquela época. A princípio, pensava-se que estes problemas eram distintos. Foi um dos feitos de Newton, baseando-se no trabalho de seus antecessores, mostrar claramente serem estes problemas, na verdade, aspectos diferentes de um único problema, sujeitos às mesmas leis.

Em 1665, aos 23 anos, Newton mudou-se de Cambridge para Lincolnshire, quando a Universidade foi fechada devido a praga. Cerca de 50 anos mais tarde ele escreveu, "... no mesmo ano (1665) comecei a pensar na gravidade estendendo-se até a órbita da Lua... e tendo comparado o requisito na força para manter a Lua em sua órbita com a força da gravidade, achei que as respostas eram muito próximas".

William Stukeley, um jovem amigo de Newton, escreveu sobre ter tomado chá com ele sob certas macieiras quando ele disse que aquele cenário era o mesmo do que quando ele teve a idéia da gravitação. "Foi ocasionado pela queda de uma maçã,[2] enquanto ele se encontrava sentado numa atitude contemplativa... e então, pouco a pouco, ele começou a aplicar esta propriedade da gravi-

[1] Ver "A Background to Newtonian Gravitation" por V. V. Raman em *The Physics Teacher*, novembro, 1972.

[2] Existe pouca base para se acreditar na versão de que a maçã caiu na cabeça de Newton!

tação ao movimento da Terra e dos corpos celestiais..." (Veja Fig. 16-1.)

A aceleração da Lua para a Terra pode ser calculada a partir de seu período de revolução e do raio de sua órbita. Obtém-se 0,0027 m/s^2 (ver Ex. 4, Cap. 4). Este valor é cerca de 3.600 vezes menor que a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Newton procurou explicar êssa diferença supondo que a aceleração de um objeto que cai seja inversamente proporcional ao quadrado de sua distância à Terra.

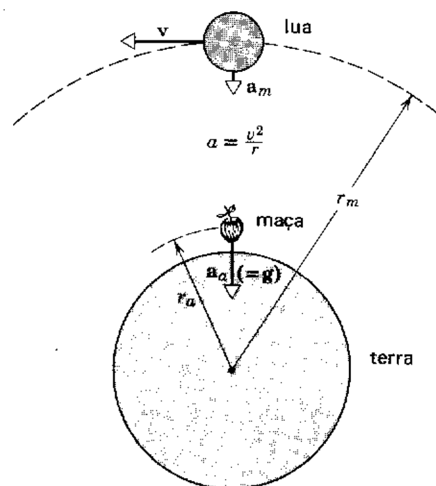


figura 16-1
Tanto a Lua como a maçã são aceleradas para o centro da Terra. A diferença entre seus movimentos provém de a Lua possuir uma velocidade tangencial **v**, mas não a maçã.

Levanta-se imediatamente a questão de que entender por "distância à Terra", Newton eventualmente chegou a conclusão que cada partícula da Terra contribuía para a atração gravitacional produzida em outros corpos. Newton fez a ousada suposição de que a Terra poderia ser considerada como se toda a sua massa estivesse concentrada no centro.

Poder-se-ia considerar a Terra como partícula em relação ao Sol, por exemplo. No entanto, não é óbvio que a mesma suposição seja válida em relação a uma maçã situada a poucos metros da superfície terrestre. Um corpo que caia próximo da superfície da Terra, entretanto, encontra-se a distância de um raio terrestre do centro efetivo de atração, isto é, cerca de 6.400 quilômetros. A Lua encontra-se a cerca de 384.000 km; o inverso do quadrado da razão dessas distâncias é $(6.400/384.000)^2 = 1/3.600$, em concordância com a razão das acelerações da Lua e da maçã. Nas palavras de de Newton mencionadas acima, de certo "as respostas são muito próximas".

Newton não publicou suas conclusões completas até 1678, 22 anos após ter concebido as suas idéias fundamentais. Ele só o fez em sua obra-prima, o *Principia*. Separado do problema maçã--Terra, mencionado acima, existia uma incerteza sobre o valor do raio da Terra, um parâmetro necessário nos cálculos. Finalmente havia em Newton uma grande relutância em publicar qualquer coisa. Ele era um homem tímido e instrospectivo e abominava controvérsias. Bertrand Russell escreveu sobre ele: "Se ele tivesse encontrado o tipo de oposição, com o qual Galileu foi obrigado a conviver, provavelmente nunca teria publicado uma linha". Edmund Halley, o mesmo que emprestou seu nome ao famoso cometa, foi quem, virtualmente, forçou Newton a publicar o *Principia*. O matemático Augustus De Morgan escreveu sobre Halley: "...se não fosse por ele, com toda a probabilidade, aquela obra não teria sido projetada, nem quando projetada, escrita e nem quando escrita, impressa".

No *Principia* Newton foi além dos problemas maçã-Terra e Lua-Terra e estendeu sua lei de gravitação para *todos* os corpos, na maneira que será discutida na próxima seção.

Existem três domínios que se superpõem e em que podemos discutir a gravitação: (1) a atração gravitacional entre duas bolas de boliche, por exemplo, embora mensurável por técnicas de precisão, é muito fraca para ser percebida por nossos sentidos (2) a atração de nós próprios e objetos que nos circundam pela Terra é um aspecto controlador de nossas vidas e do qual só podemos escapar através de medidas extremas. Os projetistas dos programas espaciais se preocupam constantemente com a força gravitacional, como um fator central e controlador. (3) Na escala cósmica, isto é,

no domínio do Sistema Solar e de formação e interação de estrelas e galáxias, a gravitação é, sem dúvida, a força dominante.

As primeiras tentativas para explicar a cinemática do sistema solar foram feitas pelos gregos. Ptolomeu (Claudius Ptolemaus, século II, a.C.) desenvolveu um esquema geocêntrico (ptolomaico) para o sistema solar, no qual, como o nome indica, a Terra se mantém estacionária no centro enquanto os planetas, incluindo o Sol e a Lua, giram em torno dela. Esta não deveria ter sido uma dedução surpreendente. A Terra nos parece ser um corpo substancial. Shakespeare se referia a ela como "... este arcabouço divino, a Terra...". Mesmo hoje, ao se ensinar navegação astronômica, nós usamos um referencial geocêntrico e em conversas usamos expressões como "nascer do Sol" que implicam o uso deste referencial.

Órbitas circulares simples não podem levar em conta o movimento complicado dos planetas. Ptolomeu foi obrigado a usar o conceito de epiciclos, nos quais os planetas se movem em torno de círculos cujos centros se movem em torno de outros círculos em cujo centro se encontra a Terra (veja Fig. 16-26). Ele também foi levado a utilizar vários outros arranjos geométricos todos eles preservando a santidade do círculo como uma característica fundamental do movimento planetário. Nós sabemos agora que é a elipse, com o Sol ocupando um dos focos, que é fundamental e não o circulo (ver abaixo).

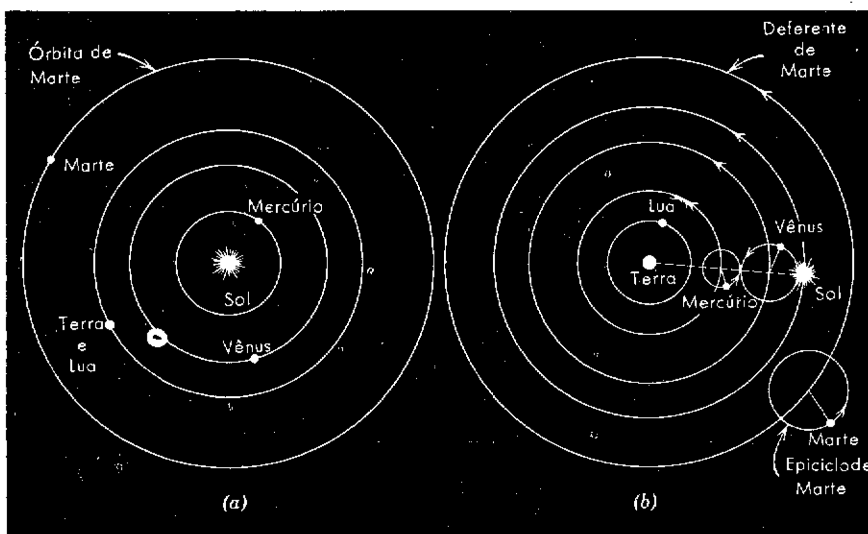


figura 16-2
(*a*) O modelo copernicano do sistema solar. O Sol está no centro e os planetas se movem em torno dele. (*b*) O modelo ptolemaico do sistema solar. A Terra está no centro e os planetas se movem em torno dela. Ambos os pesquisadores introduziram complexidades geométricas para explicar o movimento complexo dos planetas. Em (*b*), por exemplo, Marte descreve um epiciclo cujo centro percorre um diferente. Os arranjos de Copérnico, que são igualmente complexos, não são mostrados. A diferença básica é se é a Terra ou o Sol que está no centro dos movimentos planetários. (Ver *The Crime of Galileo* po Giorgio De Santillana, Chicago: University of Chicago Press, 1955. Ver também *The Copernican Revolution*, por Thomas S. Kuhn, Cambridge, Massachussets: Harvard University Press, 1957.)

No século XVI, Copérnico propôs um esquema heliocêntrico (copernicano), no qual o Sol se encontra no centro do sistema solar e a Terra e os outros planetas se movem em torno dele (ver Fig.

16-2). É comum se pensar que o esquema de Copérnico é tão mais simples que o de Ptolomeu que deveria ter sido adotado imediatamente. Isto não é verdade. Copérnico ainda acreditava na santidade do círculo e seu uso de epiciclos e outros arranjos era tão grande quanto o de Ptolomeu (eles não estão mostrados na Fig. 16-2*a*). Copérnico, entretanto, ao colocar o Sol numa posição central, deu uma descrição mais simples e uma explicação mais natural de certas características do movimento planetário. Acima de tudo ele fez o trabalho de base indispensável e do qual foi desenvolvida a nossa visão moderna do sistema solar.

A crescente controvérsia sobre as duas teorias estimulou os astrônomos a obter dados de observação mais precisos; esses dados foram obtidos por Tycho Brahe[3] (1546-1601), o último dos grandes astrônomos a realizar observações sem usar telescópio.[4] Os dados de Tycho Brahe sobre os movimentos planetários foram analisados e interpretados, durante cerca de vinte anos, por Johannes Kepler (1571-1630), que fora assistente de Brahe. Kepler verificou que existiam importantes regularidades no movimento dos planetas, conhecidas como as *três leis de Kepler para o movimento planetário*:

1.ª Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, o Sol localizando-se em um dos focos (lei das órbitas).

2.ª A linha traçada do Sol a qualquer planeta descreve áreas iguais em tempos iguais (lei das áreas).

3.ª O quadrado do período de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da distância média do Sol ao planeta (lei dos períodos).

As leis de Kepler forneceram forte apoio à teoria de Copérnico, evidenciando a grande simplicidade com a qual poderiam ser descritos os movimentos planetários, tomando-se como referência o Sol. Essas leis, entretanto, eram empíricas; elas simplesmente descreviam o movimento observado dos planetas, sem qualquer explicação teórica. Kepler não concebia as forças como causas dessas regularidades;[5] o conceito de força, realmente, não estava ainda formulado com clareza. Constituiu por isso enorme triunfo para as idéias de Newton que ele conseguisse *deduzir* as leis de Kepler a partir das leis de movimento e da lei de gravitação. Esta última, nesse caso, exigia que cada planeta fosse atraído para o Sol com uma força proporcional à sua massa e inversamente proporcional ao quadrado de sua distância ao Sol.

Desse modo Newton conseguiu explicar os movimentos dos planetas do sistema solar e dos corpos próximos da Terra mediante um conceito comum, fundindo desse modo, em uma teoria, duas ciências anteriormente separadas: a mecânica terrestre e a mecânica celeste. O real significado científico do trabalho de Copérnico reside no fato de que a teoria heliocêntrica abriu caminho para esta síntese.[6] Posteriormente, supondo que a Terra gire e revolva em torno

---

[3] Ver "Copernicus and Tycho" por Owen Gingerich, em *Scientific American*, dezembro, 1973.

[4] O primeiro telescópio cientificamente útil foi construído em 1609 por Galileu, que descobriu os satélites de Júpiter e as fases de Vênus. Galileu era grande defensor da teoria de Copérnico, tendo usado suas observações em seu favor. Newton inventou também um telescópio, do tipo refletor.

[5] Ver "How Did Kepler Discovered The First Two Laws" por Curtis Wilson em *Scientific American*, março, 1972.

[6] Newton teria sido o primeiro a insistir que seu trabalho era a culminação do trabalho de outros. Disse ele certa vez, em carta a Robert Hooke: "Se eu vi mais longe [do que outros] é porque me encontrava em ombros de gigantes". Entre esses gigantes ele certamente incluiria Galileu e Kepler.

do Sol, tornou-se possível explicar fenômenos tão diversos quanto o movimento aparente diário e anual das estrelas, o achatamento da Terra em relação à forma esférica, o comportamento dos ventos alíseos, e muitas outras coisas que não poderiam ligar-se tão simplesmente em uma teoria geocêntrica.

É instrutivo rever como se desenvolveu nosso conhecimento dos movimentos dos corpos do sistema solar, utilizando a metodologia da mecânica clássica esboçada no Cap. 5; veja Seç. 5-1. Historicamente houve quatro passos importantes:

1. Copérnico indicou que era o Sol e não a Terra o corpo central do sistema solar. Na linguagem atual ele nos forneceu um referencial (o Sol) muito mais adequado que o anterior (a Terra) para descrever os movimentos do sistema solar. Entre outras vantagens, o referencial copernicano, fixo em relação ao Sol, mas não girante com ele, apresenta a de ser essencialmente um referencial inercial; o referencial ligado à Terra girante, sobre a qual vivemos, não pode ser considerado inercial nos problemas que envolvam movimentos planetários.

2. Brahe realizou medidas cuidadosas dos movimentos dos planetas, como são vistos da Terra. Ele proporcionou os necessários dados de observação que tornaram possível o progresso ulterior.

3. Kepler, estudando os dados de Brahe, deduziu deles as três leis empíricas simples relativas ao movimento planetário, discutidas acima. Adotando o referencial de Copérnico, ele apresentou em forma simples a informação cinemática sobre movimentos planetários.

4. Newton descobriu as leis do movimento de sistemas mecânicos em geral, assim como a lei de força particular aplicável aos movimentos dos planetas, isto é, a lei de gravitação universal.

Assim, pois, no intervalo de aproximadamente 200 anos, vemos emergir (1) o referencial apropriado, (2) informação cinemática precisa, (3) as leis empíricas do movimento planetário e (4) as leis gerais da mecânica clássica e a lei de força adequada ao movimento planetário.

16-2 *A LEI DE GRAVITAÇÃO UNIVERSAL*

A força entre duas partículas quaisquer, de massas m_1 *e* m_2*, separadas pela distância* r*, é atrativa e age ao longo da linha que une as partículas e seu módulo vale*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (16\text{-}1)$$

sendo G *uma constante universal, isto é, tem o mesmo valor para todos os pares de partículas.*

Esta é a lei de gravitação universal de Newton. É importante acentuar desde logo muitos aspectos desta lei, a fim de a entendermos claramente.

Em primeiro lugar, notemos que as forças gravitacionais entre duas partículas constituem um par ação-reação. A primeira partícula exerce sobre a segunda uma força dirigida ao longo da linha que une as partículas; analogamente, a segunda partícula exerce sobre a primeira uma força dirigida ao longo da reta que elas definem. Suas forças têm mesmo módulo e sentidos opostos.

A constante universal G não deve ser confundida com a aceleração **g** de um corpo, provocada pela atração gravitacional da Terra sobre ele. A constante G tem as dimensões L^3/MT^2, sendo uma grandeza escalar; **g** tem dimensões L/T^2 e é vetorial. Além disso, **g** não é universal nem constante.

Note que a lei de gravitação universal de Newton não é equação de definição de nenhuma das grandezas (força, massa e compri-

mento) contidas nela. De acordo com o que foi exposto no Cap. 5, a força é definida a partir da segunda lei de Newton, $F = ma$. A essência dessa lei, no entanto, é que a força que age numa partícula, assim definida, pode relacionar-se de modo simples com as propriedades mensuráveis da partícula e de sua vizinhança, isto é, supõe-se existir uma lei de força simples. A lei de gravitação universal satisfaz a este requisito. A constante G deve ser determinada experimentalmente; uma vez isto feito para um par de corpos, pode-se usar tal valor na lei de gravitação a fim de determinar as forças gravitacionais entre dois corpos quaisquer.

Note-se também que a Eq. 16-1 exprime a força entre *partículas*. Se quisermos determinar a força entre corpos extensos, como, por exemplo, entre a Terra e a Lua, devemos supor cada corpo como decomposto em partículas, calculando-se a seguir a interação dessas. Tal cálculo é possível graças ao cálculo integral, desenvolvido por Newton em parte para resolver tais problemas. Em geral é incorreto supor que toda a massa de um corpo esteja concentrada em seu centro de massa, ara calcular as forças gravitacionais. No entanto, tal suposição é correta quando se trata de esferas uniformes, resultado que utilizaremos freqüentemente e que será demonstrado na Seç. 16-6.

Na lei de gravitação universal está implícita a idéia de que a força gravitacional entre duas partículas independe da presença de outros corpos e das propriedades do espaço intermediário. A veracidade dessa idéia depende da veracidade das deduções feitas a partir dela e até o presente foi confirmada. Este fato tem servido de base para eliminar a possibilidade de existirem "blindagens gravitacionais".

A lei de gravitação universal pode ser expressa sob forma vetorial. Seja $\mathbf{r}_{12}$ o vetor deslocamento *da* partícula de massa m_1 *à* partícula de massa m_2, conforme indica a Fig. 16-3*a*. A força gravitacional $\mathbf{F}_{21}$, exercida *por* m_1 *sobre* m_2, é dada, em módulo, direção e sentido, pela equação vetorial

$$\mathbf{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}, \tag{16-2a}$$

sendo r_{12} o módulo de $\mathbf{r}_{12}$. O sinal negativo nessa equação significa que $\mathbf{F}_{21}$ tem sentido oposto ao de $\mathbf{r}_{12}$, isto é, a força gravitacional é *atrativa*; m_2 "sente" uma força orientada para m_1 (ver Fig. 16-3). Pode-se verificar que a Eq. 16-2*a* é realmente uma lei de quadrado inverso escrevendo-a na forma $\mathbf{F}_{21} = -Gm_1m_2/r_{12}^2)\,(\mathbf{r}_{12}/r_{12})$; o vetor deslocamento, dividido pelo seu próprio módulo, $\mathbf{r}_{12}/r_{12}$, é simplesmente o vetor unitário $\mathbf{u}_r$ da direção do deslocamento. Se exprimirmos a relação em forma escalar, igualando os módulos em cada membro, o fator r_{12} do numerador cancela-se com um dos fatores r_{12}^3 do denominador, resultando na relação de quadrado inverso da Eq. 16-1.

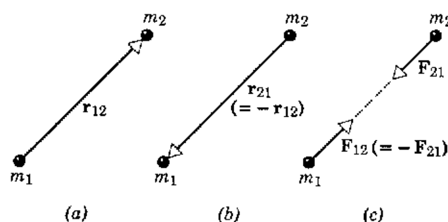


figura 16-3
A força exercida sobre m_2 (por m_1), $\mathbf{F}_{21}$, tem sentido oposto ao deslocamento $\mathbf{r}_{12}$ de m_2 a partir de m_1. A força exercida sobre m_1 (por m_2), $\mathbf{F}_{12}$, tem sentido oposto ao deslocamento $\mathbf{r}_{21}$, de m_1 a partir de m_2. $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, as forças constituindo um par ação-reação.

Está claro que a força exercida *por* m_2 *sobre* m_1 é

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^3}\mathbf{r}_{21}. \tag{16-2b}$$

Note que nas Eqs. 16-2 $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ (ver Fig. 16-3*a*, *b*), de forma que, como seria de esperar, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ (ver Fig. 16-3*c*), isto é, as forças gravitacionais entre dois corpos constituem um par ação-reação.

16-3 *A CONSTANTE UNIVERSAL DA GRAVITAÇÃO, G*

Para determinar o valor de *G* é necessário medir a força de atração entre duas massas conhecidas. A primeira medida precisa foi realizada por Lord Cavendish em 1798; no século XIX Poynting e Boys introduziram aperfeiçoamentos importantes. O valor de *G*, atualmente aceito, é[7]

$$G = 6{,}6726 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2},$$

sendo sua incerteza de $0{,}0005 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

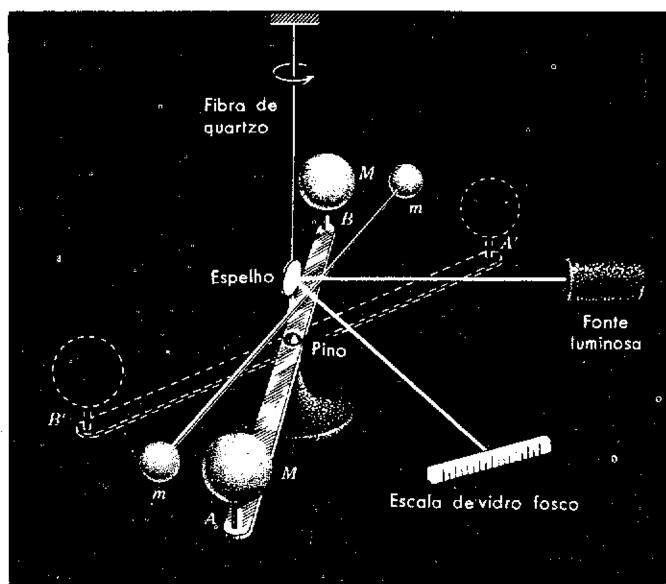


figura 16-4
A balança de Cavendish, usada para a verificação experimental da lei de gravitação universal de Newton. As massas ***m,m*** estão suspensas de uma fibra, enquanto ***M,M*** podem girar em torno de um suporte fixo. A imagem do filamento de uma lâmpada é refletida pelo espelho ligado a ***m,m*** e incide sobre a escala, podendo-se desse modo medir qualquer rotação de ***m,m***.

A constante *G* pode ser determinada pelo método de deflexão máxima, ilustrado na Fig. 16-4. Duas pequenas bolas, cada uma de massa *m*, são colocadas nas extremidades de uma leve haste; o conjunto, formando um "haltere", é suspenso por uma fibra vertical muito fina, ficando o eixo da haste na horizontal. Duas grandes bolas, cada uma de massa *M*, são colocadas nas proximidades dos extremos opostos da haste. Quando as massas maiores são colocadas nas posições *A* e *B*, as massas pequenas são atraídas, de acordo com a lei de gravitação universal, e um torque se exerce no "haltere", que gira no sentido anti-horário, se observado de cima. Quando as massas grandes são colocadas nas posições *A'* e *B'* o "haltere" gira no sentido horário. A fibra reage a esses torques, quando torcida; o ângulo θ de que a fibra é torcida, quando as bolas se movem de uma posição à outra, pode ser medido observando a deflexão de um feixe luminoso refletido em um pequeno espelho preso na fibra. Conhecidas as massas, a distância entre elas e a constante de torção da fibra, *G* pode ser calculada a partir do ângulo de torção. A força de atração é muito pequena, de

[7] Ver "A New Determination of the Constant of Gravitation" por A. H. Cook, em *Contemporary Physics*, maio, 1968, para uma boa resenha dos princípios e métodos usados. Ver também *Scientific American*, Pág. 78, abril, 1982.

forma que a constante de torção da fibra deve ser também muito pequena, a fim de que a deflexão seja detectável. No Ex. 1, ao fim desta seção, são fornecidos alguns dados a partir dos quais G pode ser calculada.

As massas da balança de Cavendish (Fig. 16-4) naturalmente não são partículas, mas corpos extensos. Todavia, tratando-se de esferas uniformes, elas atuam gravitacionalmente como se toda sua massa estivesse concentrada em seus centros (Seç. 16-6).

Como G é muito pequeno, as forças gravitacionais entre corpos da superfície da Terra são extremamente pequenas e podem ser desprezadas quase sempre. Por exemplo, dois objetos esféricos de massa 100 kg cada um, cujos centros estejam separados de 1,0 m, atraem-se com uma força

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{100 \times 100}{1{,}0^2}\,\mathrm{N} = 6{,}7 \times 10^{-7}\,\mathrm{N},$$

por onde se vê que a experiência de Cavendish deve ser realmente muito delicada. Mesmo assim é freqüentemente realizada como uma experiência prática nos laboratórios de física básica.

A força gravitacional que a Terra exerce sobre todos os corpos na proximidade de sua superfície é devida à enorme massa da Terra. Pode-se, com efeito, determinar a massa da Terra a partir da lei de gravitação universal e do valor de G obtido pela experiência de Cavendish. Por esta razão diz-se que Cavendish foi a primeira pessoa a "pesar" a Terra. Seja M_T a massa da Terra e m a de um objeto em sua superfície. A força de atração entre ambos é expressa tanto por

$$F = mg$$

como por

$$F = G\frac{mM_T}{R_T{}^2},$$

sendo R_T o raio da Terra, isto é, a distância entre os corpos, e g a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Combinando as equações resulta

$$M_T = \frac{g\,R_T^2}{G} = \frac{9{,}80\,\mathrm{m/s^2}(6{,}37 \times 10^6\,\mathrm{m})^2}{6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg},$$

ou seja, um "peso" de aproximadamente 6×10^{21} toneladas. Dividindo a massa total da Terra pelo seu volume obtém-se a massa específica média de nosso planeta, 5,5 g/cm^3, cerca de 5,5 vezes a massa específica da água. A massa específica média das rochas na superfície da Terra é muito inferior a este valor; conclui-se que o interior do planeta deve conter material de massa específica superior a 5,5 g/cm^3. A experiência de Cavendish permite, portanto, obter informações sobre a natureza do interior da Terra (ver Questão 7).

EXEMPLO 1

Suponhamos que cada uma das pequenas esferas da Fig. 16-4 tenha massa de 10,0 g; seja de 50,0 cm o comprimento da haste. O período das oscilações de torção deste sistema é de 769 s. Duas grandes esferas, cada uma de 10,0 kg são colocadas junto das esferas suspensas, de forma a produzir torção máxima. A deflexão angular da haste suspensa é então de $3{,}96 \times 10^{-3}$ rad; a distância entre os centros das esferas grande e pequena é de 10,0 cm. Calcular a constante de gravitação universal G a partir desses dados.

O período das oscilações de torção (Eq. 15-24) é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}.$$

Para o haltere rígido, desprezando a contribuição da haste leve,

$$I = \Sigma mr^2 = 10{,}0\,\text{g} \cdot (25{,}0\,\text{cm})^2 + 10{,}0\,\text{g} \cdot (25{,}0\,\text{cm})^2$$

$$I = 1{,}25 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Sendo $T = 769\,\text{s}$, obtém-se para a constante de torção κ

$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1{,}25 \times 10^{-3}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2}{(769\,\text{s})^2} = 8{,}34 \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

A relação entre o torque aplicado e o ângulo de torção é $\tau = \kappa\theta$, sendo conhecidos κ e o valor de θ na deflexão máxima.

O torque é originado pelas forças gravitacionais exercidas pelas esferas grandes sobre as pequenas. Este torque será máximo, para uma dada distância, quando a linha que passa nos centros das esferas for normal à haste. A força sobre *cada* esfera pequena é

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

e o braço de alavanca para cada força é igual à metade do comprimento da haste, $l/2$. Portanto,

$$\text{torque} = \text{força} \times \text{braço de alavanca}$$

ou seja,

$$\tau = 2G\frac{Mm}{r^2}\;\frac{l}{2}$$

que, combinada com $\tau = \kappa\theta$, fornece

$$G = \frac{\kappa\theta r^2}{Mml} = \frac{8{,}34 \times 10^{-8}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \times 3{,}96 \times 10^{-3}\,\text{rad} \times (0{,}100\,\text{m})^2}{10{,}0\,\text{kg} \cdot 0{,}0100\,\text{kg} \cdot 0{,}500\,\text{m}} =$$
$$= 6{,}63 \times 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Note que este resultado é cerca de 1% inferior ao valor aceito. O que foi omitido neste cálculo e que poderia explicar tal diferença?

16-4 *MASSA INERCIAL E MASSA GRAVITACIONAL*

A força gravitacional sobre um corpo é proporcional à sua massa, como mostra a Eq. 16-1. Esta proporcionalidade entre força gravitacional e massa é a razão pela qual a teoria da gravitação é considerada como um ramo da mecânica, o mesmo não acontecendo com as teorias de outras espécies de forças (eletromagnéticas, nucleares etc.).

Uma conseqüência importante dessa proporcionalidade é que podemos medir uma massa medindo a força gravitacional que se exerce nela. Isto pode ser feito utilizando um dinamômetro ou comparando a força gravitacional sobre uma massa com a que se exerce em um padrão de massa, como em uma balança; em outras palavras, podemos determinar a massa de um corpo pesando-o. Isso proporciona um processo de medir a massa de um corpo que é mais prático e mais conveniente do que o processo baseado na definição original de massa (Seç. 5-4).

Ocorre indagar se ambos os métodos medem a mesma propriedade. A palavra massa vem sendo usada em duas situações experimentais completamente diferentes. Por exemplo, se tentamos empurrar um bloco que esteja em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito, nota-se que é necessário algum esforço para o conseguir. O bloco parece inerte e tende a manter-se em repouso, ou, se estiver em movimento, tende a conservar-se assim. A gravidade não entra aqui de forma alguma. Seria necessário o mesmo esforço para acelerar o bloco numa região onde não houvesse

gravidade. É a massa do bloco que exige a aplicação de esforço para alterar seu movimento; esta é a massa que ocorre na equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ das nossas experiências dinâmicas originais. Esta massa m é denominada *massa inercial*. Há uma outra situação que envolve a massa de um corpo: por exemplo, é necessário certo esforço para manter um bloco em repouso acima da superficie da Terra. Se não aplicarmos tal esforço o bloco cairá com movimento acelerado. A força necessária para sustentar o bloco tem mesmo módulo que a força de atração gravitacional entre ele e a Terra. A inércia, nessa situação, não desempenha nenhum papel; é importante, no caso, a propriedade dos corpos materiais de serem atraídos por outros objetos, tais como a Terra. A força é expressa por

$$F = G\frac{m' M_T}{R_T{}^2},$$

sendo m' a *massa gravitacional* do bloco. *A massa gravitacional m' e a massa inercial m do bloco são realmente iguais*? Estudemos isto com maior cuidado.

Consideremos duas partículas A e B, de massas gravitacionais m_A' e m_B', sobre as quais atuam uma terceira partícula C de massa gravitacional m_C'. Suponhamos que a terceira partícula esteja à mesma distância r das outras duas. Portanto, a força gravitacional exercida por C sobre A é

$$F_{AC} = G\frac{m_A' m_C'}{r^2},$$

e a que é exercida por C sobre B

$$F_{BC} = G\frac{m_B' m_C'}{r^2}.$$

A razão das forças gravitacionais sobre A e B é a razão de suas massas gravitacionais, isto é,

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m_A'}{m_B'}.$$

Suponhamos agora que o terceiro corpo seja a Terra; nesse caso F_{AC} e F_{BC} são os *pesos* dos corpos A e B, portanto

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{m_A'}{m_B'}.$$

Logo, a lei de gravitação universal contém em si o resultado de que os pesos dos vários corpos, no mesmo local da superficie terrestre, são exatamente proporcionais às suas *massas gravitacionais*.

Suponhamos agora que medimos as massas inerciais m_A e m_B das partículas A e B, por meio de experiências dinâmicas, usando talvez uma mola, como na Seç. 5-4. Feito isso, deixam-se as partículas cair para a Terra, medindo-se suas acelerações. Verifica-se experimentalmente que os objetos de diferentes *massas inerciais* caem com a mesma aceleração g, proveniente da atração gravitacional da Terra, isto é, de seus pesos; portanto, usando a segunda lei de movimento tem-se

$$W_A = m_A g,$$
$$W_B = m_B g,$$
$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Em outras palavras, os pesos dos corpos, no mesmo local da Terra, são exatamente proporcionais também às suas *massas inerciais*. Portanto, a massa inercial e a massa gravitacional são pelo menos proporcionais uma à outra; parecem de fato ser idênticas.

Newton imaginou uma experiência para comprovar diretamente a equivalência aparente entre as duas massas. Retornando à Seç. 15-5, em que foi deduzido o período de oscilação de um pêndulo simples, verifica-se que, para pequenas oscilações, ele é expresso por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{m'g}},$$

sendo m a massa inercial da esfera e m' sua massa gravitacional, portanto $m'g$ representa a atração gravitacional sobre ela. Somente se admitirmos que m e m' são iguais, como foi feito implicitamente, obtém-se a expressão

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

para o período. Newton construiu um pêndulo cuja esfera era oca, podendo conter diferentes substâncias, tendo o cuidado de usar sempre o mesmo *peso* todas elas, determinado por uma balança. Logo, a força sobre o pêndulo, em todos os casos era sempre a mesma, no mesmo local. Como a forma externa da esfera era invariável, mesmo a resistência do ar ao movimento do pêndulo mantinha-se a mesma. Quando uma substância substituísse outra, no interior da esfera, qualquer diferença de aceleração deveria ser atribuída a uma modificação da *massa inercial* e se revelaria pela modificação do período do pêndulo. Entretanto, Newton verificou que em todos os casos o período do pêndulo manteve-se inalterado, sendo expresso sempre por $T = 2\pi \sqrt{l/g}$. Ele concluiu, portanto, que $m = m'$, isto é, que as massas inercial e gravitacional são idênticas.

Em 1909 Eötvös projetou um aparelho que poderia registrar uma variação da força gravitacional de 5 partes em 10^9. Ele verificou que, dentro da precisão de seus aparelhos, massas inerciais iguais sempre sofriam atrações gravitacionais iguais. Uma versão refinada da experiência de Eötvös foi relatada em 1964 por R. H. Dicke e seus colaboradores, que melhoraram a precisão da experiência original por um fator de várias centenas.[8]

Na Física clássica a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial foi interpretada como um acidente notável, sem significado mais profundo. Entretanto, na Física moderna esta equivalência é considerada como um indício que conduz a um conhecimento mais profundo da gravitação (ver Seç. 16-13) e levando ao desenvolvimento da teoria geral da relatividade.

16-5 *VARIAÇÕES DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE*

Até agora consideramos constante a aceleração da gravidade. No entanto, de acordo com a lei de gravitação universal de Newton, é evidente que g deve variar com a altitude, isto é, com a distância ao centro da Terra, o que já foi indicado explicitamente em conexão com o problema da Lua e da maçã. Calculemos agora a variação de g resultante de nos afastarmos da superfície da Terra. Pela Eq. 16-1,

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

obtém-se, por diferenciação em relação a r,

$$dF = -2G\frac{m_1 m_2}{r^3}\,dr.$$

Combinando as duas equações resultará

$$\frac{dF}{F} = -2\frac{dr}{r},$$

ou seja, a variação relativa de F é o dobro da variação relativa de r. O sinal negativo significa que a força decresce com o aumento da distância. Sendo m_1 a massa da Terra e m_2 a massa do objeto, a força gravitacional sobre o objeto, atribuível à Terra, será

$$F = m_2 g,$$

[8] Ver "The Eötvös Experiment", por R. H. Dicke, *Scientific American*, dezembro de 1961, para uma elegante exposição deste assunto.

dirigida para a Terra. Diferenciando esta expressão resultará

$$dF = m_2\, dg,$$

e, dividindo esta equação pela precedente,

$$\frac{dF}{F} = \frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r}. \qquad (16\text{-}3)$$

Por exemplo, subindo a 16 km da superfície da Terra r varia de cerca de 6.400 km a cerca de 6.416 km, com aumento relativo de 1/400. Portanto,[9] g deve variar de aproximadamente $-1/200$ nessa distância, ou seja, de uns 980 cm/s^2 a cerca de 975 cm/s^2. Logo, g é de fato aproximadamente constante próximo da superfície da Terra, em determinada latitude. A altitudes superiores, como as da órbita de um satélite ou da órbita da Lua, g diminui apreciavelmente, como indica a Tab. 16-1.

Tabela 16-1
Variação de g com a Altitude à Latitude de 45°

Altitude, m	g, m/s^2	Altitude, m	g, m/s^2
0	9,806	32.000	9,71
1.000	9,803	100.000	9,60
4.000	9,794	500.000	8,53
8.000	9,782	1.000.000[a]	7,41
16.000	9,757	380.000.000[b]	0,002 71

[a] Altitude típica da órbita dos satélites.
[b] Raio da órbita da Lua.

Medidas de g constituem fonte essencial de informação sobre a forma da Terra. Para melhor definir o problema, usualmente considera-se não a própria Terra, mas superfície fechada imaginária denominada *geóide*, que coincide com o nível médio dos oceanos, enquanto nos continentes é definido como continuação desse nível; em princípio a posição do geóide pode ser determinada perfurando pequenos canais ao nível do mar, através dos continentes, e registrando o nível médio da água. O geóide é uma superfície de potencial gravitacional constante; em qualquer ponto a linha do prumo é perpendicular a ela.

Os antigos gregos acreditavam que a Terra fosse redonda e um deles, Erathostenes (c. 276-194 a.C.), mediu o raio da Terra supondo que fosse uma esfera. Obteve o valor de 7.400 km, sendo o valor modernamente aceito de 6.371 km. Posteriormente verificou-se, por medições, que dentro de uma satisfatória segunda aproximação, o geóide não é uma esfera, mas um elipsóide de revolução, achatado ao longo do eixo de rotação da Terra e saliente no equador. O raio equatorial, de fato, excede o raio polar de 21 km. Este achatamento é provocado por efeitos centrífugos na Terra girante e deformável. A superfície geóidica não é exatamente elipsoidal, ficando fora do elipsóide que melhor se ajusta sob as massas montanhosas e dentro dele nos oceanos.

O fato de o equador estar mais afastado do centro da Terra do que os pólos significa que deve haver um aumento contínuo no valor medido de g quando se passa do equador (latitude de 0°) para qualquer dos pólos (latitude de 90°), o que está indicado na Tab. 16-2.

[9] A Eq. 16-3 é uma expressão diferencial e exata. A expressão correspondente, obtida quando se substitui dr por uma variação finita Δr, será uma boa aproximação desde que $\Delta r/r$ seja muito pequena.

Tabela 16-2

Variação de g com a Latitude, ao Nível do Mar

Latitude, graus	g, m/s²	Latitude, graus	g, m/s²
0	9,780 39	50	9,810 71
10	9,781 95	60	9,819 18
20	9,786 41	70	9,826 08
30	9,793 29	80	9,830 59
40	9,801 71	90	9,832 17

Conforme mostra o Exemplo 2, todavia, cerca de metade desta variação pode ser explicada por outro efeito, a saber, a variação no valor efetivo de g ocasionado pela rotação da Terra. Se esta girasse com suficiente rapidez, por exemplo, os objetos localizados em sua superfície, no equador, pareceriam não ter peso, o que significa que o valor efetivo de $g = W/m$ seria nulo. Para todas as velocidades de rotação inferiores a este valor crítico, g tem valor definido não nulo, que é, entretanto, menor que o valor que teria no mesmo ponto se a Terra não girasse.

Em 1959 observou-se que a órbita do satélite artificial Vanguard, calculada usando para **g** os valores baseados em um geóide elipsoidal, não concordava exatamente com a órbita observada. Concluiu-se que a melhor aproximação do geóide não é um elipsóide de revolução, mas uma figura com a vaga forma de uma pêra, cuja parte menor está localizada no hemisfério norte e localizado 15 metros acima do elipsóide de referência. O movimento de um satélite é governado, a qualquer instante, pelo valor de **g** na posição que ele ocupa. Portanto um satélite artificial da Terra constitui uma sonda útil para estudar os valores de **g** próximo da superfície da Terra, a partir dos quais podem obter-se informações quanto à forma do geóide.[10]

EXEMPLO 2

Efeito da rotação da Terra sobre **g**. A Fig. 16-5 é uma representação esquemática da Terra, vista de um ponto acima do Pólo Norte. Mostra-se, muito ampliado, um corpo de massa m suspenso de um dinamômetro localizado no equador. As forças que atuam no corpo são a força exercida pelo dinamômetro w, dirigida para cima, que é o peso aparente do corpo, e a atração gravitacional da Terra, $F = GmM_T/R_T^2$. Este corpo não está em equilíbrio, pois experimenta uma aceleração centrípeta a_R enquanto gira com a Terra. Deve haver por isso uma força resultante aplicada ao corpo e dirigida para o centro da Terra. Em conseqüência, a força de atração gravitacional F (o peso verdadeiro do corpo) deve ser maior que a força w exercida pela mola (o peso aparente do corpo).

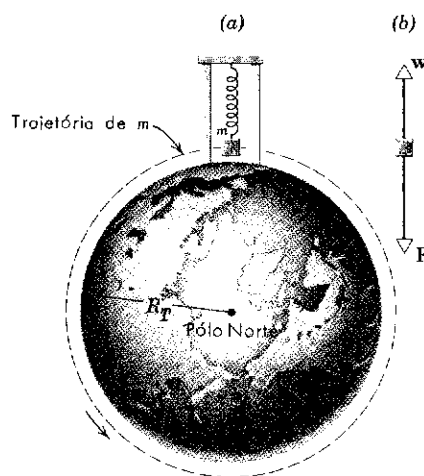


figura 16-5
Exemplo 2. Efeito da rotação da Terra sobre o peso de um corpo, medido por um dinamômetro.

A partir da segunda lei de movimento obtém-se

$$F - w = ma_R,$$

$$\frac{GM_Tm}{R_T^2} - mg = ma_R,$$

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} - a_R \qquad \text{(no equador).}$$

Nos pólos $a_R = 0$ e conseqüentemente

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \qquad \text{(nos pólos).}$$

Este é o valor de g que obteríamos em qualquer local (supondo que a Terra seja esférica) onde pudesse ser ignorada a rotação da Terra.

Realmente a aceleração centrípeta não está dirigida para o centro da Terra, a não ser no equador. Ela está dirigida sempre perpendicularmente ao eixo de rotação da Terra, em qualquer latitude. A análise detalhada, portanto, é a de um movimento bidimensional. O caso extremo, todavia, é o do equador, onde

[10] Ver, por exemplo, "Satellite Orbits and Their Geophysical Implications", por D. G. King-Hele, *Contemporary Physics*, abril de 1961, "Refining the Shape of the Earth" por D. G. King-Hele e G. E. Cook, *Nature*, 246, 86 (1973, e "The Shape of the Earth" por D. G. King-Hele, *Science*, junho 25, 1976.

$$a_R = \omega^2 R_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_T = \frac{4\pi^2 R_T}{T^2}.$$

sendo ω a velocidade angular de rotação da Terra. T seu período e R_T seu raio. Usando os valores

$$R_T = 6{,}37 \times 10^6 \text{ m},$$
$$T = 8{,}64 \times 10^4 \text{ s},$$

obtém-se

$$a_R = 0{,}0336 \text{ m/s}^2.$$

Comparando com a Tab. 16-2, vê-se que este efeito é suficiente para explicar mais de metade da diferença entre os valores observados de g, a pequenas e grandes latitudes.

16-6 *EFEITO GRAVITACIONAL DE UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE MASSA*

Já utilizamos o fato de que uma grande esfera atrai partículas fora dela tal como se a massa da esfera estivesse localizada em seu centro. Provemos agora este resultado.

Consideremos uma casca esférica de massa específica uniforme, cuja espessura t seja pequena comparada a seu raio r (Fig. 16-6). Desejamos calcular a força gravitacional exercida sobre uma partícula externa P de massa m.

Suponhamos que cada partícula da casca exerça sobre P uma força proporcional à sua própria massa, inversamente proporcional ao quadrado da distância entre aquela partícula da casca e P, e dirigida ao longo da linha que une as duas partículas. Desejamos então obter a força resultante que atua em P, devida a todas as partes de que é formada a casca esférica.

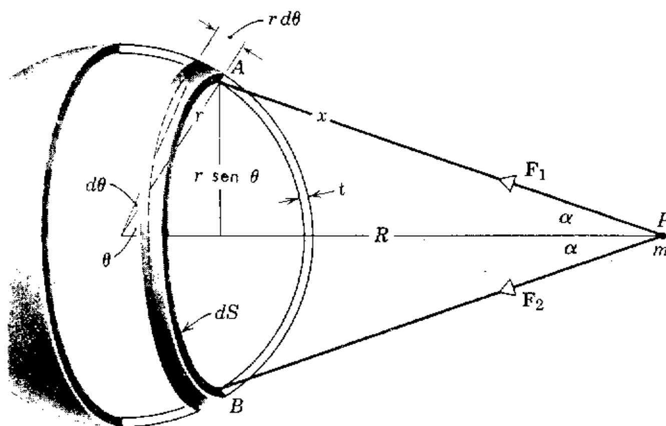


figura 16-6
Atração gravitacional da seção dS de uma casca esférica material sobre uma partícula de massa m.

A pequena parte da casca localizada em A atrai m com a forma $\mathbf{F}_1$. Em B, uma outra pequena parte, de mesma massa e igualmente distante de m, mas diametralmente oposta a A, atrai m com a força $\mathbf{F}_2$. A resultante dessas duas forças que atuam sobre m é $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Note-se, entretanto, que os componentes verticais dessas duas forças cancelam-se mutuamente e que seus componentes horizontais, $F_1 \cos\alpha$ e $F_2 \cos\alpha$, são iguais. Dividindo a casca esférica em pares de partículas, como acima, conclui-se que as forças transversais que atuam em m se cancelam aos pares. Uma pequena massa no hemisfério superior exerce uma força cujo componente vertical dirigido para cima, atuante em m, cancelará o componente vertical, dirigido para baixo, da força exercida em m por uma massa igual e simétrica do hemisfério inferior da casca. Para obter a resultante que age em m, devida a toda a camada, bastará portanto considerar apenas os componentes horizontais.

Tomemos como elemento de massa da camada uma faixa circular dS, de comprimento $2\pi(r \operatorname{sen}\theta)$, largura $r\,d\theta$ e espessura t. Seu volume será pois

$$dV = 2\pi t r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Sendo ρ a massa específica da casca, a massa da faixa será

$$dM = \rho dV = 2\pi t \rho r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

e a força exercida por dM sobre a partícula de massa m localizada em P é horizontal, tendo valor

$$dF = G\frac{m\,dM}{x^2}\cos\alpha \qquad (16\text{-}4)$$

$$= 2\pi G t\rho m r^2 \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{x^2}\cos\alpha.$$

As variáveis x, α e θ estão relacionadas. A figura mostra que

$$\cos\alpha = \frac{R - r\cos\theta}{x} \qquad (16\text{-}5)$$

e, como, pela lei dos co-senos,

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta, \qquad (16\text{-}6)$$

tem-se

$$r\cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}. \qquad (16\text{-}7)$$

Diferenciando-se a Eq. 16-6 resulta

$$2x\,dx = 2Rr\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{x}{Rr}\,dx. \qquad (16\text{-}8)$$

Combinando a Eq. 16-7 com a 16-5 e o resultado, mais a Eq. 16-8, na Eq. 16-4, eliminam-se θ e α, obtendo-se

$$dF = \frac{\pi G t\rho m r}{R^2}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)dx,$$

que é a força exercida pela faixa circular dS sobre a partícula m.

Deve-se agora considerar cada elemento de massa da casca e somar todas as faixas circulares da casca: é uma operação de integração sobre a casca, em relação à variável x, cujos valores vão do mínimo $R - r$ ao máximo $R + r$.

Tendo em conta que

$$\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)dx = 4r,$$

obtém-se a força resultante

$$F = \int_{R-r}^{R+r} dF = G\frac{(4\pi r^2\rho t)m}{R^2} = G\frac{Mm}{R^2}, \qquad (16\text{-}9)$$

sendo $M = 4\pi r^2 t\rho$ a massa total da casca esférica. É exatamente o mesmo resultado que teríamos obtido para a força que se exerce entre *partículas* de massas M e m, separadas pela distância R. Fica provado, portanto, que *uma casca esférica de densidade uniforme atrai uma massa puntiforme externa como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro.*

Uma esfera maciça pode ser considerada como constituída de um grande número de cascas concêntricas; se cada uma destas tiver massa específica uniforme, mesmo que a massa específica varie de uma camada para outra, o mesmo resultado se aplicará à esfera maciça. Portanto, um corpo como a Terra, a Lua ou o Sol, na medida em que possam considerar-se esféricos, produzem, sobre corpos externos a eles, os mesmos efeitos gravitacionais que partículas puntiformes.

Note-se que nossa prova aplica-se apenas a esferas e somente se a massa específica for constante em todo o corpo ou função apenas do raio.

Um resultado interessante de alguma importância é a força exercida por uma casca esférica sobre uma partícula em seu *interior*: esta força é *nula*. Para prová-lo, observe-se a Fig. 16-7, em que m é mostrada dentro da casca. Neste caso R é menor do que r. Os limites de integração de x são agora $r - R$ e $R + r$. Porém

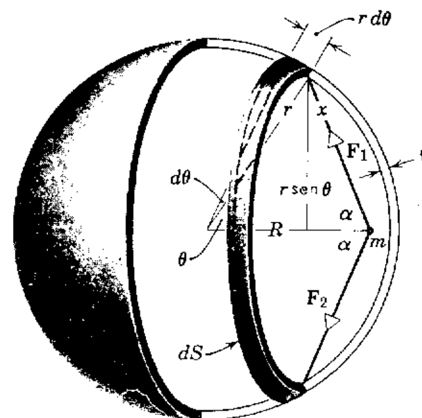


figura 16-7
Atração gravitacional de uma seção dS de uma casca esférica material sobre uma partícula de massa m colocada no interior da casca.

$$\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1\right)dx = 0,$$

logo $F = 0$.

Este último resultado, embora não seja óbvio, é plausível porque os elementos de massa da casca, em lados opostos de m, exercem agora forças de sentidos opostos sobre m. O anulamento final depende do fato de que a força varia precisamente com o inverso do quadrado da distância entre as duas partículas (ver Probl. 18). Conseqüências importantes deste resultado serão discutidas nos capítulos sobre eletricidade. Lá nós veremos que a força elétrica entre partículas carregadas também varia com o inverso do quadrado da distância entre elas. Uma conseqüência de interesse na gravitação é que a força gravitacional exercida pela terra sobre uma partícula decresce à medida que esta se afunda na Terra, *supondo que nosso planeta tenha densidade constante*, pois as porções de matéria das camadas externas à posição da partícula não exercerão força sobre ela; no centro da Terra a força se anularia. Portanto, g seria máxima na superfície da Terra, decrescendo tanto para fora como para dentro, *se a Terra tivesse massa específica constante*. Você poderia imaginar uma distribuição esférica da massa da Terra[11] que não desse esse resultado? (Ver Probl. 16.)

EXEMPLO 3

Suponhamos que pudesse ser cavado um túnel através da Terra, ao longo de um diâmetro, de uma superfície à outra, conforme a Fig. 16-8.

(*a*) Mostrar que o movimento de uma partícula que cai no túnel é harmônico simples. Desprezar todas as forças de atrito e supor que a densidade da Terra seja uniforme.

A atração gravitacional da Terra sobre uma partícula a distância r do centro provém apenas da porção de matéria da Terra localizada nas cascas internas à posição da partícula; as cascas externas não exercem qualquer força. Seja ρ a massa específica uniforme da Terra; a massa interna à casca de raio r será

$$M' = \rho V' = \rho \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Esta massa pode considerar-se concentrada no centro da Terra, para efeitos gravitacionais. Logo, a força exercida sobre a partícula de massa m é

$$F = -\frac{GM'm}{r^2},$$

o sinal negativo indicando que a força é atrativa e dirigida para o centro da Terra.

Substituindo M' por seu valor,

$$F = -G\frac{4\rho\pi r^3 m}{3r^2} = -G\rho\frac{4\pi m}{3}r = -kr,$$

sendo $4\pi G\rho/3$ uma constante, denominada k. A força, portanto, é proporcional ao deslocamento r, mas de sentido oposto. É justamente esta a condição para que o movimento seja harmônico.

(*b*) Se um objeto caísse por um túnel, que tempo gastaria para ir de um extremo ao outro?

O período do movimento harmônico simples é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4\pi G\rho m}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

Tomemos $\rho = 5{,}51 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$ e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, o que dá

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}51 \times 10^3}}\ \text{s} = 5.050\ \text{s} = 84{,}2\ \text{min}.$$

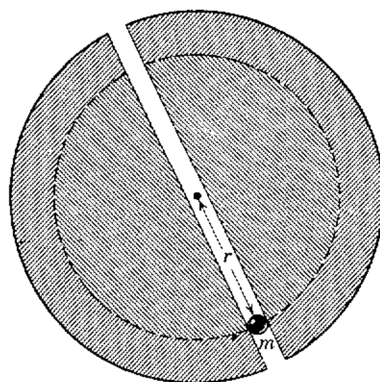


figura 16-8
Exemplo 3. Partícula em movimento dentro de um túnel que atravessa a Terra.

[11] Ver "Comment on The Radial Variation of g in a Spherically Symetric Mass with Uniform Density" por K. Sundaralingam, em *American Journal of Physics*, setembro, 1974.

O tempo de percurso será a metade do período, isto é, cerca de 42 min. Note que este tempo é independente da massa do objeto.

A Terra não tem realmente densidade uniforme. Suponha que ρ não fosse constante, mas função de r. Que efeito isto teria sobre nosso problema?

16-7 *OS MOVIMENTOS DOS PLANETAS E SATÉLITES*

Os movimentos dos corpos do sistema solar podem ser deduzidos das leis do movimento e da lei de gravitação universal. Como foi demonstrado por Kepler (ver Seç. 16-1), todos os planetas se movem em órbitas elípticas, estanto o Sol em um dos focos. Muita coisa sobre o movimento planetário pode ser aprendida considerando o caso particular de órbitas circulares. Vamos ignorar as forças entre os planetas e considerar apenas a interação do Sol com um planeta dado. Estas considerações aplicam-se também ao movimento de um satélite (natural ou artificial) em torno de um planeta.

Consideremos dois corpos esféricos, de massas M e m, que descrevem órbitas circulares devido à atração gravitacional de um sobre o outro. O centro de massa deste sistema de dois corpos está localizado na linha que os liga, em um ponto C tal que $mr = MR$ (Fig. 16-9). Se não há forças externas atuando no sistema, o centro de massa não tem aceleração. Neste caso escolhe-se C para origem do nosso referencial. O corpo maior, de massa M, descreve uma órbita de raio constante R e o menor, de massa m, tem órbita de raio constante r; ambos têm a mesma velocidade angular ω. Para que aconteça isso, a força gravitacional que atua em cada corpo deve produzir a necessária aceleração centrípeta. Como estas forças gravitacionais constituem um par ação-reação, as forças centrípetas devem ser iguais e de sentidos opostos. Em outras palavras, $m\omega^2 r$ (o módulo da força centrípeta exercida por M sobre m) deve igualar $M\omega^2 R$ (o módulo da força centrípeta exercida por m sobre M). Com efeito, sendo $mr = MR$, segue-se que $m\omega^2 r = M\omega^2 R$. A condição fundamental, portanto, é que a força gravitacional atuante em qualquer dos corpos deve ser igual à força centrípeta necessária para mantê-lo em movimento sobre uma órbita circular, ou seja,

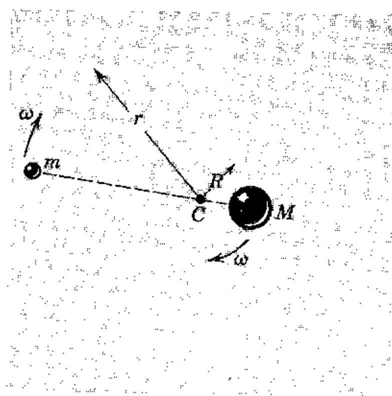


figura 16-9
Dois corpos que se movem em órbitas circulares, cada um sob a influência da atração gravitacional do outro. Ambos têm a mesma velocidade angular ω.

$$\frac{GMm}{(R + r)^2} = m\omega^2 r. \tag{16-10}$$

Se um dos corpos tem massa muito maior que o outro, como no caso do Sol e de um planeta, a distância dele ao centro de massa é muito inferior à do outro corpo. Suponhamos que R seja desprezível em comparação com r; a Eq. 16-10 torna-se então

$$GM_s = \omega^2 r^3,$$

sendo M_s a massa do Sol. Exprimindo a velocidade angular em função do período de revolução, $\omega = 2\pi/T$, obtemos

$$GM_s = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}. \tag{16-11}$$

Esta é uma das equações básicas do movimento planetário, sendo válida também para órbitas elípticas se definirmos r como o semi-eixo maior da elipse. Consideremos algumas de suas conseqüências.

Uma conseqüência imediata é que ela contém a terceira lei de Kepler para o movimento planetário, no caso especial de órbitas circulares, desde que podemos escrevê-la sob a forma

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3.$$

Note que a massa do planeta não é envolvida nesta expressão; $4\pi^2/GM_s$ é uma constante, comum a todos os planetas.

Quando são conhecidos o período T e o raio de revolução r de qualquer planeta, a Eq. 16-11 pode ser utilizada para determinar a massa do Sol. Por exemplo, o período de revolução da Terra é

$$T = 365 \text{ dias} = 3{,}15 \times 10^7 \text{s}$$

e o raio de sua órbita é

$$r = 150 \text{ milhões de km} = 1{,}5 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Portanto,

$$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\,\pi^2 \times (1{,}5 \times 10^{11}\text{ m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \times (3{,}15 \times 10^7\text{s})^2} \cong 2{,}0 \times 10^{30}\text{ kg},$$

isto é, a massa do Sol é cerca de 300.000 vezes maior que a massa da Terra. O erro cometido ao desprezar R, comparado com r, é pequeno, pois

$$R = \frac{m}{M_s} r = \frac{1}{300.000} r \simeq 480\text{ km}; \frac{R}{r} 100\,\% \simeq \frac{1}{3.000} \text{ de } 1\,\%.$$

De modo análogo, a massa da Terra pode ser determinada conhecidos o período e o raio da órbita da Lua em torno da Terra (ver Probl. 31).

Conhecidos a massa do Sol, M_s, e o período de revolução T de qualquer planeta em torno dele, o raio r da órbita do planeta em torno do Sol pode ser determinado pela Eq. 16-11. Desde que o período é facilmente obtido por observações astronômicas, tal método de determinar a distância de um planeta ao Sol é razoavelmente fidedigno.

A Eq. 16-11 é válida também para o movimento de um satélite artificial da Terra; M_s passa então a ser a massa da Terra, M_T.

A segunda lei de Kepler para o movimento planetário (ver Seç. 16-1) deve naturalmente ser válida para o caso de órbitas circulares. Nesse caso tanto ω como r são constantes, de forma que a linha tirada do Sol ao planeta descreve áreas iguais em tempos iguais. No entanto, para o caso de órbitas exatamente elípticas, ou para uma órbita qualquer, tanto r, como ω variam. Consideremos este caso.

A Fig. 16-10 representa uma partícula que gira ao redor de C, descrevendo uma órbita arbitrária. A área varrida pelo raio vetor em um intervalo de tempo Δt muito pequeno está sombreada na figura. Esta área, desprezando-se a pequena região triangular na extremidade, é igual aproximadamente a $\frac{1}{2}(r\,\omega\,\Delta t)\,r$. Quando $\Delta t \to 0$ esta expressão torna-se exata, pois o pequeno triângulo se

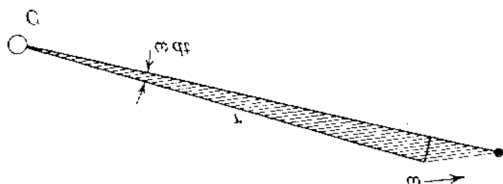


figura 16-10
Um cometa[12] percorrendo uma trajetória elíptica, estando o Sol C em um dos focos da elipse. No intervalo de tempo dt o cometa descreve um ângulo $d\theta = \omega dt$.

anula mais rapidamente do que o grande. Portanto, a taxa em que a área é descrita instantaneamente será

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot r\omega\Delta t \cdot r}{\Delta t} = \frac{1}{2}\omega r^2.$$

Ora, $m\omega r^2$ é o momento angular da partícula em relação a C. Logo, a segunda lei de Kepler, que afirma ser constante a taxa $\frac{1}{2}\omega r^2$ em que é varrida a área, é inteiramente equivalente à afirmativa de que *o momento angular de qualquer planeta em relação ao Sol permanece constante*. O momento angular da partícula em relação a C não pode ser alterado por uma força aplicada nele e dirigida para C. A segunda lei de Kepler, portanto, seria válida para qualquer *força central*, isto é, qualquer força dirigida para o Sol. A natureza exata desta força — como ela depende da distância entre os corpos ou de outras propriedades destes — não é revelada por essa lei.

É a primeira lei de Kepler que exige que a força gravitacional dependa exatamente do inverso do quadrado da distância entre os dois corpos ou, seja, de $1/r^2$. Somente uma força deste tipo pode assegurar que as órbitas planetárias sejam elipses e que o Sol ocupe um dos focos.

EXEMPLO 4

Um planeta orbita em torno do Sol numa órbita elíptica de excentricidade e. Determinar a razão entre o tempo gasto pelo planeta entre os extremos do eixo menor, quando mais próximo ao Sol, e o período de revolução.

Pela primeira lei de Kepler, o Sol ocupa um dos focos da elipse. (Na Fig. 16-11, a elipse mostrada tem uma excentricidade bem maior que a órbita de qualquer planeta no sistema solar.) O eixo maior (comprimento $2a$) e o eixo menor (comprimento $2b$) interceptam-se no centro C da elipse, e a distância CF do centro da elipse ao foco F é ea por definição de excentricidade. Notar que para uma órbita circular a excentricidade seria nula.

Seja T o período de revolução e t o tempo necessário para o planeta ir desde B até D, no trecho da elipse que se situa mais próximo ao Sol. Então, se A = área da elipse e A' = área hachurada, temos, pela conservação do momento angular (ou pelo princípio equivalente de que a taxa de varredura da área é constante),

$$\frac{A}{T} = \frac{A'}{t}.$$

Porém, $A' = \frac{1}{2}A - A''$, onde A'' = área do triângulo BDF. Portanto,

$$\frac{t}{T} = \frac{A'}{A} = \frac{\frac{1}{2}A - A''}{A} = \frac{1}{2} - \frac{A''}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}(2b)(ae)}{\pi ab}$$

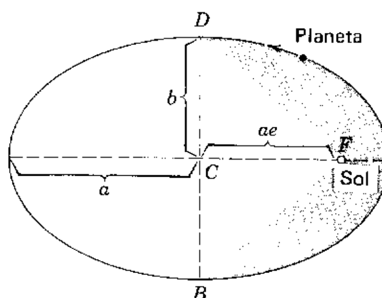


figura 16-11
Exemplo 4. Um planeta orbita em torno do Sol numa órbita elíptica.

[12] "The Nature of Comets" por Fred L. Whipple, em *Scientific American*, fevereiro, 1974, para uma fascinante discussão das propriedades e origem possíveis dos cometas.

e

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{2} - \frac{e}{\pi}.$$

Notar que esta expressão se reduz a 1/2, para uma órbita circular onde $e = 0$. Por que para órbitas elípticas a razão é menor que 1/2?

As leis de movimento e a lei de gravitação, todas devidas a Newton, estão em completa concordância com as observações astronômicas.[13] Em nosso cálculo, consideramos o movimento de um planeta em torno do Sol como um "problema de dois corpos". No entanto, vimos que o movimento do Sol poderia ser desprezado, sem perdermos alto grau de precisão, devido à grande relação entre a massa do Sol e a do planeta. Esta suposição reduz o problema ao do movimento de um corpo em torno de um centro de força. Se necessária maior precisão, teríamos de incluir no problema a massa do Sol (ver Probl. 28). Com efeito, para um tratamento exato teríamos de considerar o efeito de outros planetas e satélite sobre o movimento do Sol e do planeta focalizado. Este "problema de muitos corpos" é dificílimo, podendo entretanto ser resolvido com alto grau de precisão através de métodos aproximados. Os resultados de tais cálculos estão em excelente concordância com as observações astronômicas.

16-8 *O CAMPO GRAVITACIONAL*

O fato básico do fenômeno de gravitação é que duas massas exercem forças uma sobre a outra. Podemos pensar nisto como uma interação direta entre as duas massas; este é o ponto de vista denominado de *ação a distância*: as partículas interagem ainda que não estejam em contato. Outro ponto de vista é a do conceito de *campo*, que considera uma partícula como capaz de modificar de algum modo o espaço em torno dela, criando nele um *campo gravitacional*. Este campo atua por sua vez sobre qualquer outra partícula que penetre na região, exercendo sobre ela uma força gravitacional (atrativa). O campo, portanto, desempenha um papel intermediário em nosso modo de pensar sobre as forças entre partículas materiais. De acordo com este ponto de vista, nosso problema consiste de duas partes distintas: primeiro, devemos determinar o campo criado por determinada distribuição de partículas materiais; segundo, devemos calcular a força que este campo exerce sobre outra partícula material colocada nele.

Por exemplo, consideremos a Terra como massa isolada. Se um corpo for levado à vizinhança da Terra, uma força se exercerá nele. Tal força tem direção, sentido e módulo definidos em cada ponto do espaço: sua direção é radical, o sentido é do corpo para o centro da Terra e o módulo é mg. Podemos, portanto, associar a cada ponto próximo da Terra um vetor **g**, que é a aceleração que teria um corpo colocado nesse ponto. O vetor **g** é denominado *intensidade do campo gravitacional* no ponto em questão. Como

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \tag{16-12}$$

podemos definir a intensidade do campo gravitacional em qualquer ponto como a força gravitacional por unidade de massa nesse

[13] O eixo maior da órbita elíptica de Mercúrio gira ligeiramente mais depressa do que é previsto pela mecânica newtoniana, quando se considera a influência perturbadora dos outros planetas. O efeito é explicado pela teoria geral da relatividade.

ponto.[14] Calcula-se a força, a partir do campo, simplesmente multiplicando **g** pela massa *m* da partícula colocada no ponto.

O campo gravitacional é um exemplo de *campo vetorial*, a cada ponto do campo estando associado um vetor. Existem também campos escalares, tal como o campo de temperatura de um sólido condutor de calor. O campo gravitacional criado por uma distribuição fixa de matéria é também um exemplo de *campo estacionário*, pois o valor do campo em dado ponto não varia com o tempo.

O conceito de campo é particularmente útil para compreender as forças eletromagnéticas entre cargas elétricas móveis. Ele tem várias vantagens, tanto conceituais como práticas, em relação ao conceito de ação a distância. O conceito de campo não era utilizado na época de Newton, tendo sido desenvolvido muito mais tarde por Faraday para o eletromagnetismo e só então foi aplicado à gravitação. Posteriormente este ponto de vista foi adotado para a gravitação na teoria da relatividade geral. O objeto principal ao introduzi-lo aqui é dar ao estudante desde já alguma familiaridade com um conceito comprovadamente importante no desenvolvimento da Física.

EXEMPLO 5

No Cap. 15 deduzimos uma equação para o período de um pêndulo simples, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Lembrando que o campo gravitacional da Terra não é uniforme a grandes distâncias, como foi admitido para pequenas distâncias, qual o período máximo que poderia ter um pêndulo simples na vizinhança da superfície terrestre?

A equação $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, embora não aplicável quando g varia ao longo da trajetória do pêndulo, sugere que aumentemos o comprimento do pêndulo. Suponhamos infinito esse comprimento. A esfera do pêndulo percorreria então um arco de círculo de raio infinito, isto é, uma linha reta, como indica a Fig. 16-12. O campo gravitacional da Terra, em qualquer ponto, tem o sentido do centro da Terra, e portanto varia ao longo do arco. Suponhamos que a esfera de massa m tenha amplitude pequena comparada ao raio terrestre; ela estará sempre, portanto, à distância R_T, o raio da Terra, do centro desta com boa aproximação. A força F que atua em m é

$$F = \frac{GM_T m}{R_T^2} = mg,$$

sendo M_T a massa da Terra. Esta força, como indica a figura, está sempre dirigida para o centro da Terra. A componente do vetor força, ao longo de x, a linha de movimento da esfera, é

$$F_x = F\cos\theta = -F\frac{x}{R_T} = -\frac{GM_T m}{R_T^3}x.$$

o sinal negativo indicando que a força é oposta ao deslocamento a partir de $x = 0$. Podemos escrevê-la como

$$F_x = -kx,$$

sendo $k = GM_T m/R_T^3$ = constante.

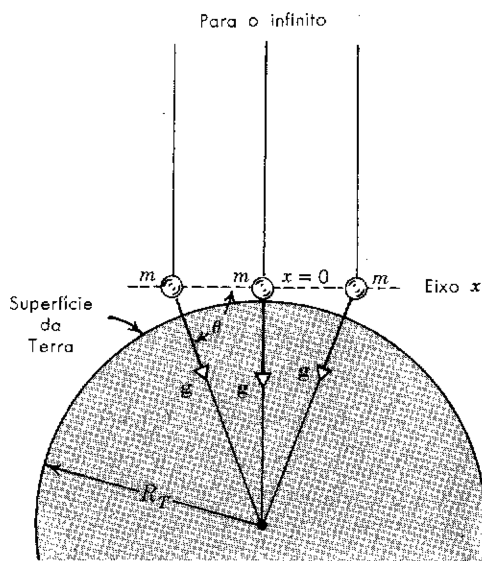


figura 16-12
Exemplo 5. Um pêndulo simples suspenso no infinito.

[14] Na Eq. 16-12*g* é definida como a força gravitacional por unidade de massa: num ponto *P* a uma distância *R* do centro de uma massa esfericamente simétrica *M*, é dada por GM/R^2. Este *g* difere do *g* cuja intensidade é dada nas Tabs. 16-1 e 16-2, nas quais, como o Exemplo 2 mostra, a aceleração centrípeta de um corpo que se move em torno da Terra já é levada em conta de modo que o que está descrito nessas tabelas é um *g efetivo*. Por exemplo, o *g* efetivo num satélite terrestre em órbita é zero, como se tem visto nas transmissões de televisão de tais satélites. Isto é porque GM/R^2 no Exemplo 2 é exatamente igual a a_R naquele exemplo. Todavia, o campo gravitacional no ponto onde se encontra o satélite orbitando, que é dado por GM/R^2, *não é nulo*.

A equação do período de um oscilador harmônico simples é $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, portanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{GM_T m/R_T^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{GM_T/R_T^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}},$$

pois g na superfície da Terra vale GM_T/R^2. Fazendo $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m e $g = 9{,}80$ m/s² obtém-se $T = 84{,}3$ min como o período máximo que um pêndulo simples pode ter na vizinhança da superfície terrestre. (Ver Questão 37.)

16-9 *ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL*

No Cap. 8 discutimos a energia potencial gravitacional de uma partícula (massa m) e a Terra (massa M). Consideramos apenas o caso particular de uma partícula que permanecesse próxima da Terra, podendo-se então supor que a força gravitacional atuante sobre a partícula fosse constante em qualquer posição dessa. Nesta seção vamos abandonar tal exigência e considerar distâncias Terra--partícula que podem ser consideravelmente maiores que o raio da Terra.

A Eq. 8-5b, que podemos escrever sob a forma

$$\Delta U = U_b - U_a = -W_{ab}, \qquad (8\text{-}5b)$$

define a variação ΔU da energia potencial de qualquer sistema em que atue uma força conservativa (por exemplo, a gravidade), quando o sistema muda da configuração a para a configuração b. W_{ab} é o trabalho realizado pela força conservativa quando o sistema varia.

A energia potencial do sistema, em qualquer configuração arbitrária b é (ver Eq. 8-5b):

$$U_b = -W_{ab} + U_a. \qquad (16\text{-}13)$$

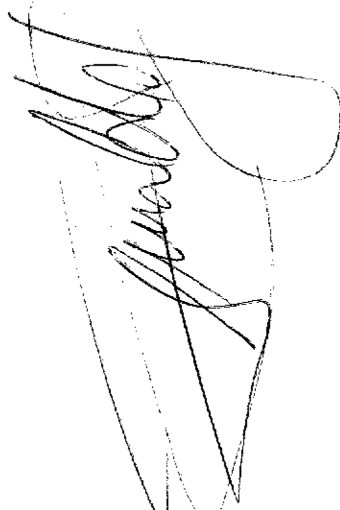
A fim de atribuir um valor a U_b, devemos escolher (arbitrariamente) a configuração a como a configuração de referência, por convenção, atribuindo a U_a um valor convencional, em geral zero.

No Cap. 8 escolhemos, como configuração de referência para o sistema Terra-partícula, aquele em que a partícula estava em repouso na superfície terrestre, atribuindo a tal configuração a energia potencial $U_a = 0$. Quando a partícula se encontrar à altura y acima da superfície da Terra, a energia potencial $U(= U_b)$ é dada pela Eq. 16-13 como

$$U = -W_{ab} + 0 = -(-mg)y = mgy.$$

A força conservativa em questão, a gravidade, está dirigida para baixo e tem valor $-mg$; o deslocamento da partícula, $+y$, está dirigido para cima, a partir do nível de referência, daí a diferença de sinal entre estas grandezas.

Para o caso mais geral, em que não é necessária a restrição $y << R$, sendo R o raio da Terra, é conveniente escolher outra configuração de referência, aquela em que a partícula e a Terra estão infinitamente distanciadas. Atribuímos então energia potencial nula ao sistema, nesta configuração. Portanto aí a configuração de



energia potencial nula é também a de força nula. Fazemos uma escolha semelhante ao definir a configuração de energia nula de uma mola como a configuração em que ela está em seu comprimento normal, não-distendida, caso em que a força restauradora é nula.

Quando a partícula de massa m se encontra a distância r do centro da Terra, a energia potencial do sistema é dada, conforme a Eq. 16-13, como

$$U(r) = -W_{\infty r} + 0, \tag{16-14}$$

sendo $W_{\infty r}$ o trabalho realizado pela força conservativa (gravidade) sobre a partícula, quando esta se move desde o infinito até a distância r do centro da Terra. Por simplicidade supomos, provisoriamente, que a partícula se mova para a Terra seguindo uma direção radial. A força gravitacional $F(r)$ que atua na partícula (supondo $r \geqslant R$) será então $-GMm/r^2$, o sinal negativo indicando uma força atrativa, isto é, uma força que puxa a partícula para a Terra. Podemos então determinar $U(r)$ a partir da Eq. 16-14 como

$$\begin{aligned} U(r) &= -W_{\infty r} = -\int_{\infty}^{r} F(r)\,dr \\ &= -\int_{\infty}^{r}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr = -\frac{GMm}{r}\bigg|_{\infty}^{r} \\ &= -\frac{GMm}{r}. \end{aligned} \tag{16-15}$$

O sinal negativo indica que a energia potencial é negativa a qualquer distância finita, ou seja, a energia potencial é nula no infinito e decresce com a diminuição da distância. Isto corresponde ao fato de ser atrativa a força gravitacional exercida pela Terra sobre a partícula. Quando esta se move desde o infinito, o trabalho $W_{\infty r}$ realizado por esta força sobre a partícula é positivo, significando, de acordo com a Eq. 16-14, que $U(r)$ é negativa.

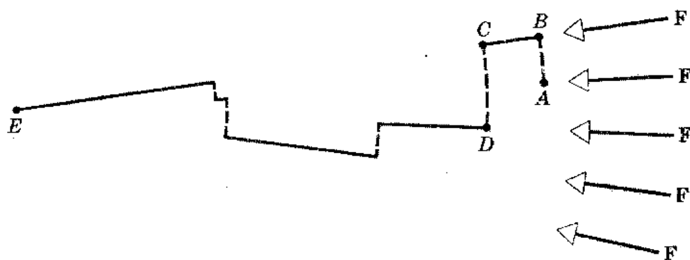


figura 16-13
O trabalho realizado ao transportar a massa de A até E independe da trajetória.

A Eq. 16-15 é válida qualquer que seja a trajetória da partícula ao mover-se desde o infinito até ao raio r. Isto pode ser evidenciado quando substituímos uma trajetória arbitrária por uma poligonal cujos lados têm, alternadamente, a direção de um raio ou a direção perpendicular a este, os últimos sendo infinitesimais (Fig. 16-13). Nenhum trabalho é realizado ao longo dos segmentos perpendiculares tais como AB, pois nesses trechos a força é perpendicular ao deslocamento. Porém o trabalho realizado ao longo das porções

radiais da trajetória, tais como BC, adiciona-se ao trabalho produzido quando é seguida uma trajetória radial, tal como AE. O trabalho realizado ao mover a partícula entre dois pontos, em um campo gravitacional, é portanto independente da trajetória real que liga tais pontos. A força gravitacional é portanto *conservativa.*

A Eq. 16-15 mostra que a energia potencial das partículas M e m é uma característica do sistema $M + m$. A energia potencial é uma propriedade do *sistema* de corpos e não de qualquer deles isoladamente; ela varia se M ou m for deslocado, pois cada uma encontra-se no campo gravitacional do outro. Tampouco tem sentido atribuir parte da energia potencial a M e parte a m. Freqüentemente, entretanto, *fala-se* da energia potencial do corpo m (por exemplo, planeta ou pedra) no campo gravitacional de outro corpo de massa muito maior (o Sol ou a Terra, respectivamente). A justificativa desse modo de falar — como se a energia potencial pertencesse apenas ao planeta ou à pedra — é a seguinte: quando a energia potencial do sistema de dois corpos transforma-se em energia cinética, o corpo mais leve adquire a maior parte desta. O Sol possui massa tão superior à de qualquer planeta que a energia cinética que ele adquire é desprezível; o mesmo pode ser dito em relação à pedra, no sistema pedra-Terra.

A força gravitacional pode ser deduzida da expressão da energia potencial. A relação, para funções energia potencial que apresentem simetria esférica, é $F = -dU/dr$, conforme a Eq. 8-7; é a relação recíproca da Eq. 16-15. Obtém-se dela:

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}, \qquad (16\text{-}16)$$

o sinal negativo significando que a força é atrativa, dirigida para dentro, ao longo do raio, e oposta ao vetor deslocamento radial.

Podemos associar um campo escalar à gravitação. Primeiro define-se o *potencial gravitacional V* como a *energia potencial por unidade de massa* do corpo colocado no campo gravitacional. Neste caso,

$$V = \frac{U(r)}{m} = -\frac{GM}{r}. \qquad (16\text{-}17)$$

Associado a cada ponto do espaço que circunda a massa M tem-se portanto um número, o potencial gravitacional. Para determinar a força exercida pelo campo sobre uma partícula de massa m colocada nele basta calcular $-dV/dr$ no ponto em questão e multiplicá-la por m. O módulo da força é $-m\,dV/dr$, sua direção é radial e seu sentido da periferia para o centro de força, M.

EXEMPLO 6

Velocidade de escape. Podemos determinar facilmente a energia potencial gravitacional de uma partícula de massa m na superfície da Terra como $U(R) = -GM_Tm/R_T$, de acordo com a Eq. 16-15. A quantidade de trabalho necessária para mover um corpo da superfície terrestre até uma distância infinita é GM_Tm/R_T, cerca de $6{,}0 \times 10^7$ joules/kg. Se um projétil puder adquirir uma energia maior que esta, na superfície da Terra, então, desprezando a resistência da atmosfera, ele escaparia de nosso planeta para não mais retornar. A proporção que ele se afastasse, sua energia cinética diminuiria, aumentando ao mesmo tempo sua energia potencial, mas sua velocidade nunca se anularia. A velocidade inicial crítica, denominada velocidade de escape, v_0, tal que o projétil não retorne, é dada por

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GM_Tm}{R_T}$$

ou seja,

$$v_0 = \sqrt{2\,\frac{GM_T}{R_T}} = 11{,}2\,\text{km/s} = 40.300\,\text{km/h}.$$

Esta deve ser a velocidade inicial de um projétil para que ele escape da Terra. Se a velocidade inicial for menor ele voltará; sua velocidade será nula a alguma distância finita da Terra, a partir de onde o projétil voltará a nosso planeta.[15]

As moléculas mais leves da atmosfera superior da Terra podem alcançar velocidades suficientemente elevadas, devido à agitação térmica, e escapar para o espaço exterior. O gás hidrogênio, que deve ter estado presente em nossa atmosfera longo tempo atrás, atualmente desapareceu dela. O gás hélio escapa a uma taxa constante grande parte sendo fornecida pela desintegração radioativa da crosta terrestre. A velocidade de escape no Sol é demasiadamente grande para que haja escapamento de hidrogênio de sua atmosfera. Por outro lado, a velocidade de escape da Lua é tão pequena que ela não pode manter uma atmosfera (ver Probl. 42).

16-10 *ENERGIA POTENCIAL PARA SISTEMAS DE MUITAS PARTÍCULAS*

Sendo r a distância entre duas partículas, sua energia potencial é dada, conforme a Eq. 16-14, como

$$U(r) = -W_{\infty r}, \qquad (16\text{-}14)$$

sendo $W_{\infty r}$ o trabalho realizado *pela força gravitacional* quando as partículas, se movem desde uma separação infinita até a distância r. Vejamos agora nova interpretação de $U(r)$.

Equilibremos a força gravitacional por uma *força externa*, aplicada por algum agente externo, de modo que, a qualquer instante, esta força externa seja igual e oposta à força gravitacional para cada partícula. O trabalho realizado pela força *externa*, quando as partículas se movem da distância infinita até a distância r, não é $W_{\infty r}$ mas $-W_{\infty r}$, pois os deslocamentos são idênticos mas as forças são iguais e opostas. Podemos portanto interpretar a Eq. 16-14 como significando que *a energia potencial de um sistema de partículas é igual ao trabalho que deve ser realizado por um agente externo para formar o sistema, a partir da configuração de referência.*

Portanto, se você deslocar uma pedra até a altura y acima da superfície da Terra, será você o agente externo (separando a pedra da Terra) e o trabalho que realizar para "formar o sistema" é $+mgy$, que é também a energia potencial. Analogamente, o trabalho realizado *pelo agente externo* quando o corpo de massa m se move desde o infinito até a distância r da Terra é *negativo* porque o agente deve exercer uma força "restritiva" sobre o corpo; isto está de acordo com a Eq. 16-14.

Estas considerações são válidas para sistemas constituídos de mais de duas partículas. Consideremos três corpos de massas m_1, m_2 e m_3; suponhamos que inicialmente as distâncias entre eles sejam infinitas. O problema é determinar o trabalho realizado por um agente externo para reuni-los nas posições indicadas na Fig. 16-14. Suponhamos que primeiro m_2 seja aproximado de m_1, desde a distância infinita até a distância $\mathbf{r}_{12}$; o trabalho realizado contra a força gravitacional exercida por m_1 sobre m_2 é $-Gm_1m_2/r_{12}$. Suponhamos a seguir que m_3 seja trazido do infinito a distância $\mathbf{r}_{13}$

[15] Ignoramos as forças exercidas por outros corpos além da Terra. As distâncias suficientes grandes de nosso planeta, devem ser consideradas as forças gravitacionais exercidas pela Lua, pelos planetas, Sol etc., não sendo válido por isso o resultado simples para o caso de "dois corpos". Um projétil pode escapar da Terra sendo capturado por outro corpo astronômico. Este é um exemplo de casos com "muitos corpos".

de m_1 e r_{23} de m_2; o trabalho realizado contra a força gravitacional exercida por m_1 sobre m_3 é $-Gm_1m_3/r_{13}$ e contra a força gravitacional exercida por m_2 sobre m_3 é $-Gm_2m_3/r_{23}$. O trabalho total realizado para formar o sistema é a sua energia potencial total:

$$-\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{13}}+\frac{Gm_1m_3}{r_{13}}+\frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

Note que nenhuma operação vetorial é necessária nesse procedimento.

Não importa como o sistema seja formado, isto é, qualquer que seja o modo como os corpos se movam ou a trajetória que eles sigam, obtém-se sempre o mesmo trabalho para que os corpos se reúnam na configuração da Fig. 16-14, a partir da separação infinita original. A energia potencial, portanto, deve estar associada com o sistema e não com qualquer dos corpos que o constituem. Se quiséssemos novamente separar o sistema em três massas isoladas, teríamos de fornecer a energia

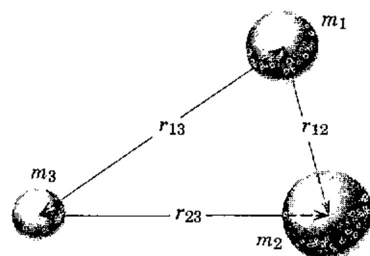


figura 16-14
Três massas m_1, m_2 e m_3 reunidas a partir do infinito.

$$+\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}+\frac{Gm_1m_3}{r_{13}}+\frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right),$$

que pode ser interpretada como uma espécie de energia de ligação, que mantém as partículas materiais reunidas na configuração indicada.

Tal como podemos associar a energia potencial elástica à configuração distendida ou comprimida de uma mola ligada a uma partícula, podemos também associar a energia potencial gravitacional à configuração de um sistema se partículas materiais reunidas por forças gravitacionais. De modo análogo, se quisermos pensar na energia potencial elástica de uma partícula como armazenada na mola, também podemos considerar a energia potencial gravitacional como armazenada no campo gravitacional do sistema de partículas. Uma modificação em qualquer configuração resulta em variação da energia potencial.

Estes conceitos reaparecem quando se consideram forças de origem elétrica ou magnética ou mesmo nuclear. Sua aplicação em Física é muito ampla. A vantagem do conceito de energia, em relação ao método dinâmico, resulta do fato de que no primeiro caso utilizam-se grandezas e operações escalares, enquanto o método dinâmico requer grandezas e operações vetoriais. Quando as forças em jogo são desconhecidas, como acontece em Física Nuclear, o método da energia é essencial.

EXE...

Qual a energia de ligação do sistema Terra-Sol? Desprezar a presença de outros planetas e satélites.

Suponhamos, por simplicidade, que a órbita da Terra em torno do Sol seja circular, de raio r_{TS}. O trabalho realizado contra a força gravitacional para trazer a Terra desde o infinito até a distância r_{TS} do Sol é

$$-G\frac{M_SM_T}{r_{TS}}\cong -5{,}0\times 10^{33}\text{ joules},$$

tomando-se $M_S \cong 330.000\, M_T$, $M_T = 6{,}0\times 10^{24}$ kg, $r_{TS} = 150\times 10^9$ m. O sinal negativo indica que a força é atrativa, portanto o trabalho é realizado pela força gravitacional. Uma quantidade de trabalho idêntica seria realizada por um agente externo

para separar completamente estes corpos, partindo do repouso. Como a energia cinética da Terra em sua órbita é a metade do módulo da energia potencial do sistema Terra-Sol, apenas metade deste trabalho é necessário para romper o sistema, logo a energia efetiva de ligação, supondo que o sistema Terra-Sol esteja em repouso após a ruptura, é de cerca de $2{,}5 \times 10^{33}$ joules.

Que efeito teria a presença da Lua e de outros planetas na energia de ligação da Terra com o sistema solar?

16-11 *CONSIDERAÇÕES DE ENERGIA NO MOVIMENTO DE PLANETAS E SATÉLITES*

Consideremos de novo o movimento de um corpo de massa m (por exemplo, planeta ou satélite), em torno de um corpo maciço de massa M (digamos, o Sol ou a Terra). Suporemos que M esteja em repouso em um referencial inercial e que m descreve uma trajetória circular. A energia potencial do sistema é

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

sendo r o raio da órbita circular. A energia cinética do sistema é

$$K = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2,$$

por estar o Sol em repouso. Pela equação precedente à Eq. 16-11 obtemos

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r},$$

logo

$$K = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}.$$

A energia total será

$$E = K + U = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}. \qquad (16\text{-}18)$$

A energia é constante e negativa. Ora, a energia cinética nunca pode ser negativa, mas de acordo com a Eq. 16-18 vemos que ela pode anular-se, quando a distância tende ao infinito. A energia potencial é sempre negativa, exceto no infinito, quando se anula. O significado de a energia total ser negativa, portanto, é que o sistema é fechado, o planeta m permanecendo ligado ao centro atrativo solar M, do qual não escapa nunca (Fig. 16-15).

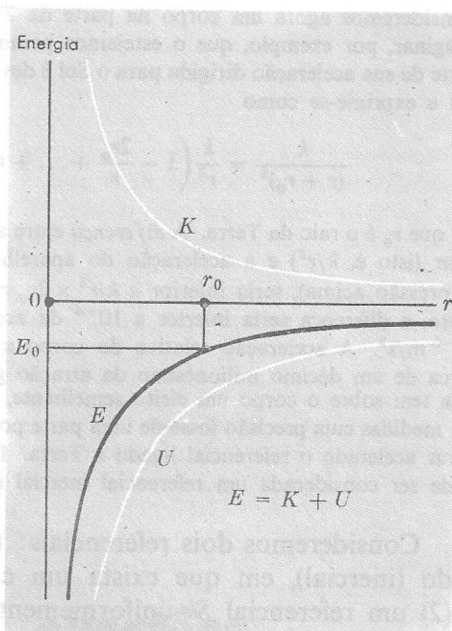


figura 16-15
A energia cinética K, a energia potencial U e a energia total $E = U + K$, de um corpo em movimento circular planetário. Um planeta com energia total $E_0 < 0$ permanecerá em uma órbita de raio r_0. Quanto mais afastado do Sol estiver o planeta, maior (isto é, menos negativa) é sua energia total E (constante). Para escapar do centro de força e ainda possuir energia cinética no infinito, ele necessitaria energia total positiva.

Mesmo quando se consideram órbitas elípticas, em que r e ω variam, a energia total continua negativa e constante, correspondendo ao fato de que as forças gravitacionais são conservativas. Conseqüentemente, tanto a energia total como o momento angular total são constantes no movimento planetário; tais grandezas são freqüentemente denominadas *constantes do movimento.* Obtém-se a órbita real de um planeta em relação ao Sol partindo dessas leis de conservação e eliminando a variável tempo pela aplicação das leis da dinâmica e da gravitação. O resultado é que as órbitas planetárias são elípticas.

Nas primitivas teorias do átomo, como na teoria de Bohr para o átomo de hidrogênio, relações mecânicas idênticas são utilizadas para descrever o movimento de um elétron em redor do centro nuclear atrativo. Essas mesmas relações são usadas no caso de órbita abertas (energia total positiva), como nas experiências de Rutherford sobre o espalhamento de partículas nucleares carregadas. As forças centrais, e particularmente as de quadrado inverso, são encontradas freqüentemente em sistemas físicos.

16-12 *A TERRA COMO REFERENCIAL INERCIAL*

Ao descrever as experiências fundamentais para as definições de força e de massa, tivemos de supor um referencial inercial em relação ao qual pudessem ser medidas as acelerações. Se o próprio referencial estivesse acelerado ao acaso, não seriam observadas quaisquer regularidades nas medidas das acelerações. Em realidade, as experiências são executadas em laboratórios situados em um referencial ligado à Terra. Já discutimos o efeito, sobre nossas medidas, da rotação da Terra em torno do próprio eixo. Qual o efeito do movimento da Terra, como todo, ao redor do Sol, ou de outro corpo celeste?

A aceleração da Terra em relação ao Sol é $\omega^2 r$, ou cerca de 6×10^{-3} m/s^2. Pode parecer, à primeira vista, que esta aceleração, embora pequena, seja capaz de alterar as experiências que envolvam forças diminutas. Este não é o caso, entretanto, como se deduz da universalidade da lei de gravitação. Não apenas a Terra como também as massas que usamos em nossos aparelhos são acelerados para o Sol praticamente do mesmo modo.

Calculemos o erro cometido quando se despreza a aceleração orbital da Terra, cujo valor é k/r^2, sendo r a distância entre os centros da Terra e do Sol, e $k = GM_s$. Consideremos agora um corpo na parte da Terra mais distante do Sol; podemos imaginar, por exemplo, que o estejamos pesando com um dinamômetro. Então, a parte de sua aceleração dirigida para o Sol é devida à atração gravitacional do próprio Sol e exprime-se como

$$\frac{k}{(r + r_0)^2} = \frac{k}{r^2}\left(1 - \frac{2r_0}{r} + \ldots + \text{termos muito menores}\right),$$

em que r_0 é o raio da Terra. A *diferença* entre a aceleração da Terra devida à atração solar (isto é, k/r^2) e a aceleração do aparelho, também devida à atração do Sol (expressão acima), seria inferior a $k/r^2 \times 2r_0/r$. Porém $2r_0/r$ é cerca de 10^{-4}; portanto, a diferença seria inferior a 10^{-4} da aceleração da Terra, isto é, menor que 10^{-6} m/s^2. A aceleração relativa do corpo e da Terra, devida à atração solar, é cerca de um décimo milionésimo da atração gravitacional do corpo pela Terra. A Lua tem sobre o corpo um efeito semelhante, de valor análogo. Portanto, somente em medidas cuja precisão fosse de uma parte por milhão haveria necessidade de considerar acelerado o referencial ligado à Terra. Em quase todas as aplicações a Terra pode ser considerada um referencial inercial suficientemente bom.

16-13 *O PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA*

Consideremos dois referenciais: (1) um referencial S não-acelerado (inercial), em que exista um campo gravitacional uniforme, e (2) um referencial S' uniformemente acelerado em relação a um referencial inercial mas em que não exista campo gravitacional. Em sua teoria geral da relatividade, Albert Einstein demonstrou que os dois referenciais são exatamente equivalentes do ponto de vista físico, isto é, experiências realizadas sob as mesmas condições nos dois referenciais forneceriam os mesmos resultados. Este é o *princípio de equivalência.*

Suponhamos que uma nave espacial esteja em repouso em um referencial inercial S, onde exista um campo gravitacional uniforme, digamos, a superfície da Terra. Dentro da nave os objetos abandonados a si próprios, tal como uma maçã, cairão com determinada aceleração no campo gravitacional, por exemplo **g**; os objetos que estejam em repouso — tal como um astronauta sentado no chão ou um objeto

dependurado em um dinamômetro preso ao teto do veículo — estarão sob o efeito de uma força, exercida respectivamente pelo chão e pela mola, força essa oposta ao peso dos objetos.

Suponhamos agora ligados os foguetes propulsores e que a nave alcance uma região onde não exista campo gravitacional. Seja $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ a aceleração da nave, considerada como novo referencial S'; a aceleração é referida ao referencial inercial S, isto é, a nave afasta-se da Terra com movimento acelerado, ultrapassando a região em que o campo gravitacional da Terra (ou outro qualquer) seja apreciável. As condições dentro da nave serão então semelhantes às que existem em uma nave que esteja em repouso na superfície da Terra. Dentro da nave, se o astronauta larga uma maçã, esta será acelerada para baixo, em relação ao veículo, com aceleração $\mathbf{g}$. Com efeito, desde que todos os corpos não sujeitos a forças se movem com velocidade uniforme, relativamente ao referencial inercial S, todos esses corpos parecerão cair com *a mesma* aceleração $\mathbf{g}$ em relação à nave, referencial S'. Ademais, os objetos que pareçam em repouso relativamente ao veículo — tais como um astronauta sentado no chão ou um objeto dependurado de um dinamômetro preso ao teto — experimentarão forças indistinguíveis das que equilibraram seus pesos no caso de a nave estar em repouso em um campo gravitacional existente em S.

Com efeito, se o astronauta não soubesse que os foguetes estão acelerando sua nave desde S, ele teria razão em concluir que se encontrava em um campo gravitacional — um campo capaz de acelerar e fazer cair a maçã em S', exigindo uma força equivalente sobre o objeto dependurado no dinamômetro (a tensão da mola) e outra sobre o astronauta (a força normal do piso), a fim de mantê-los em repouso no referencial S'. O astronauta simplesmente não conseguiria dizer a diferença, a partir de observações em seu próprio referencial, entre uma situação em que sua nave fosse acelerada em relação a um referencial inercial, numa região desprovida de campo gravitacional, e uma situação em que a nave espacial não estivesse acelerada em um referencial no qual houvesse um campo gravitacional. As duas situações são exatamente equivalentes.

Einstein mostrou que, a partir do princípio de equivalência, não se pode falar em aceleração absoluta de um referencial mas apenas de aceleração relativa, tal como da teoria especial da relatividade, segue-se a impossibilidade de falar em velocidade absoluta de um referencial, só tendo sentido a velocidade relativa. Segue-se também do princípio de equivalência a igualdade das massas inercial e gravitacional. Todos os corpos sobre os quais não atuem quaisquer forças terão velocidade uniforme em relação a um referencial inercial, não importando quais sejam suas massas inerciais, e portanto terão todos a mesma aceleração em relação a um referencial acelerado. Logo, de acordo com o princípio de equivalência de S e S', todos os corpos cairiam com a mesma aceleração em um campo gravitacional homogêneo.

Vemos, por essa discussão, que um campo gravitacional uniforme pode ser imitado por um "campo de aceleração". Com efeito, um campo gravitacional uniforme pode ser "transformado" passando a um referencial acelerado no sentido do campo. Neste novo referencial, uma partícula cujo movimento estivesse originalmente sujeito a um campo gravitacional é agora uma partícula livre. Por exemplo, em um satélite artificial da Terra uma maçã largada por um astronauta não cairá em relação ao satélite e o próprio astrônauta não estará sujeito às forças que contrariavam a atração da gravidade antes do lançamento, por isso ele se sente imponderável. Em geral, no entanto, os campos gravitacionais, tais como o da Terra, não são uniformes no espaço, por isso não podem ser substituídos simplesmente passando a um único referencial acelerado em relação à fonte do campo. Seria necessário um referencial acelerado diferente em cada ponto do espaço para imitar todo o campo gravitacional.

questões

1. A astronomia moderna de observação e os procedimentos de navegação utilizam o ponto de vista geocêntrico (ou ptolomaico), utilizando a "esfera celeste" girante. Isto é errado? Em caso contrário, que critério determina o sistema (copernicano ou ptolomaico) a ser utilizado? Quando deve utilizar-se o sistema heliocêntrico (ou copernicano)?
2. Se a força de gravidade atua sobre todos os corpos, proporcionalmente às suas massas, por que um corpo pesado não cai mais depressa que um corpo leve?
3. Como varia o peso de um corpo quando ele percorre a distância da Terra à Lua? E sua massa?
4. Dá-se um golpe horizontal, de martelo em um objeto suspenso livremente na superfície da Terra. O objeto é levado para Lua, suspenso livremente e recebe o mesmo golpe horizontal com o mesmo martelo. Como estão relacionadas as velocidades horizontais resultantes na Terra e na Lua?

5. Um newton de açúcar conteria maior quantidade dessa substância no pólo que no equador? E um quilograma de açúcar?
6. Qual é, aproximadamente, a força de atração *gravitacional* entre um homem e uma mulher de compleições normais quando eles estão a 10 m de distância? E quando eles estão dançando? Compare os seus resultados com pesos típicos de pessoas.
7. A concentração da massa da Terra na proximidade de seu centro modifica a variação de g com a altura, em comparação com uma esfera homogênea? Como?
8. O Rio Tocantins nasce a uns 14° abaixo do equador, desaguando no mar a cerca de 2° dele. Como o raio da Terra é maior no equador do que nas nascentes daquele rio, estas estão mais próximas do centro da Terra. Explique como o rio pode "subir montanha".
9. A Terra é um esferóide oblato devido ao efeito "achatador" de sua rotação. Um grau de latitude é maior ou menor nos pólos do que no equador? Por quê?
10. Por que podemos conhecer melhor a forma da Terra estudando o movimento de um satélite artificial do que o da Lua?
11. Como pode ser determinada a massa da Lua?
12. Um relógio está baseado em uma mola oscilante e outro em um pêndulo. Ambos são levados a Marte. Eles marcarão o mesmo tempo que na Terra? Concordarão entre si? Explique. A massa e o raio de Marte são respectivamente um décimo e a metade da massa e do raio da Terra.
13. De acordo com a segunda lei de Kepler e com as observações do movimento do Sol, visto da Terra, conclui-se que nosso planeta está mais próximo do Sol durante o inverno (no hemisfério Norte) do que no verão. Explique por que não é mais frio no verão do que no inverno (do hemisfério Norte)?
14. A lei de gravitação universal exige que os planetas do sistema solar tenham as órbitas conhecidas? Os planetas de outra estrela semelhante ao Sol teriam as mesmas órbitas? Sugira fatores que poderiam ter determinado as órbitas especiais conhecidas.
15. Como a velocidade orbital de um planeta se relaciona com o raio de sua órbita (suposta circular)?
16. A força gravitacional exercida pelo Sol sobre a Lua é cerca de duas vezes maior que a força gravitacional exercida nela pela Terra. Por que a Lua não escapa da Terra, por exemplo, durante um eclipse solar?
17. Explique por que está errado o seguinte raciocínio: "O Sol atrai todos os corpos situados na Terra. À meia-noite, quando o Sol está diametralmente abaixo, ele atrai um objeto no mesmo sentido que a Terra; ao meio-dia, quando o Sol está diretamente acima, sua atração sobre o objeto tem sentido oposto à da Terra. Portanto, todos os objetos seriam mais pesados à meia-noite (ou de noite) do que ao meio-dia (ou de dia)?
18. A atração gravitacional do Sol e da Lua sobre a Terra produz as marés. O efeito do Sol nas marés é aproximadamente a metade do efeito da Lua. A atração do Sol sobre a Terra, no entanto, é cerca de 175 vezes maior. Por que então a Lua provoca maiores marés?
19. Se as marés lunares diminuem a rotação da Terra (devido ao atrito) o momento angular da Terra decresce. Que acontece ao movimento da Lua, em conseqüência da conservação do momento angular? O Sol e as marés solares têm alguma influência nessa situação? (Veja "Tides and Earth-Moon System" por Peter Goldreich, *Scientific American*, abril, 1972 e "Tides of the British Seas" por Frank Sandon em *Physics Education*, junho, 1975.)
20. Deve esperar-se que a energia total do sistema solar seja constante? E o momento angular total? Explique suas respostas.
21. Discuta como variará o período de um pêndulo simples que faz parte do equipamento que um foguete impulsionará da Terra até uma órbita estável para um satélite da Terra.
22. Um foguete realmente necessita alcançar a velocidade inicial de 40.000 km/h para escapar da Terra?
23. Os objetos em repouso sobre a superfície da Terra descrevem órbitas circulares com período de 24 horas. Eles estão "em órbita" no mesmo sentido que um satélite artificial da Terra? Por que não? Qual deveria ser a duração do "dia" para que tais objetos estivessem realmente em órbita?
24. Um satélite artificial da Terra abandona um pacote. Desprezando os efeitos da resistência do ar, determine se o pacote atingirá a Terra e em caso afirmativo,

onde, em um ponto à frente, diretamente abaixo ou atrás do satélite no instante do impacto, ou diretamente sob o satélite no momento do abandono?

25. Desprezando o atrito com o ar e dificuldades técnicas, um satélite poderia ser colocado em órbita se fosse disparado da superfície da Terra por um enorme canhão? Explique.

26. Um satélite pode mover-se em uma órbita estável cujo plano não passe pelo centro da Terra? Explique.

27. Dois satélites descrevem órbitas circulares em um plano equatorial próximas da Terra; um se move no sentido leste-oeste e o outro no sentido oposto. Um observador terrestre notaria diferença entre os períodos dos dois satélites

28. Depois do lançamento do Sputnik I foi informado que ele não retornaria à Terra, queimando-se ao *descer*. Como isso é possível, se ele não se queimou ao *subir*?

29. Em que caso os astronautas experimentam maior aceleração, quando são lançados em órbita ou no retorno à Terra?

30. Mostrar que a velocidade de um satélite pode aumentar quando sua altitude diminui, isto é, mostrar que, se as forças de atrito diminuem a energia total do satélite, este se moverá em uma órbita mais próxima da Terra e sua energia cinética pode aumentar.

31. Um satélite artificial descreve uma órbita circular em torno da Terra. Como se modificará sua órbita se um de seus foguetes for momentaneamente lançado (*a*) no sentido da Terra, (*b*) no sentido oposto, (*c*) para a frente, (*d*) para trás, (*e*) normalmente ao plano da órbita?

32. Dentro de uma nave espacial, que dificuldades haveria para caminhar? Para pular? Para beber?

33. A televisão tem transmitido imagens de satélites artificiais em órbita e de objetos flutuando com gravidade efetiva nula. Suponha que um astronauta que está se segurando no arcabouço do satélite, dá um pontapé em uma bola de boliche que flutua Ele machucará seu pé? Explique.

34. Se um planeta de determinada massa específica se tornasse maior, sua força de atração sobre objetos, em sua superfície aumentaria, devido à maior massa, mas decresceria devido à maior distância entre o objeto e o centro do planeta. Que efeito predominaria?

35. Considere uma casca esférica oca. Qual a relação entre o potencial gravitacional dentro e fora da superfície? Qual a intensidade do campo gravitacional no interior?

36. Uma pedra é lançada na direção do centro do poço de uma profunda mina vertical. Suponha não haver resistência do ar mas considere a rotação da Terra. A pedra continua a mover-se na direção do centro do poço? Em caso negativo, descreva seu movimento.

37. Use argumentos qualitativos para explicar por que os quatro períodos seguintes são iguais (todos têm 84 min, supondo a densidade da Terra uniforme): (*a*) tempo de revolução de um satélite pouco acima da superfície da Terra; (*b*) período de oscilação de um objeto em um túnel na terra; (*c*) período de um pêndulo simples tendo um comprimento igual ao raio da Terra em um campo uniforme de 9,8 N/kg; (*d*) período de um pêndulo simples infinito no campo gravitacional real da Terra.

38. O ponto de vista de "ação a distância" da força gravitacional implica em ação instantânea. Na realidade, a teoria física vigente supõe que a gravitação se propaga com velocidade finita e isto é levado em conta na modificação da física clássica representada pela teoria geral da relatividade. (Veja Gravitational Waves — a Progress Report", de Jonathan L. Logan, em *Physics Today*, março, 1973, para discussão das idéias e tentativas para verificação experimental.) Que aconteceria a demonstrações clássicas se fosse considerado que a ação não é instantânea? (Veja também "Infinite Speed of Propagation of Gravitation in Newtonian Physics", de I. J. Good, *American Journal of Physics*, julho, 1975.)

39. A gravidade pode ser considerada uma força "fictícia" proveniente da aceleração do observador em relação a um referencial inercial, e não uma força "real"?

problemas

SEÇÃO 16-2

1. Escreva a dimensão da constante da gravitação universal G.

2. Como se relaciona a dimensão de G com a dimensão da aceleração da gravidade g? *Resposta:* $[G] = [g]\, M^{-1}L^2$.

3. Sabendo que $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ no sistema MKS, obtenha o valor de G no sistema CGS.
4. A distância entre a Terra e o Sol é dada por $r_s = 1{,}5 \times 10^{11}$ m e a massa do Sol M_s é relacionada com a massa da Terra M_T através da equação: $M_s = 3{,}24 \times 10^5 M_T$. A que distância da Terra a força de atração da Terra sobre um corpo de massa m é igual a 4 vezes a força de atração gravitacional entre este corpo e o Sol? *Resposta:* $1{,}3 \times 10^8$ m.

SEÇÃO 16-3

5. Mostre que, no vácuo, todos os corpos caem com a mesma aceleração, independentemente das respectivas massas.
6. Obtenha uma expressão para se calcular o valor de g na superfície terrestre em função de G, da massa da Terra M_T e do raio da Terra R_T. *Resposta:* $g = GM_T/R_T^2$.
7. Calcule a variação total da aceleração da gravidade na superfície terrestre desde a configuração de um eclipse total do Sol até uma configuração em que a Lua se encontra no lado da Terra diametralmente oposto ao Sol (eclipse da Lua). Considere a distância entre a Terra e a Lua e a distância entre a Terra e o Sol constantes; use os dados do Apêndice C.
8. Usando os valores do raio da Terra no Equador e nos Pólos e outros dados do Apêndice, calcule o valor de g: (*a*) no Equador, (*b*) nos Pólos. Não leve em consideração a rotação da Terra. *Resposta:* (*a*) 9,805 m/s^2. (*b*) 9,870 m/s^2.

SEÇÃO 16-4

9. Obtenha uma expressão para a determinação da variação de g com a altura h acima da superfície terrestre para h muito menor do que R_T.
10. Qual é o valor exato de g a uma altura h acima da superfície terrestre? *Resposta:* $g = GM_T/(R_T + h)^2$.
11. Calcule o valor de g na superfície da Lua. Use dados do Apêndice C.
12. Determine a distância entre o centro da Terra e um ponto para o qual a aceleração da gravidade assume o valor $g = 4{,}0$ m/s^2. *Resposta:* $r = 1{,}0 \times 10^7$ m.
13. O chamado "pêndulo de segundos", na Terra, possui um período $T = 2$ s. Qual seria o valor deste período na superfície da Lua?
14. Considere uma partícula livre situada sobre a linha equatorial da superfície de um astro de raio R que gira com velocidade angular ω. Ache a massa mínima deste astro para que a partícula não seja centrifugada da superfície do astro. *Resposta:* $M = \omega^2 R^3/G$.
15. Foi chamada atenção do fato de que g varia de lugar para lugar sobre a superfície da Terra quando Jean Richer, em 1672, levou um relógio de pêndulo de Paris para Caiena, na Guiana Francesa, e descobriu que o relógio atrasava 2,5 min/dia. Se $g = 9{,}81$ m/s^2 em Paris, qual é o valor de g em Caiena?
16. Se um pêndulo tem um período de exatamente um segundo no Equador, qual será seu período no Pólo Sul? *Resposta:* 0,9974 s.
17. Massas m, supostas iguais, pendem de cordas de diferentes comprimentos dos braços de uma balança na superfície da Terra, como mostra a Fig. 16-16. Se as cordas têm massa desprezível e diferem no comprimento por h. (*a*) Mostre que o erro de pesagem, associado ao fato de que W' está mais próximo à Terra do que W, é $W' - W = 8\pi Gpmh/3$ em que p é a densidade média da Terra (5,5 g/cm^3). (*b*) Determine a diferença de comprimento que dará um erro de uma parte por milhão.

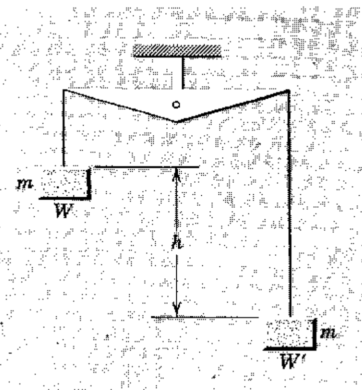


figura 16-16

18. Um observador se encontra no interior de um trem que se desloca em linha reta com uma aceleração a. (*a*) O observador resolve medir o valor da aceleração da gravidade no interior deste trem usando um pêndulo simples preso ao teto do trem; qual é a expressão correta para o cálculo da aceleração da gravidade g' no interior do trem? (*b*) Determine o período das pequenas oscilações de um pêndulo simples de comprimento l preso ao teto do trem. *Resposta:* (*a*) $g' = (g^2 + a^2)^{1/2}$. (*b*) $T = 2\pi(l/g')^{1/2}$.
19. Um corpo está suspenso de um dinamômetro em um navio que viaja ao longo da linha do equador, com velocidade v. (*a*) Mostrar que a leitura do dinamômetro será muito aproximadamente $W_0(1 \pm 2\omega v/g)$, sendo ω a velocidade angular da Terra e W_0 a leitura quando o navio se encontra em repouso. (*b*) Explicar o duplo sinal.

SEÇÃO 16-6

20. Duas cascas esféricas concêntricas, de massas M_1 e M_2, estão situadas conforme indicado na Fig. 16-17. As massas específicas são iguais e constantes em todos os pontos das cascas. Desejamos determinar a força que atua sobre uma partícula de massa m quando a partícula estiver em (*a*) $r = a$, (*b*) $r = b$ e (*c*) $r = c$. A distância r é medida a partir do centro de cascas. *Resposta:* (*a*) $G(M_1 + M_2)m/a^2$. (*b*) $G M_1 m/b^2$. (*c*) Nula.

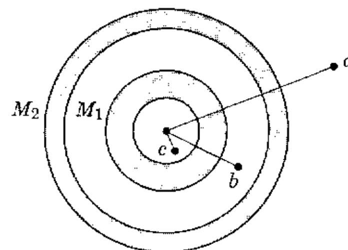


figura 16-17

21. Considere o Exemplo 3. Calcule: (*a*) a velocidade de um objeto ao passar pelo centro do túnel, (*b*) a velocidade de um objeto ao passar por um ponto situado à metade da distância entre o centro e a superfície da Terra.
22. A distância entre o centro da Lua e o centro da Terra é igual a $3{,}63 \times 10^8$ m no perigeu e igual a $4{,}05 \times 10^8$ m no apogeu. (*a*) Calcule a variação Δg entre estas posições extre-

mas, tomando como referência o valor de g produzido pela atração da Lua sobre a Terra quando ela se encontra no apogeu. (*b*) Calcule a variação relativa da gravidade na superfície da Terra produzida pelo movimento de translação da Lua em torno da Terra. (*c*) Obtenha uma expressão aproximada para o cálculo da variação relativa da gravidade entre um ponto sobre o Equador e um ponto sobre o Pólo da Terra, sabendo que a variação relativa do raio da Terra entre o Equador e um dos Pólos é da ordem de 1/300. Despreze a força centrípeta.

Resposta: (*a*) $\Delta g = 2{,}9 \times 10^{-6}$ m/s². (*b*) $\Delta g/g = 2{,}9 \times 10^{-7}$
(*c*) $\Delta g/g = -2\,(\Delta R/R) = -1/150$.

23. Considere um referencial inercial cuja origem está fixada no centro de massa do sistema Terra + objeto cadente. (*a*) Mostre que a aceleração, em direção ao centro de massa, de ***quaisquer*** dos corpos é independente das massas desses corpos. (*b*) Mostre que a aceleração relativa dos dois corpos depende da soma de suas massas. Comente, em seguida, o significado da afirmação que um corpo cai em direção à Terra com uma aceleração que não depende da sua massa.

24. O problema seguinte é extraído do exame "Olímpico" da Universidade Estatal de Moscou, em 1946, (veja Fig. 16-18). Faz-se uma cavidade esférica em uma esfera de chumbo de raio R, tal que sua superfície toque a superfície externa da esfera de chumbo e passe pelo centro desta. A massa primitiva da esfera de chumbo era M. De acordo com a lei de gravitação universal, qual será a força com que a esfera de chumbo atrairá uma pequena esfera de massa m localizada à distância d ao longo da reta que passa pelos centros das esferas e da cavidade?

Resposta: $\dfrac{GmM}{d^2}\left[1 - \dfrac{1}{8(1 - R/2d)^2}\right]$

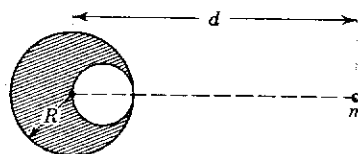


figura 16-18

25. (*a*) Mostre que para um túnel construído no interior da Terra ao longo de uma corda e não ao longo de um diâmetro o movimento de um objeto será harmônico simples. (*b*) Determine o período. (*c*) O objeto atingirá o mesmo valor máximo de velocidade ao longo de uma corda que ao longo de um diâmetro? *Resposta:* (*b*) 84 min. (*c*) Não.

26. Considere uma partícula de massa m num ponto qualquer P no interior de uma casca esférica de matéria. Suponha que a casca seja de densidade e espessura uniformes. Construa um duplo cone, estreito, de vértice em P que intercepta as áreas dA_1 e dA_2 da casca (Fig. 16-19). (*a*) Mostre que a força gravitacional resultante sobre a partícula no ponto P, exercida pelos elementos de massa interceptados, é nula. (*b*) Mostre, em seguida, que a força gravitacional resultante, devido a toda casca, sobre uma partícula interna em qualquer ponto é nula. (Este método foi inventado por Newton.)

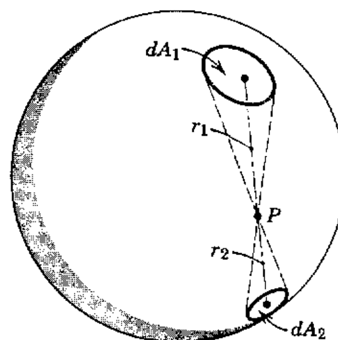


figura 16-19

SEÇÃO 16-7

27. Usando coordenadas polares, deduza a *Segunda lei de Kepler* (*lei das áreas*).

28. (*a*) Pode um satélite ser lançado a uma distância tal que ele gire em torno da Terra com velocidade angular igual à da Terra, de forma que ele permaneça sempre acima do mesmo ponto da superfície? (*b*) Qual seria o raio da órbita do assim chamado satélite terrestre sincronizado?
Resposta: (*a*) Sim. O plano da órbita deve ser equatorial. (*b*) $4{,}2 \times 10^4$ km.

29. (*a*) Calcule a velocidade horizontal com que deve ser projetado um satélite, a 200 km acima da superfície terrestre, para que ele descreva uma órbita circular em torno da Terra. Considere o raio da Terra igual a 6.400 km. (*b*) Calcule o período de rotação deste satélite.

30. A distância média entre Júpiter e o Sol vale $7{,}78 \times 10^8$ km. Faça uma estimativa para o período do movimento de rotação de Júpiter em torno do Sol. A massa do Sol é relacionada com a massa da Terra pela expressão: $M_s = 3{,}24 \times 10^5\, M_T$. *Resposta:* 12 anos.

31. (*a*) Determine a massa de um planeta em função da distância do centro do planeta ao centro do satélite e em função do período de rotação do satélite em torno do planeta. (*b*) Calcule a massa do Sol sabendo que o período de rotação da Terra em torno do Sol é de um ano e que a distância média entre a Terra e o Sol é igual a $1{,}5 \times 10^{11}$ m.

32. (*a*) O satélite A descreve uma órbita circular terrestre de raio R e o satélite B, uma órbita circular terrestre de raio $4R$. Calcule a razão entre os períodos de revolução T_A/T_B. (*b*) Um pêndulo e um sistema massa-mola oscilam com, aproximadamente, a mesma freqüência na superfície da Terra. Qual a relação entre suas freqüências se primeiro eles forem montados no satélite A e depois no satélite B?
Resposta: (*a*) $T_A/T_B = \frac{1}{8}$ (*b*) A freqüência do pêndulo é nula; a da massa-mola é inalterável.

33. Um satélite descreve uma órbita elítica em torno da Terra. Sabendo que no *perigeu* sua distância à superfície da Terra vale 400 km e que no *apogeu* esta distância é igual a 1.800 km calcule a razão entre a velocidade orbital do satélite no perigeu e a velocidade no apogeu.

34. Três corpos idênticos, de massa M, estão localizados nos vértices de um triângulo eqüilátero de lado L. A que velocidade eles devem mover-se se todos giram sob a influência

da gravidade mútua, em uma órbita circular que circunscreve o triângulo, mantido sempre eqüilátero? *Resposta:* $\sqrt{GM/L}$.

35. (*a*) Mostre que o problema dos dois corpos, mencionado na Seç. 16-7, pode ser reduzido ao problema de um corpo, utilizando o conceito de massa reduzida na Seç. 15-8. Isto é, mostre que, se usarmos $\mu = mM/(m + M)$ em lugar de m, pode-se estudar o movimento de m relativamente a M exatamente como se esta segunda partícula fosse a origem de nosso referencial inercial. (*b*) Mostre que a suposição feita na Seç. 16-7, de ser R desprezivelmente pequeno, comparado com r, equivale a supor que a massa reduzida μ seja igual a m. (*c*) Compare μ para o sistema Terra-Sol com a massa da Terra; o mesmo para o sistema Lua-Terra e a massa da Lua. (*d*) Se usássemos a massa reduzida μ do sistema de dois corpos, em lugar de m, como isto afetaria as equações da Seç. 16-7?

SEÇÃO 16-8

36. Escreva a expressão do campo gravitacional de uma partícula pontual de massa m num ponto situado a uma distância r da partícula. Dê a resposta em função do raio vetor **r**. *Resposta:* $\mathbf{g} = -(Gm/r^2)(\mathbf{r}/r)$

37. Mostre que o *módulo* do campo gravitacional dg de um elemento de massa dm, num ponto onde desejamos calcular o campo gravitacional, é dado por: $dg = (G/r^2)\,dm$, onde r é a distância entre dm e o ponto considerado. Como se procede para se determinar o campo **g** no ponto considerado?

38. Considere uma casca esférica de massa M, de espessura desprezível e de raio R. Obtenha o módulo do campo gravitacional nos pontos situados: (*a*) no exterior da esfera ($r > R$), (*b*) no interior da esfera ($r < R$). *Resposta:* (*a*) $g = GM/r^2$. (*b*) $g = 0$.

39. Considere uma esfera homogênea com massa específica ρ constante em todos os pontos do interior da esfera, que possui raio R e massa total M. Determine o campo gravitacional para os pontos situados: (*a*) no exterior da esfera, (*b*) no interior da esfera, (*c*) sobre a superfície da esfera.

40. Suponha que a Terra seja uma esfera homogênea com massa específica uniforme. Seja g_0 o valor da aceleração da gravidade na superfície terrestre. Obtenha uma expressão para a determinação do campo gravitacional a uma profundidade z abaixo da superfície terrestre. *Resposta:* $g = g_0 - g_0\, z/R_T$.

SEÇÃO 16-9

41. A massa da Terra vale $5{,}98 \times 10^{24}$ kg. A massa da Lua vale $7{,}36 \times 10^{22}$ kg. O raio da Terra vale 6.370 km e o raio da Lua é igual a 1.740 km. Calcule: (*a*) a relação entre a massa específica média da Terra (ρ_T) e a massa específica média da Lua (ρ_L), (*b*) a relação entre a aceleração da gravidade g_T na superfície terrestre e a aceleração da gravidade g_L na superfície da Lua, (*c*) a relação entre a velocidade de escape da superfície terrestre v_T e a velocidade de escape da superfície da Lua v_L.

42. (*a*) Determine a velocidade mínima para que uma partícula possa escapar da atração de um astro em função da massa M do astro e da distância r ao centro do astro. (*b*) Calcule a velocidade de escape para a molécula de um gás situada a uma altura de 800 km acima da superfície terrestre. (*c*) Obtenha uma relação entre o valor local da gravidade g a uma distância r do centro de um astro e a velocidade de escape de uma partícula situada neste local. *Resposta:* (*a*) $v = (2GM/r)^{1/2}$. (*b*) 10,5 km/s. (*c*) $v = (2gr)^{1/2}$.

43. Um astronauta transporta da Terra para a Lua um recipiente fechado contendo um gás com temperatura elevada. Ao chegar na Lua o astronauta abre o recipiente. Verifique se o gás libertado ficará retido pela atração gravitacional da Lua ou se o gás escapará para o espaço cósmico. Suponha que a velocidade média das moléculas do gás transportado permaneça constante, ou seja, suponha que a temperatura do gás permaneça constante. Considere o seguinte valor para a velocidade média das partículas do gás: $\bar{v} = 2.700$ m/s.

44. (*a*) Obtenha uma expressão *aproximada* para a determinação da altura atingida por um projétil lançado verticalmente da superfície terrestre. (*b*) Determine uma expressão *exata* conveniente para o cálculo da distância r ao centro da Terra quando o projétil mencionado no item anterior atinge a altura máxima. (*c*) Suponha que, ao calcular a *velocidade de escape* de um projétil da superfície terrestre (ver o Exemplo 6) você cometa o seguinte erro: em vez de usar o valor $R_T = 6.400$ km para o raio da Terra, você faça o cálculo com o valor de 6.400 m para o raio da Terra. Qual seria o valor da velocidade obtida com esta distração? (*d*) Determine a altura atingida por um projétil lançado verticalmente com a velocidade inicial calculada no item anterior, usando a aproximação mencionada no item (*a*). (*e*) Repita o cálculo do item anterior, usando o valor *exato* mencionado no item (*b*). (*f*) Calcule a altura máxima atingida por um projétil lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 10 km/s.
Resposta: (*a*) $h = v^2/2g$. (*b*) $-GM_T/r = (v^2/2) - GM_T/R_T$. (*c*) 354 m/s. (*d*) 6.387 m. (*e*) 6.440 m. (*f*) $2{,}6 \times 10^7$ m.

45. Um foguete é acelerado, para cima, até uma velocidade $v = 2\sqrt{gR_T}$, perto da superfície terrestre e, a seguir, sua propulsão é desligada. (*a*) Mostre que ele escapará da Terra. (*b*) Mostre que sua velocidade será $V = \sqrt{2gR_T}$ em pontos muito afastados da Terra.

46. Os físicos têm especulado sobre a existência possível de corpos de massa negativa; para tais corpos hipotéticos postula-se que m, nas equações físicas, seria substituída por $-m$.

Suponha que duas partículas, de massas $+m$ e $-m$, respectivamente, sejam colocadas à distância d uma da outra. Mostre (*a*) a força e (*b*) a aceleração de cada uma. Descreva o movimento esperado; suponha que ambas as partículas estejam inicialmente em repouso, e mostre que este movimento não viola as leis de conservação do momento linear e da energia mecânica. Tais partículas de massa negativa não foram ainda descobertas.
Resposta: (*a*) A força, pela lei de gravitação de Newton, é repulsiva. (*b*) As acelerações pela Segunda Lei de Newton, indicam a mesma direção, da massa negativa para a positiva.

47. Uma esfera material, de massa M e raio a, tem uma cavidade concêntrica, de raio b, conforme a Fig. 16-20. (*a*) Faça um gráfico da força gravitacional F exercida pela esfera sobre uma partícula de massa m, localizada a distância r do centro da esfera, como função de r, no intervalo $0 \leq r \leq \infty$. Considere em particular os pontos $r = 0$, b, a e ∞. (*b*) Faça o gráfico correspondente para a energia potencial $U(r)$ do sistema. (*c*) A partir desses gráficos, como você obteria gráficos da intensidade do campo gravitacional e do potencial gravitacional devidos à esfera?

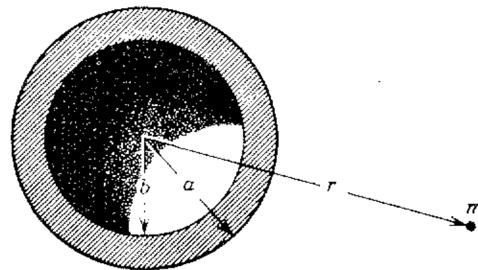


figura 16-20

48. Duas partículas, de massas m e M, estão em repouso, separadas por uma distância infinita. Mostrar que, em qualquer instante, sua velocidade relativa de aproximação, atribuível à atração gravitacional, é $\sqrt{2G(M + m)/d}$, sendo d a distância entre elas naquele instante.

SEÇÃO 16-10

49. Duas esferas se atraem mutuamente no espaço de acordo com a lei da atração universal. Uma das esferas possui massa m_1 e a outra possui massa m_2. Prove que para um observador situado num sistema de referência inercial as duas esferas giram em torno do centro de massa do sistema com a mesma velocidade angular ω. Obtenha a expressão do quadrado desta velocidade angular.

50. Considere uma esfera maciça e homogênea de raio R. (*a*) Calcule a distância r ao centro da esfera num ponto exterior à esfera tal que o potencial deste ponto seja igual à metade do potencial gravitacional na superfície da esfera. (*b*) Em que ponto no interior da esfera o potencial gravitacional se reduz a (3/2) do potencial na superfície da esfera?
Resposta: (*a*) $r = 2R$. (*b*) $r = 0$.

51. Um corpo de 50 kg está separado de outro de 30 kg por uma distância igual a 0,25 m. (*a*) Calcule o módulo do campo gravitacional produzido por estas massas a uma distância de 0,20 m da massa maior e a 0,15 m da massa menor. (*b*) Determine o potencial gravitacional produzido por estas massas no ponto considerado.

52. Uma partícula de massa igual a $4m$ está situada a uma distância a de uma outra partícula de massa m. (*a*) Calcule as distâncias entre o centro de massa deste conjunto e os pontos onde o campo gravitacional se anula. (*b*) Existe algum ponto entre as partículas em que o potencial gravitacional se anula? (*c*) Calcule a energia de ligação deste sistema (energia potencial gravitacional). (*d*) Determine o lugar geométrico dos pontos para os quais o potencial gravitacional produzido pela partícula de massa $4m$ é igual ao potencial produzido pela partícula de massa m.
Resposta: (*a*) $x_1 = 2a$, $x_2 = 2a/3$. (*b*) Não, o potencial gravitacional só se anula no infinito. (*c*) $U = -Gm_1m_2/a$. (*d*) Para um sistema cartesiano ortogonal com origem sobre a partícula de massa $4m$, o lugar geométrico mencionado é o plano $x = 4a/5$.

53. Uma partícula se move sob a ação de uma força de atração da forma: $F = -k/r^2$. Suponha que a trajetória seja uma circunferência de raio r. Determine: (*a*) a energia total, (*b*) a velocidade da partícula.

54. (*a*) Escreva uma expressão para a energia potencial de um corpo de massa m no campo gravitacional da Terra e da Lua. Seja M_T a massa da Terra, M_L, a massa da Lua, R, a distância ao centro da Terra e r a distância ao centro da Lua. (*b*) Calcule a energia potencial gravitacional e o módulo do campo gravitacional na superfície da Terra. (*c*) Repita o cálculo anterior para a superfície da Lua.
Resposta: (*a*) $-Gm(M_T/R + M_L/r)$. (*b*) $-6{,}3 \times 10^7$ J/kg; 9,8 m/s^2. (*c*) $-3{,}9 \times 10^6$ J/kg; 1,6 m/s^2.

55. Considere dois satélites A e B, de mesma massa m, que se movem na mesma órbita circular de raio r em torno da Terra T, os satélites têm sentidos de rotação *opostos*, de forma que irão chocar-se (Fig. 16-21). (*a*) Determinar a energia mecânica total $E_A + E_B$ do sistema Terra + satélites, antes da colisão, em função de G, M_T, m e r. (*b*) Se a colisão for completamente inelástica, de forma que os destroços permaneçam unidos como um emaranhado de massa $2m$, determine a energia mecânica total imediatamente após o choque. (*c*) Descrever o movimento subseqüente dos destroços.

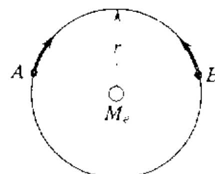


figura 16-21

56. (*a*) É necessária mais energia para elevar um satélite à altura de 1.600 km do que para colocá-lo em órbita a essa altura? (*b*) E a 32.000 km? (*c*) E a 4.800 km? Considere o raio da Terra igual a 6.400 km. *Resposta:* (*a*) Não. (*b*) A mesma. (*c*) Sim.

57. Uma partícula de massa m está sujeita a uma força atrativa central de módulo k/r^2, sendo k uma constante. Se no instante em que a partícula se encontra em uma posição extrema de sua órbita fechada, à distância a do centro de força, sua velocidade é $\sqrt{k/2ma}$, determine; (*a*) a outra posição extrema e (*b*) a velocidade da partícula nesta posição.

58. Um par de estrelas gira em torno do centro de massa comum. A massa de uma delas é M, o dobro da massa m da outra, $M = 2m$. A distância d entre os centros das estrelas é grande, comparada ao tamanho de qualquer delas. (*a*) Deduza uma expressão para o período de rotação das estrelas em torno de seu centro de massa, em função de d, m e G. (*b*) Compare os momentos angulares das duas estrelas em relação ao seu centro de massa comum determinando a razão L_m/L_M. (*c*) Compare as energias cinéticas delas, determinando a razão K_m/K_M. *Resposta:* (*a*) $2\pi d^{3/2}/\sqrt{3Gm}$. (*b*) 2. (*c*) 2.

SEÇÃO 16-13

59. Uma astronave se desloca com velocidade constante numa região muito afastada da Terra e dos demais astros. A astronave gira em torno do seu eixo de simetria com uma velocidade angular ω constante. (*a*) Qual seria o "peso" de um objeto de massa m no interior da astronave? (*b*) Se você estivesse no interior desta nave e deixasse "cair" uma borracha, como seria a "queda livre" da borracha?

17

Estática dos Fluidos

17-1 *FLUIDOS*

Sob o ponto de vista macroscópico, costumamos classificar a matéria em sólidos e fluidos. *Fluidos* são substâncias que podem *escoar*. Assim, o termo fluido abrange os líquidos e os gases. A separação entre sólidos e fluidos não é claramente definida. Alguns fluidos, como o vidro e o piche, fluem tão vagarosamente que se comportam como sólidos, nos intervalos de tempo em que comumente trabalhamos com eles. O plasma, que é um gás altamente ionizado, não se enquadra propriamente em nenhuma destas categorias e é freqüentemente chamado de "quarto estado da matéria", para ser distinguido dos estados sólido, líquido e gasoso. Mesmo a distinção entre líquidos e gases não é bem definida, porque, fazendo variar convenientemente a pressão e a temperatura, é possível transformar um líquido (água, por exemplo) em um gás (vapor, por exemplo) sem o aparecimento de bolhas e sem que o líquido ferva; a massa específica e a viscosidade variam de maneira contínua durante este processo.[1] Entretanto, neste texto definiremos fluido da maneira como ele é comumente conhecido e estaremos interessados apenas naquelas propriedades dos fluidos relacionadas com sua propriedade de escoar. Assim, as mesmas leis básicas controlam os comportamentos estático e dinâmico tanto de líquidos como de gases, apesar das diferenças que, a pressões ordinárias, observamos entre eles.

[1] Pressões superiores à chamada "pressão crítica" podem ser utilizadas para provocar este fenômeno; para a água (H_2O) a pressão crítica é 218 atmosferas.

Para sólidos, que têm volume e forma definidos, formulamos a mecânica dos corpos rígidos, modificada pelas leis da elasticidade para os corpos que não podem ser considerados perfeitamente rígidos. Como os fluidos mudam de forma facilmente e, no caso dos gases, têm seu volume igual ao do recipiente que os contêm, devemos desenvolver novas técnicas para resolver os problemas da mecânica dos fluidos. A aplicação da mecânica aos meios contínuos, tanto sólidos como fluidos, está baseada nas leis de Newton para o movimento, combinadas com as leis de força correspondentes. Entretanto, achamos conveniente desenvolver para os fluidos uma formulação especial para essas leis básicas, tal como foi feito para os sólidos.

17-2 *PRESSÃO E MASSA ESPECÍFICA*

A maneira pela qual uma força superficial atua nos fluidos e nos sólidos não é a mesma. Para os sólidos a direção desta força pode ser qualquer, mas, para um fluido em repouso, a força superficial deve ser sempre perpendicular à superfície. Um fluido em repouso não pode suportar uma força tangencial; sob a ação de tal força as camadas fluidas deslizariam umas sobre as outras. Na verdade, essa característica dos fluidos, de poder escoar e ter sua forma facilmente variável, provém de sua incapacidade de resistir a forças tangenciais (ou tensões de cisalhamento).

É conveniente, portanto, descrever as forças que atuam em um fluido especificando a pressão p, definida como o número que mede a força atuante em cada unidade de área. A pressão se transmite às superfícies do recipiente ou através de seções arbitrárias de um fluido sempre *perpendicularmente* a essas superfícies ou seções em cada ponto. A pressão é uma grandeza escalar. A unidade SI de pressão é o *pascal* (abreviatura Pa, 1 Pa = 1 N/m^2). Esta unidade teve esta denominação em homenagem ao cientista francês Blaise Pascal (1623-1662) (ver Seç. 17-4). Outras unidades são bar (1 bar = 10^5 Pa), lb/in^2, atmosfera (1 atm = 14,7 lb/in^2 = 101 325 Pa), e mm-Hg (760 mm-Hg = 1 atm).

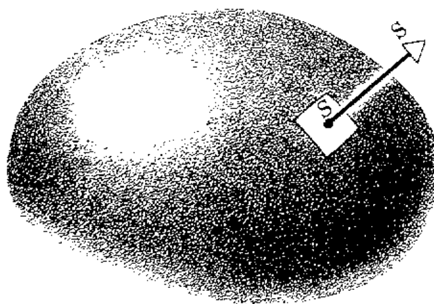


figura 17-1
Um elemento de superfície S, pode ser representado por um vetor **S**, de módulo igual à sua área e de direção perpendicular ao elemento.

Um fluido sob pressão exerce força sobre qualquer superfície que esteja em contato com ele. Consideremos uma superfície fechada que contem um fluido (Fig. 17-1). Um elemento desta superfície pode ser representado por um vetor **S** cujo módulo mede a área do elemento, tem direção perpendicular a essa área e sentido de dentro para fora do elemento. A força **F** exercida pelo fluido sobre o elemento poderá ser escrita então como

$$\mathbf{F} = p \cdot \mathbf{S}.$$

Desde que **F** e **S** têm a mesma direção e mesmo sentido, a pressão p

pode ainda ser expressa sob a forma

$$p = \frac{F}{S}.$$

Supomos ser o elemento de área S pequeno bastante de modo que a pressão p, definida acima, é independente do tamanho do elemento S. A pressão pode, em geral, variar de um ponto para outro da superfície.

A *massa específica* ou *densidade absoluta* ou simplesmente *densidade* ρ de um fluido homogêneo (quociente de sua massa pelo seu volume) pode depender de vários fatores, quais sejam, sua temperatura e a pressão à qual ele estiver submetido. Nos líquidos, a massa específica varia muito pouco para grandes variações da temperatura e pressão, e podemos, com bastante segurança, supô-la constante, para nossos atuais propósitos; observe na Tab. 17-1 o caso da *água*. A massa específica de um gás, todavia, é muito sensível a variações de temperatura e de pressão; veja o caso do *ar* na mesma Tab. 17-1, que mostra o intervalo de densidades que ocorre na Natureza. Note que a variação é da ordem de grandeza de 10^{38}.

Tabela 17-1

Massas específicas de alguns materiais e objetos, em kg/m³

Espaço interestelar	$10^{-18} - 10^{-21}$
Vácuo mais elevado obtido em laboratório	$\sim 10^{-16}$
Hidrogênio: a 0°C e 1 atm	$9{,}0 \times 10^{-2}$
Ar : a 0°C e 1 atm	1,3
: a 100°C e 1 atm	0,95
: a 0°C e 50 atm	6,5
Isopor	$\sim 1 \times 10^{2}$
Gelo	$0{,}92 \times 10^{3}$
Água: a 0°C e 1 atm	$1{,}000 \times 10^{3}$
: a 100°C e 1 atm	$0{,}958 \times 10^{3}$
: a 0°C e 50 atm	$1{,}002 \times 10^{3}$
Alumínio	$2{,}7 \times 10^{3}$
Mercúrio	$1{,}36 \times 10^{4}$
Platina	$2{,}14 \times 10^{4}$
A Terra: densidade média	$5{,}52 \times 10^{3}$
densidade do núcleo	$9{,}5 \times 10^{3}$
densidade da crosta	$2{,}8 \times 10^{3}$
Sol : densidade média	$1{,}4 \times 10^{3}$
densidade do centro	$\sim 1{,}6 \times 10^{5}$
Estrelas anãs brancas (densidades nos centros)	$10^{8} - 10^{15}$
Núcleo de urânio	$\sim 10^{17}$

17-3 VARIAÇÃO DE PRESSÃO EM UM FLUIDO EM REPOUSO

Se um fluido está em equilíbrio, qualquer porção deste fluido estará também em equilíbrio. Consideremos um pequeno elemento do fluido, situado em seu interior. Suponhamos que este elemento tenha a forma de um disco de pequena espessura, situado a uma distância y de um nível de referência, como mostra a Fig. 17-2*a*. A espessura do disco é dy e cada face tem uma área A. A massa deste elemento é $\rho A\ dy$ e seu peso é $\rho g A\ dy$. As forças exercidas neste elemento pelo fluido que o rodeia são perpendiculares à sua superfície, em cada ponto (Fig. 17-2*b*). O componente horizontal da resultante destas forças é nulo, porque o elemento não tem acele-

ração horizontal. As forças horizontais são devidas apenas às pressões do fluido e por simetria a pressão deve ser a mesma em todos os pontos do plano horizontal que passa na altura y.

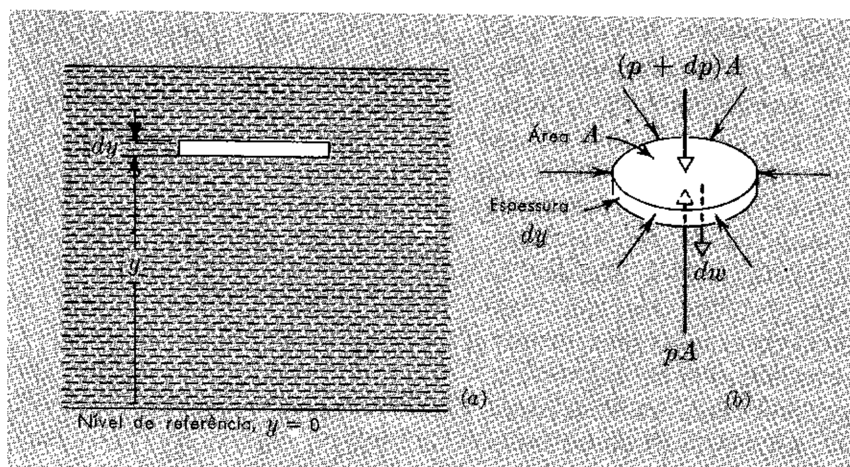


figura 17-2
(*a*) Um elemento de volume de um fluido em repouso. (*b*) As forças que agem no elemento.

O elemento fluido não tem tampouco aceleração vertical e, portanto, o componente vertical da resultante das forças que agem no elemento deve ser nulo. Entretanto, as forças verticais são devidas não apenas à pressão do fluido nas faces do elemento mas, também, ao seu peso. Se p é a pressão na face inferior do elemento e $p + dp$ é a pressão em sua face superior, a força para cima (exercida na face inferior) é pA e a força para baixo (exercida na face superior) é $(p + dp)\,A$ mais o peso do elemento dw. Então, em virtude do equilíbrio segundo a vertical, teremos:

$$pA = (p + dp)\,A + dw$$
$$= (p + dp)\,A + \rho g A\,dy$$

e

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \qquad (17\text{-}1)$$

Esta equação nos mostra que a pressão em um fluido em equilíbrio varia com a altura, em relação a um certo referencial. A pressão diminui (dp é negativo) enquanto a elevação aumenta (dy é positivo). A causa desta variação de pressão é o peso por unidade de área, em uma seção da camada fluida compreendida entre os pontos entre os quais a diferença de pressão está sendo medida.

O produto ρg é às vezes chamado de *peso específico* do fluido; é o peso da unidade de volume deste fluido. Para a água, por exemplo, este peso específico é 9 800 N/m³.

Se p_1 é a pressão na altura y_1 e p_2 é a pressão na altura y_2, acima de um nível de referência, a integração da Eq. 17-1 fornece

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\,dy$$

ou

$$p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\,dy. \qquad (17\text{-}2)$$

Para os líquidos, ρ é praticamente constante, porque eles são quase incompressíveis e as diferenças de nível raramente são tão

grandes que seja necessário levar em conta as variações de g. Então, tomando ρ e g como constantes, obteremos para um líquido homogêneo:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1). \qquad (17\text{-}3)$$

Se um líquido tem a superfície livre, esta é o nível natural de referência para a medida das alturas. Para trocar o nível de referência para o alto da superfície, deveremos considerar y_2 como sendo a altura desta superfície e a pressão p_2 exercida em um ponto desta superfície será a pressão atmosférica p_0. Tomemos y_1 como um nível arbitrário e representemos a pressão nesta altura por p. Então

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Mas $y_2 - y_1$ é a profundidade h abaixo da superfície do **ponto** onde a pressão é p (**veja** Fig. 17-3), então

$$p = p_0 + \rho gh. \qquad (17\text{-}4)$$

Isto mostra claramente que a pressão é a mesma em todos os pontos de mesma profundidade.

Para os gases, ρ é comparativamente pequeno e a diferença de pressão entre dois pontos é, muitas vezes, desprezível (veja Eq. 17-3). Assim, em um vaso que contém gás, a pressão pode ser considerada a mesma em todos os pontos. Entretanto, se $y_2 - y_1$ for muito grande, isso não acontecerá. A pressão do ar varia bastante quando subimos a grandes alturas na atmosfera. De fato, nestes casos a massa específica ρ varia com a altitude e precisamos conhecer a função que relaciona ρ com a altitude, antes de fazermos a integração da Eq. 17-2.

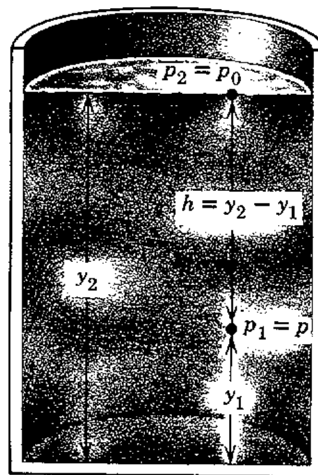


figura 17-3
Um líquido cuja superfície superior está aberta para a atmosfera.

EXEMPLO 1

Podemos obter uma idéia razoável da variação da pressão com a altitude na atmosfera terrestre supondo que a massa específica ρ seja proporcional à pressão. Esta consideração estará muito próxima da verdade se a temperatura do ar permanecer a mesma em qualquer altitude. Adotando este ponto de vista e supondo ainda que a variação de g com a altitude seja desprezível, vamos determinar a pressão p a uma altura y, acima do nível do mar.

Da Eq. 17-1 teremos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Como ρ é proporcional a p, teremos

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0},$$

onde ρ_0 e p_0 são os valores conhecidos da massa específica e da pressão ao nível do mar. Então

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0},$$

e assim

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}dy.$$

Integrando esta expressão, desde o valor p_0 no ponto $y = 0$ (nível do mar) até o valor p no ponto y (acima do nível do mar), obteremos

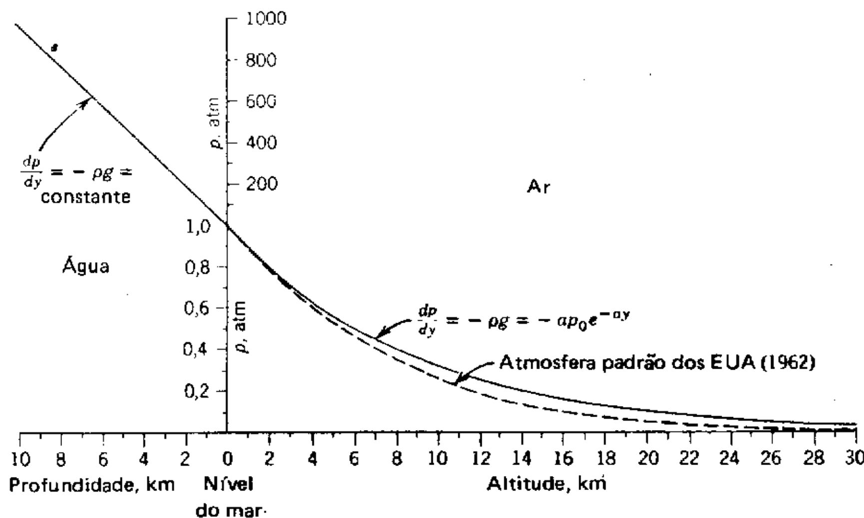


figura 17-4
Exemplo 1. Variação da pressão com a altitude, no ar, e com a profundidade, na água supondo $p = 1$ atm (exatamente) ao nível do mar. Observe que as escalas de pressão são diferentes para a altitude e para a profundidade. A linha contínua, para o ar, é calculada supondo que a sua temperatura é constante e que g não varia com a altitude. A linha interrompida (a atmosfera padrão dos Estados Unidos em 1962) mostra um cálculo mais preciso, em que estas suposições não são feitas.

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0}y$$

ou

$$p = p_0 e^{-g(\rho_0/p_0)y},$$

e como

$$g = 9{,}80\ \text{m/s}^2,\ \rho_0 = 1{,}20\ \text{kg/m}^3\ (\text{a } 20°\text{C})$$

e

$$p_0 = 1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2 = 1{,}01 \times 10^5\ Pa,$$

virá

$$g\frac{\rho_0}{p_0} = 1{,}16 \times 10^{-4}\ \text{m}^{-1} = 0{,}116\ \text{km}^{-1}.$$

Então

$$p = p_0 e^{-ay},$$

sendo

$$a = 0{,}116\ \text{km}^{-1}.$$

Vimos que, em virtude de os líquidos serem quase incompressíveis, suas camadas inferiores não serão sensivelmente comprimidas pelo peso das camadas superiores que se superpõem a elas e assim sendo, a massa específica ρ é praticamente constante em todos os níveis. Para os gases a temperatura uniforme, a massa especfíca ρ de qualquer camada é proporcional à pressão p da camada correspondente. A variação da pressão com a altura, para os gases, é pois diferente de sua variação para os líquidos. A Fig. 17-4 mostra a distribuição da pressão na água e no ar.

A Eq. 17-3 dá a relação entre as pressões em dois pontos quaisquer de um fluido independente da forma do vaso que o contém. Não importa qual seja a forma do recipiente que contém um fluido, dois de seus pontos poderão sempre ser ligados por um caminho, constituído de segmentos horizontais e verticais. Por exemplo, consideremos os pontos A e B de um líquido homogêneo contido em um tubo em U, Fig. 17-5*a*. Ao longo do caminho em ziguezague de A até B há uma diferença de pressão $\rho g y'$, para cada segmento vertical de comprimento y', enquanto que ao longo dos segmentos horizontais não há variação de pressão. Então, a diferença de pres-

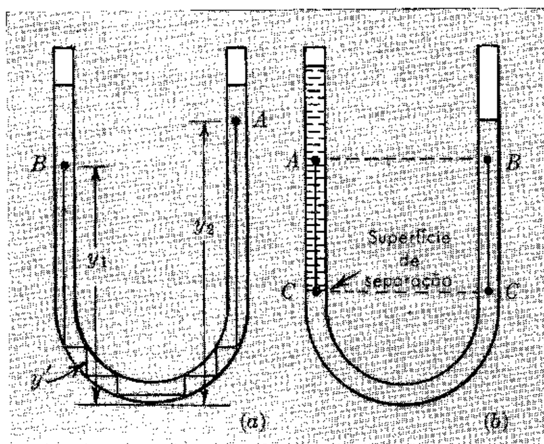


figura 17-5
(*a*) A diferença de pressão entre dois pontos *A* e *B* de um líquido homogêneo depende apenas da diferença entre as profundidades destes pontos, $y_2 - y_1$.
(*b*) Dois pontos *A* e *B* à mesma profundidade podem estar a pressões diferentes se as massas específicas dos líquidos forem diferentes.

são $p_B - p_A$ é ρg multiplicado pela soma algébrica dos segmentos verticais de *A* a *B*, isto é, $\rho g(y_2 - y_1)$.

Se o tubo em U contém líquidos diferentes não miscíveis, por exemplo, um líquido mais denso no ramo da direita e um mais leve no ramo da esquerda, como mostra a Fig. 17-5*b*, a pressão pode ser diferente em um mesmo nível dos diferentes ramos do tubo. Na figura, a superfície do líquido é mais alta no ramo da esquerda do que no da direita. A pressão em *A* será maior do que em *B*. A pressão em *C* é a mesma em ambos os lados, mas a pressão cai menos de *C* a *A* do que de *C* a *B*, porque a coluna de líquido, de área transversal unitária, que liga *A* a *C* pesa menos do que a coluna correspondente que liga *B* a *C*.

EXEMPLO 2

Um tubo em U está parcialmente cheio de água. Um outro líquido que não se misture com a água é colocado em um dos ramos do tubo até que sua superfície livre esteja a uma distância *d* acima do nivel livre da água, no outro ramo, que, por sua vez, elevou-se de uma altura *l* em relação ao seu nível primitivo (Fig. 17-6). Determine a massa específica do líquido em relação à água.

Na Fig. 17-6, os pontos *C* assinalados estão sob a mesma pressão. Então, às quedas de pressão desde *C* até as superfícies livres, nos dois ramos, são as mesmas, uma vez que em ambas age a pressão atmosférica. A queda de pressão no lado da água é $\rho_a g2l$, o fator $2l$ provém do fato de a superfície da água ter descido uma altura *l* de um lado e, conseqüentemente, subido *l* do outro lado, em relação à sua altura primitiva. A queda de pressão do lado que contém o outro líquido é $\rho g(d + 2l)$, sendo ρ a massa específica do líquido desconhecido. Então

$$\rho_a g2l = \rho g(d + 2l)$$

e

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{2l}{(2l + d)}.$$

A relação entre a massa específica da substância e a massa específica da água é chamada de *densidade relativa* da substância em relação à água.

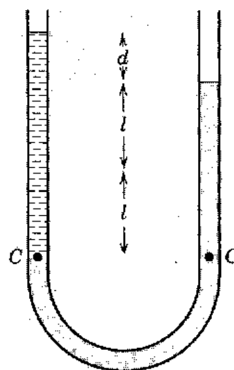


figura 17-6
Exemplo 2.

17-4
PRINCÍPIOS DE PASCAL E DE ARQUIMEDES

A Fig. 17-7 mostra um liquido em um cilindro, ao qual está adaptado um pistão; através deste podemos comunicar ao líquido uma pressão externa p_0. A pressão *p*, em um ponto arbitrário *P*, situado a uma distância *h* abaixo da superfície superior do líquido, é dada pela Eq. 17-4, ou seja,

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Aumentemos a pressão externa de uma certa quantidade Δp_0 (que não precisa ser pequena em relação a p_0). Como os líquidos são praticamente incompressíveis, a densidade ρ, na equação citada, permanece sensivelmente constante durante o processo. A equação mostra que nestas condições a variação de pressão Δp, no ponto arbitrário P, é igual a Δp_0. Este resultado foi estabelecido pelo cientista francês Blaise Pascal (ver Seç. 17-2) e é chamado *Princípio Pascal*. Ele é geralmente enunciado da seguinte maneira: a pressão aplicada a um fluido contido em um recipiente é transmitida integralmente a todos os pontos do fluido e às paredes do recipiente que o contém. Este resultado não constitui realmente um princípio independente, sendo antes um simples resultado das leis da mecânica dos fluidos.

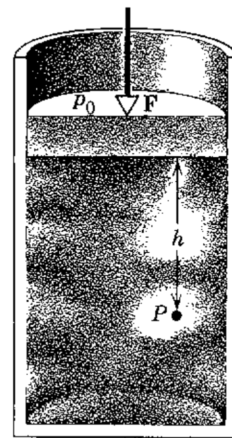


figura 17-7
Um fluido em um cilindro com pistão móvel. A pressão em um ponto qualquer P é devida não apenas ao peso do fluido acima do nível do ponto P, mas também à força exercida pelo pistão.

Embora, normalmente, tenhamos considerado os líquidos como incompressíveis, eles são, de fato, ligeiramente compressíveis. Isto significa que o acréscimo de pressão aplicado em um ponto do líquido propaga-se através dele como uma onda cuja velocidade de propagação é igual à velocidade do som neste líquido. No momento em que a perturbação desaparece e o equilíbrio é restabelecido, verifica-se a validade do princípio de Pascal. O princípio é verificado também para os gases, com ligeiras complicações de interpretação, causadas pela grande variação de volume que acompanha uma mudança de pressão em um gás encerrado em um recipiente.

O princípio de Arquimedes é também uma conseqüência das leis da estática dos fluidos. Quando um corpo é total ou parcialmente mergulhado em fluido (líquido ou gás) em equilíbrio, o fluido exerce pressão em todos os pontos da superfície do corpo que esteja em contato com ele. A pressão é maior nas partes imersas mais profundas. A resultante de todas estas forças de pressão é uma força vertical, dirigida para cima, denominada *empuxo* do fluido sobre o corpo imerso. Podemos determinar o módulo e o sentido desta resultante de maneira muito simples, como se segue.

A pressão em cada ponto da superfície do corpo, evidentemente, não depende do material do qual o corpo é feito. Suponhamos, então, que o corpo, ou a porção deste corpo que esteja imersa, seja substituído por fluido, da mesma natureza que aquele que envolve o corpo. Este fluido receberia a mesma pressão que atuava no corpo imerso e estaria em equilíbrio (Fig. 17-8). Então a resultante das forças que atuam nele será vertical, para cima, de módulo igual ao seu peso, e deverá passar pelo seu centro de gravidade. Deste resultado segue-se o *Princípio de Arquimedes*, que é enunciado da seguinte maneira: todo corpo total ou parcialmente imerso em um fluido recebe deste um empuxo vertical dirigido para cima, de módulo igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo. Vimos que a força atua verticalmente para cima, passando pelo centro de gravidade do fluido que ocupava o lugar agora ocupado pelo corpo (fluido deslocado). O ponto correspondente do corpo submerso chama-se *centro de empuxo*.

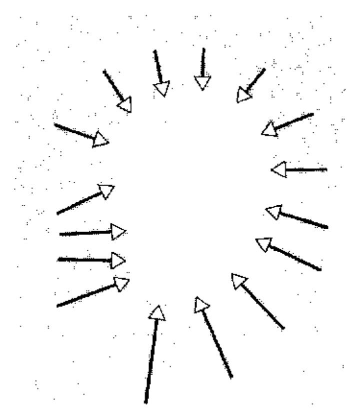


figura 17-8
Princípio de Arquimedes. O fluido exerce uma força resultante para cima sobre o corpo imerso.

EXEMPLO 3

Qual a fração do volume total de um "iceberg" que fica fora da água? A massa específica do gelo é $\rho_g = 0{,}92$ g/cm³ e a da água do mar é $\rho_a = 1{,}03$ g/cm³. Então o peso do iceberg é

$$W_i = \rho_g \cdot V_i \cdot g,$$

onde V_i é o volume do iceberg; o peso da água do mar deslocada, de volume V_a, é igual ao empuxo

$$B = \rho_a \cdot V_a \cdot g.$$

Mas $B = W_i$, porque o iceberg está em equilíbrio, então

$$\rho_a V_a \cdot g = \rho_g \cdot V_i g$$

e

$$\frac{V_a}{V_i} = \frac{\rho_g}{\rho_a} = \frac{0{,}92}{1{,}03} = 89\,\%.$$

O volume da água deslocada V_a é o volume da parte submersa; então, 11 % do iceberg está emerso.

17-5 *MEDIDA DA PRESSÃO*

Evangelista Torricelli (1608-1647) descobriu um método para medir a pressão atmosférica, inventando o barômetro de mercúrio em 1643.[2] Este é constituído por um longo tubo de vidro que contém mercúrio e é invertido em uma cuba também com mercúrio, como na Fig. 17-9. O espaço acima da coluna de mercúrio contém somente vapor de mercúrio, cuja pressão é tão pequena, em temperaturas normais, que pode ser desprezada. É facilmente demonstrável (veja Eq. 17-3) que a pressão atmosférica p_0 é

$$p_0 = \rho g h.$$

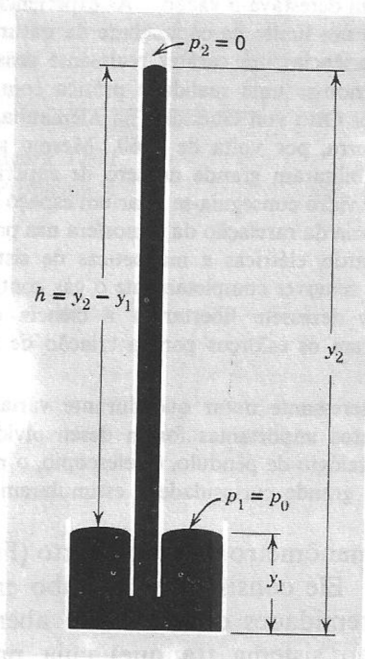


figura 17-9
Barômetro de Torricelli.

A maioria dos manômetros usa a pressão atmosférica como referência e mede a diferença entre a pressão real e a pressão atmosférica, diferença esta que é chamada *pressão manométrica*. A pressão real é chamada pressão absoluta. A pressão manométrica é dada acima ou abaixo da pressão atmosférica.

A pressão atmosférica em um ponto qualquer é numericamente igual ao peso de uma coluna de ar, de seção unitária e de altura que se estende desde este ponto até ao alto da atmosfera. A pressão atmosférica em um ponto, portanto, decresce com a altitude. Há variações da pressão atmosférica de dia para dia, pois a atmosfera não é estática. A coluna de mercúrio de um barômetro terá uma altura de cerca de 76 cm ao nível do mar, variando com a pressão atmosférica. A pressão equivalente a esta, exercida por uma coluna de exatamente 76 cm de mercúrio, a 0°C e sob condição normal da gravidade, $g = 980{,}665\ \text{cm/s}^2$, é chamada de *uma atmosfera* (1 atm). A densidade do mercúrio a esta temperatura é $13{,}5950\ \text{g/cm}^3$.

Então, uma atmosfera é equivalente a

$$1\ \text{atm} = 13{,}5950\ \text{g/cm}^3 \times 980{,}665\ \text{cm/s}^2 \times 76{,}00\ \text{cm}$$
$$= 1{,}013 \times 10^5\ \text{N/m}^2$$

Freqüentemente as pressões são especificadas pela altura da coluna de mercúrio, a 0°C, sob condição normal da gravidade, que exerce a mesma pressão. Daí se origina a expressão "centímetros de mercúrio" (cm-Hg), para a medida de uma pressão, embora pressão seja realmente o quociente de uma força por uma área e não um comprimento.

[2] Ver "*The History of the Barometer*" por W. E. K. Middletown, The Johns Hopkins Press (1964) para uma fascinante explicação do desenvolvimento do conceito de pressão atmosférica e dos dispositivos para medi-la.

Torricelli descreveu suas experiências com o barômetro de mercúrio em duas cartas a seu amigo M. A. Ricci, de Roma, em 1644. Nestas cartas ele dizia que o objetivo de suas investigações era "não apenas produzir o vácuo, mas construir um instrumento que mostre as variações da atmosfera, ora densa e pesada, ora leve e rarefeita". Ouvindo falar das experiências do italiano, Blaise Pascal, na França, raciocinou que, se a coluna de mercúrio era mantida simplesmente pela pressão do ar, ela deveria ser mais curta a altitudes maiores. Repetiu a experiência na torre de uma igreja em Paris, mas, desejando resultados mais convincentes, escreveu a seu cunhado pedindo que refizesse a experiência no "Puy de Dôme", uma montanha de Auvergne. Foi observada uma diferença de quase 8 cm na altura da coluna de mercúrio, "o que nos deixou surpreendidos e atônitos". O próprio Pascal construiu um barômetro usando vinho e um tubo de vidro de cerca de 15 m de comprimento.

A grande importância desta experiência, naquela época, foi que sua realização trouxe a possibilidade de obter o vácuo. Aristóteles acreditava não ser possível obter o vácuo e ainda mais tarde escritores como Descartes tinham o mesmo ponto de vista. Durante dois mil anos os filósofos comentavam o horror que a natureza tinha pelos espaços vazios — *o horror ao vácuo*. Devido a este horror, a natureza evitava a formação do vácuo, lançando mão instantaneamente de qualquer substância existente nas proximidades para preencher um vazio eventualmente formado. Assim, o mercúrio ou o vinho deveriam manter o tubo invertido completamente cheio porque "a natureza detestava o vácuo". As experiências de Torricelli e Pascal vieram mostrar que havia um limite na capacidade da natureza de evitar o vácuo. Este fato deu a estas experiências um caráter realmente sensacional para a época. A obtenção do vácuo tornou-se uma realidade prática com o desenvolvimento das bombas construídas por Otto von Guericke, na Alemanha, em torno de 1650, e por Robert Boyle, na Inglaterra, por volta de 1660. Mesmo sendo estas bombas bastante precárias, elas possibilitaram grande número de experiências. Com uma bomba e uma campânula de vidro conseguia-se criar um espaço onde realizar experiências para o estudo da influência da rarefação da atmosfera nas propriedades térmicas, luminosas, sonoras e, mais tarde, elétricas e magnéticas de sistemas físicos. Embora ainda hoje não possamos remover completamente o gás contido em um recipiente, estas experiências do século dezessete libertaram a ciência da superstição do "horror ao vácuo" e incentivaram os esforços para a criação de sistemas que permitissem obter vácuos melhores.

É interessante notar que durante várias décadas no século XVII apenas seis instrumentos importantes foram desenvolvidos. Eles são o barômetro, bomba de vácuo, o relógio de pêndulo, o telescópio, o microscópio e o termômetro. Todos eles causaram grande curiosidade e estimularam a imaginação.

O manômetro de tubo aberto (Fig. 17-10) mede a pressão manométrica. Ele consiste de um tubo em U que contém líquido; uma das extremidades do tubo está aberta para a atmosfera e a outra ligada ao sistema (tanque) cuja pressão p queremos medir. Da Eq. 17-14 obtemos

$$p - p_0 = \rho g h.$$

Assim, a pressão manométrica, $p - p_0$, é proporcional à diferença entre as alturas das colunas do líquido nos dois ramos do tubo em U. Se o tanque contém gás sob alta pressão, um líquido denso como o mercúrio é usado no tubo; a água pode ser usada quando no tanque houver gás sob baixa pressão.

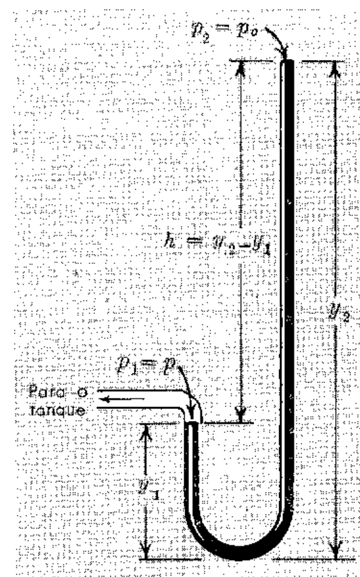


figura 17-10
O manômetro de tubo aberto, tal como é usado para medir a pressão em um tanque.

EXEMPLOS 4

Um manômetro de mercúrio, de tubo aberto (Fig. 17-10), é ligado a um tanque de gás. O mercúrio fica 39,0 cm mais alto no ramo da direita do que no da esquerda, quando a leitura barométrica é aproximadamente 75 cm-Hg. Qual é a pressão absoluta do gás? Dê a resposta em cm-Hg e em atm.

A pressão do gás é comunicada ao alto da coluna de mercúrio no ramo da esquerda; ela é igual à pressão exercida no mesmo plano horizontal no ramo da direita. A pressão neste nível é igual à pressão atmosférica (75,0 cm-Hg) mais a pressão exercida pela coluna de mercúrio de 39,0 cm, acima deste plano, ou (admitindo valores normais para a massa específica do mercúrio e para a gravidade), um total de 114 cm-Hg. Então a pressão absoluta do gás é

$$114\,\text{cm-Hg} = \frac{114}{76}\,\text{atm} = 1{,}50\,\text{atm} = 1{,}52 \times 10^5\,\text{Pa}.$$

Qual é a pressão manométrica do gás?

questões

1. Estime o valor da massa específica média de seu corpo. Exponha um método pelo qual você obteria um valor preciso, aplicando conceitos deste capítulo.
2. Pessoas confinadas ao leito estariam menos sujeitas a chagas no corpo se usassem colchões de água em vez dos colchões comuns. Explique.
3. (*a*) Dois corpos (bolas, por exemplo) têm a mesma forma e tamanhos iguais, mas um é mais denso que o outro. Supondo que a resistência do ar seja a mesma em ambos, mostre que quando eles forem abandonados simultaneamente de alturas iguais, o mais pesado alcançará o chão primeiro. (*b*) Dois corpos (gotas de chuva, por exemplo) têm a mesma forma e a mesma densidade, uma sendo maior do que a outra. Supondo que a resistência do ar sobre estes corpos seja proporcional à velocidade de cada um, que corpo cairá mais depressa?
4. Três vasos de mesma base e formas diferentes (Fig. 17-11) contêm água à mesma altura. Se a pressão é a mesma no fundo de cada vaso, a força exercida na base de cada um dos três vasos é a mesma. Por que, então, os pesos dos vasos, determinados em uma balança, são diferentes? Este resultado aparentemente contraditório é comumente conhecido como "paradoxo hidrostático".

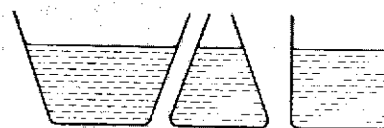


figura 17-11
Problema 4

5. Um alpinista pode subir a uma altura tal que a pressão atmosférica seja igual à metade da pressão atmosférica ao nível do mar?
6. (*a*) Um cubo de gelo está flutuando em um copo de água. Quando o gelo fundir, o nível da água no copo subirá? Explique. (*b*) Se o cubo de gelo contém um pedaço de chumbo, o nível da água baixará quando o gelo fundir. Explique.
7. Quando uma fatia de limão é colocada em uma xícara de chá ela primeiro vai ao fundo da xícara para depois subir à tona. Dê uma explicação plausível para este fato.
8. O princípio de Arquimedes é obedecido em um vaso em queda livre? E em um satélite que se move em órbita circular? Explique.
9. Uma bola esférica, feita de cortiça, flutua com a metade submersa em uma xícara de chá em repouso na Terra. A cortiça afundará ou emergirá a bordo de uma nave espacial que navegue no espaço livre? E na superfície de Júpiter?
10. Dois corpos ocos têm o mesmo peso, volume e formas idênticas, mas um deles é aberto no fundo e o outro é fechado. Ambos são imersos na água à mesma profundidade. O trabalho necessário para afundar os dois corpos é o mesmo? Se não, qual deles requererá menos trabalho? Por quê?
11. Uma bola flutua na superfície da água, em um recipiente exposto à atmosfera. A bola afundará, emergirá ou permanecerá na mesma altura (*a*) se o recipiente for coberto e feito o vácuo? (*b*) se o recipiente for coberto e o ar comprimido?
12. Explique porque um balão cheio de gás, que comece a subir na atmosfera atinge apenas uma altura definida, enquanto um submarino descerá até o fundo do oceano, se começar a afundar e se nada for modificado.
13. Explique como um submarino emerge, submerge e mantém uma profundidade determinada. Os peixes usam os mesmos princípios? (Veja "The Buoyancy of Marine Animals", de Eric Denton, em *Scientific American*, julho, 1960, e "Submarine Physics", de G. P. Harnwell, em *American Journal of Physics*, março, 1948.)
14. Um balão de plástico macio tem o mesmo peso quando vazio e quando cheio de ar à pressão atmosférica. Por quê? Seria o peso o mesmo se fosse medido no vácuo?
15. Um vapor esburacado, que quase não consegue navegar no Mar do Norte, penetra no estuário do rio Tâmisa a caminho de Londres. Entretanto, ele afunda antes de chegar. Por quê?
16. É verdade que um objeto que flutua somente estará em equilíbrio estável se seu centro de empuxo estiver acima do seu centro de gravidade? Ilustre sua resposta com exemplos.
17. Por que razão os índios americanos não colocavam assentos em suas canoas?
18. Acontece muito freqüentemente a um navio que vai a pique, emborcar para em seguida imergir. Por quê?

19. De acordo com o que foi dito no Exemplo 3, 89% de um iceberg é submerso. Contudo, ocasionalmente, os icebergs emborcam, com resultados desastrosos para a navegação nas suas proximidades. Como pode isto ocorrer, considerando que a maior parte de sua massa está abaixo do nível do mar?
20. Uma barcaça que contém sucata de ferro está em uma eclusa de um canal de navegação. Se o ferro for atirado para fora da barcaça e cair na eclusa, o que sucederá ao nível de água desta?
21. Um balde, contendo água, está suspenso em uma balança de mola. A leitura da balança variará quando um pedaço de ferro, suspenso por um cordão, for imerso na água? E se um pedaço de cortiça for colocado na água?
22. Troncos de árvore que caem na vertical dentro de um reservatório não permanecem nesta posição, mas flutuam na horizontal dentro d'água. Explique.
23. Dê o motivo pelo qual um bastão de madeira uniforme, que flutua horizontalmente, quando não carregado, flutuará verticalmente se um peso suficiente for adaptado a uma de suas extremidades. Veja Probl. 31.
24. Um cilindro maciço é colocado em um recipiente, em contato com sua base. Vertendo líquido no recipiente, nenhum líquido penetra sob o cilindro, que se mantém aderido à base. O cilindro ficará submetido a um empuxo? Explique.
25. Avalie, com certo cuidado, o empuxo que a atmosfera exerce em você.
26. Em princípio, embora existam dificuldades práticas, é possível fazer flutuar um transatlântico em alguns barris de água. Como poderia isto ser feito?
27. Corpos situados no fundo da fossa Marianas (11.000 metros de profundidade) sofrem um empuxo (*a*) menor ou (*b*) maior do que na superfície do oceano?
28. Os alpinistas usam barômetros aneróides para avaliar sua altitude. Como estes instrumentos podem ser úteis considerando-se que a pressão atmosférica em um dado local não é constante?
29. O que há de errado nesta afirmativa: "A pressão atmosférica é 753 mm · Hg quando a atmosfera suporta, em um barômetro, uma coluna de mercúrio de 753 milímetros de comprimento?"
30. É importante que o diâmetro interno do tubo de um barômetro seja uniforme? E que este tubo seja absolutamente vertical?
31. Um manômetro de tubo aberto tem um dos ramos com diâmetro duplo do outro. Explique de que modo este fato afeta as medidas feitas com o manômetro. Haverá interesse em saber qual dos ramos do manômetro está ligado à câmara cuja pressão se quer medir?
32. Explique como um médico pode determinar a pressão sangüinea de seus pacientes.
33. Recipientes com líquidos tendem a vazar quando levados a altitudes em um avião. Por quê? Tem alguma relevância o fato de estarem ou não com o lado correto para cima? E de inicialmente estarem ou não completamente cheios?
34. Supondo que um barômetro de mercúrio à pressão atmosférica padrão, na superfície da Terra, marque 76,0 cm de altura na coluna de mercúrio, calcule qual seria a altura da coluna de mercúrio em um satélite artificial na órbita da Terra.
35. Um balde com água está colocado sobre um plano inclinado liso, que forma um ângulo α com a horizontal. Determine o ângulo de inclinação com a horizontal da superfície livre da água, quando: (*a*) o balde estiver em repouso, $a = 0$ e $v = 0$; (*b*) o balde descer o plano com velocidade constante, $a = 0$, $v =$ constante; (*c*) o balde descer o plano livremente, $a =$ constante. Se a superfície sobre a qual o balde deslizar for curva, de maneira que $a \neq$ constante, o que sucederá?
36. Se um tubo em U, contendo água, é posto a girar em torno de um eixo vertical que passe pelo centro de um dos ramos, o nível da água sobe em um ramo e desce no outro, em relação aos níveis correspondentes à posição de equilíbrio. Explique cuidadosamente. Veja Probl. 18.
37. Como a pressão é uma grandeza escalar e a força uma grandeza vetorial, como é possível produzir forças por ação de pressões?
38. Um tubo de paredes finas se rompe mais facilmente quando existe uma diferença entre a pressão interna e externa, se o excesso de pressão estiver no lado de fora. Explique.
39. Temos estudado os líquidos sob compressão. Podem eles ser colocados sob tensão? Em caso afirmativo, eles se romperiam sob tensão suficiente tal qual os sólidos? (Veja "The Tensile Strength of Liquids", de Robert E. Apfel em *Scientific American*, dezembro, 1972.)

problemas

SEÇÃO 17-2

1. Uma caixa possui uma tampa com área igual a 0,05 m^2. No interior da caixa existe uma pressão de 0,08 atm. Suponha que a tampa esteja fechada apenas pela ação da diferença de pressão entre a pressão atmosférica e a pressão no interior da caixa. Para retirar a tampa da caixa aplica-se uma força F formando um ângulo de 30° com a direção da normal, ao plano da tampa. Calcule o módulo mínimo de F para retirar a tampa da caixa, sabendo que a tampa só pode se mover na direção paralela à sua normal. Considere 1 atm = $1{,}013 \times 10^5$ N/m^2.

2. A pressão atmosférica pode ser considerada *constante* em todos os pontos de uma região de volume pequeno. Além disto, a pressão de um gás (ou de um fluido de um modo geral) é considerada *isotrópica*, isto é, a pressão é *igual em todas as direções* em torno de um dado ponto. A *força* produzida por esta pressão é portanto *ortogonal* a um elemento qualquer de superfície infinitesimal sobre um dado corpo. Considere a pressão exercida sobre a superfície de um corpo. Usando coordenadas esféricas mostre que a força sobre um elemento de área dA pode ser decomposta em três componentes dados por: $F_z = p\, dA \cos\theta$, $F_x = p\, dA \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ e $F_y = p\, dA \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$. Onde dA é o elemento de área em coordenadas esféricas, ou seja, $dA = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$.

3. Em 1654 Otto von Guericke fez o vácuo no interior dos hemisférios indicados na Fig. 17-12. (*a*) Mostre que a força F necessária para separar os dois hemisférios em função de R e da diferença de pressão p' entre a pressão atmosférica p e a pressão absoluta p_0 no interior dos hemisférios é dada por $F = \pi R^2 p'$. (*b*) Calcule o valor de F, supondo $R = 30$ cm e $p_0 = 0{,}07$ atm.

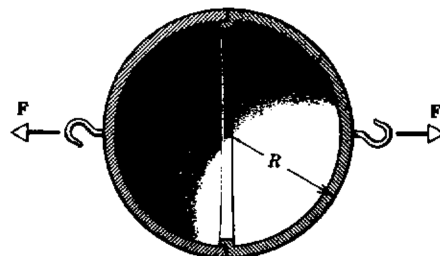


figura 17-12

SEÇÃO 17-3

4. A pressão num dado ponto abaixo da superfície do oceano é igual a 5 atm. A massa específica da água do mar vale 1,03 g/cm^3 e a pressão atmosférica sobre a superfície do mar vale $1{,}013 \times 10^5$ N/m^2. Calcule a profundidade do ponto considerado.
Resposta: 40,1 m.

5. A diferença de pressão hidrostática entre uma caixa-d'água e uma torneira é igual a 0,5 atm. Calcule a altura da caixa-d'água em relação à torneira. Considere a massa específica da água igual a 1 g/cm^3.

6. Iguale a pressão atmosférica com o peso, por unidade de área, de uma certa massa de ar. Com base neste raciocínio faça uma estimativa para a massa total da atmosfera terrestre. Considere os dados: raio médio da Terra igual a $6{,}37 \times 10^6$ m, $g = 10$ m/s^2, pressão atmosférica = 10^5 N/m^2. *Resposta:* 5×10^{18} kg.

7. Qual seria a altura da atmosfera se a densidade do ar (*a*) fosse constante e (*b*) diminuísse linearmente a zero com a altura? Suponha que a densidade ao nível do mar é 1,3 kg/m^3.

8. Determine a pressão atmosférica a 16 km acima do nível do mar.
Resposta: $1{,}6 \times 10^4$ Pa.

9. A altitude em que a pressão atmosférica é igual a $1/e$ da pressão ao nível do mar é chamada de *altura de escala* da atmosfera ao nível do mar. (*a*) Mostre que esta altura, H, seria a de uma atmosfera que tivesse em todos os pontos uma densidade igual à densidade do ar ao nível do mar e que aí exercesse a mesma pressão devida à atmosfera real, de espessura infinita. (*b*) Mostre que a *altura de escala* ao nível do mar é 8,6 km.

10. Um tanque aberto cheio de água possui as seguintes dimensões: 2 m × 1 m × 0,5 m. (*a*) Determine a pressão num ponto situado no fundo do tanque; considere a pressão atmosférica igual a $1{,}01 \times 10^5$ Pa. (*b*) Calcule a força total exercida pela água sobre o fundo do tanque. (*c*) Calcule a pressão sobre as paredes laterais a uma profundidade $h = 0{,}25$ m. (*d*) Determine o módulo da *força total resultante* que atua sobre a parede lateral do tanque que possui largura de 1 m e profundidade de 0,5 m.
Resposta: (*a*) $1{,}06 \times 10^5$ Pa. (*b*) $2{,}1 \times 10^5$ N. (*c*) $1{,}03 \times 10^5$ Pa. (*d*) 1.226 N.

11. Um tubo em U contém mercúrio. Despeja-se num dos lados do tubo um líquido imiscível com o mercúrio até que a altura do líquido atinja um nível de 48 cm acima do nível do mercúrio. O nível do mercúrio no outro ramo sobe de 1,4 cm. Calcule a massa específica do líquido introduzido no tubo. Massa específica do mercúrio = 13,6 g/cm^3.

12. Determine a altura z do ponto de aplicação da força obtida no item (*d*) do Probl. 10.
Resposta: $z = 16{,}67$ cm.

13. A face vertical de uma barragem retém água à altura D, como mostra a Fig. 17-13. Seja W a largura da barragem. (*a*) Ache a força horizontal resultante exercida na barragem devido à pressão manométrica da água e (*b*) o torque da força, devido à pressão manométrica da água, em relação à linha que passa pelo ponto O e que é paralela à largura da barragem. (*c*) Qual é a linha de ação da força resultante?

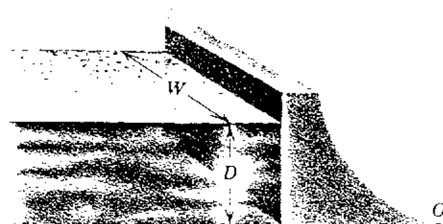


figura 17-13

14. Três líquidos não miscíveis são despejados no interior de um recipiente cilíndrico. A quantidade e a densidade de cada líquido são: 0,50 litros, 2,6 g/cm^3; 0,25 litros, 1,0 g/cm^3 e 0,40 litros, 0,80 g/cm^3. Qual é a força total atuante no fundo do recipiente? (Despreze a contribuição da atmosfera.) *Resposta:* 18 N.

15. Considere um recipiente contendo um líquido com massa específica ρ. O recipiente está apoiado no piso de um elevador. Determine a variação da pressão com a profundidade h

nos seguintes casos: (*a*) o elevador *sobe* com aceleração *a*, (*b*) o elevador *desce* com aceleração *a*, (*c*) o elevador desce em *queda livre*.

16. Considere um tanque aberto contendo água. O tanque é acelerado ao longo de uma linha reta num plano horizontal. Seja a o módulo da aceleração do tanque; suponha que o sentido da aceleração seja de Oeste para Leste. (*a*) Verifique se a parte mais elevada da superfície livre do líquido está ao lado Leste ou Oeste. (*b*) Obtenha a tangente do ângulo θ da inclinação da superfície livre da água em relação ao plano horizontal.
Resposta: (*a*) A parte mais elevada da superfície livre da água se situa no lado Oeste do tanque e a parte mais baixa se situa no lado Leste. (*b*) tg $\theta = a/g$.

17. Um recipiente aberto contém um óleo com massa específica igual a 0,8 g/cm³. Calcule a pressão absoluta em N/m² a uma profundidade de 2 m abaixo da superfície livre do óleo.

18. Um recipiente cilíndrico contendo um líquido gira com velocidade angular constante, conforme indicado na Fig. 17-14. (*a*) Mostre que o gradiente de pressão na direção radial é dado por: $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r$. (*b*) Mostre que o gradiente de pressão na direção vertical é dado por: $\partial p/\partial y = \rho g$. (*c*) Considere $p = p_c$ no eixo de rotação ($r = 0$); verifique que a pressão p em qualquer ponto da superfície livre do líquido é dada por: $p = p_c + \rho\omega^2 r^2/2$. (*d*) Verifique que a superfície livre do líquido é um *parabolóide de revolução;* escreva a equação da *parábola* no plano *yr*. *Resposta:* (*d*) $y = \omega^2 r^2/2g$.

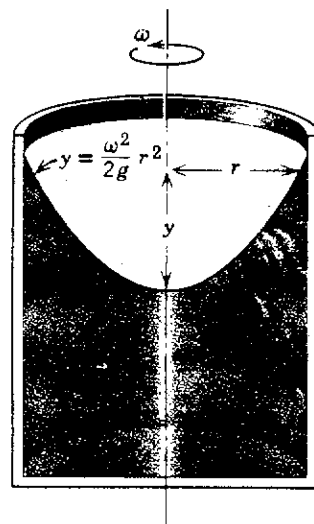


figura 17-14

SEÇÃO 17-4

19. Um pistão de pequena área a da seção transversal, é usado em prensa hidráulica, para exercer uma pequena força f no líquido contido na prensa. Um tubo faz a ligação deste líquido com um outro pistão, de área A maior (Fig. 17-15). (*a*) Que força F suportará o pistão de maior diâmetro? (*b*) Se o pistão menor tem diâmetro de 4,0 cm e o maior de 50 cm, que peso deve ser colocado sobre o menor para suportar 2,0 toneladas colocadas sobre o pistão maior?

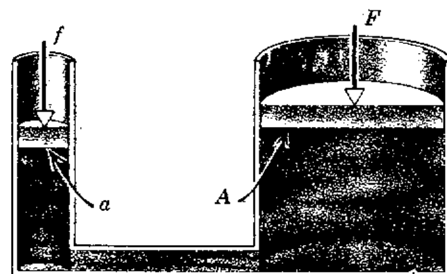


figura 17-15

20. Um balão ascende porque o gás do seu interior é menos denso do que o ar ambiente. Isto pode ser facilmente conseguido com a combustão de uma bucha, pois o ar quente é menos denso do que o ar ambiente. Suponha que o volume total do balão seja de 10 m³ e que a massa total do material do balão seja de 1,2 g/*l*. Sabendo-se que a aceleração inicial do balão é de 0,5 m/s², calcular a força de empuxo sobre o balão e a massa específica do gás do interior do balão. *Resposta:* Empuxo = 117,6 N; ρ = 0,94 kg/m³.

21. Um objeto cúbico cuja dimensão lateral é L (0,6 m) e peso W (4.000 N), no vácuo, é suspenso por uma corda em um tanque aberto, com água de densidade ρ (1,0 g/cm³), como indica a Fig. 17-16. (*a*) Determine a força total descendente exercida pela água e pela atmosfera no topo do objeto de área A (0,36 m²). (*b*) Determine a força total na base do objeto. (*c*) Determine a tensão na corda.

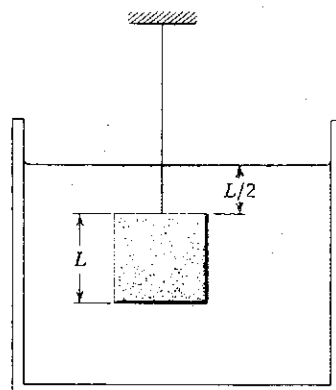


figura 17-16

22. Um corpo de massa m = 2 kg e volume V = 400 cm³ está suspenso na vertical a uma mola de constante k = 300 N/m. Inicialmente o sistema estava no interior de um recipiente sob vácuo. O corpo a seguir é imerso num recipiente contendo água. Calcule para o equilíbrio: (*a*) a elongação da mola antes de mergulhar o corpo na água; (*b*) a elongação da mola depois de mergulhar o corpo na água.
Resposta: (*a*) $y = mg/k$ = 6,5 cm; (*b*) $(m - \rho V)g/k$ = 5,2 cm.

23. Uma esfera é feita de um material de massa específica d e volume V. Determine o volume V' da cavidade esférica existente em seu interior para que ela flutue num líquido de massa específica ρ, mantendo uma fração V/n do seu volume dentro do líquido.

24. Um bloco de madeira flutua na água com dois terços de seu volume submersos. No óleo, 0,90 do seu volume fica submerso. Ache a massa específica (*a*) da madeira e (*b*) do óleo. *Resposta:* (*a*) 6,7 × 10² kg/m³. (*b*) 7,4 × 10² kg/m³.

25. Uma pedra pesa 200 N no vácuo e 150 N quando está imersa na água. Determine a massa específica da pedra.

26. Um corpo pesa 100 N, quando mergulhado num óleo de massa específica igual a 0,8 g/cm³. O mesmo corpo pesa 60 N quando ele está mergulhado na água. Calcule a massa específica do corpo. *Resposta:* 1,3 g/cm³.

27. Uma esfera oca de ferro flutua quase completamente imersa na água. O seu diâmetro externo mede 50 cm e a massa específica do ferro vale 7,8 g/cm³. Calcule o diâmetro interno da esfera.

28. Uma peça de ferro fundido, contendo várias cavidades, pesa 27 kgf no ar e 18 kgf na água. Qual o volume das cavidades na peça? Considere a densidade do ferro como sendo 7,8 g/cm³. *Resposta:* 5,5 × 10⁻³ m³.

29. Um cubo que flutua no mercúrio tem um quarto de seu volume submerso. Se acrescentarmos água suficiente para cobrir o cubo, (*a*) que fração de seu volume estará então imerso no mercúrio? (*b*) Sua resposta dependerá da forma do corpo?

30. Um tubo em U contém um líquido homogêneo. Durante certo tempo, um êmbolo faz baixar o nível do líquido em um dos ramos. Retirando o pistão, os níveis do líquido nos dois ramos oscilam. Mostre que o período de oscilação é $\pi\sqrt{2L/g}$, sendo L o comprimento total do líquido no tubo.

31. Um bastão cilíndrico, de madeira, é lastreado com chumbo em uma extremidade, de maneira que ele flutue verticalmente na água, como mostra a Fig. 17-17. A parte submersa mede l = 2,4 m. O bastão é posto em oscilação vertical. (*a*) Mostre que o movimento é harmônico simples. (*b*) Determine o período em segundos. Despreze o amortecimento que a água produz nas oscilações.

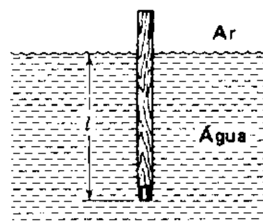


figura 17-17

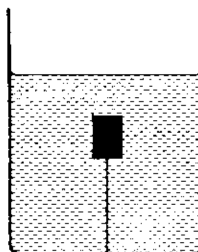
32. Um caminhão transporta um aquário cúbico de aresta igual a b. O aquário contém água até a metade da sua altura. Calcule a aceleração máxima do caminhão para que a água não transborde do aquário. *Resposta:* $a_{\text{máx.}} = g$.

33. Três meninos, cada um de peso W (360 N), fazem uma jangada amarrando toras, cujos diâmetro e comprimento são, respectivamente, D (0,3 m) e L (1,8 m). Quantas toras serão necessárias para construir a jangada e mantê-la em flutuação? Considere a densidade relativa da madeira como sendo 0,80.

34. (*a*) Qual é a área mínima de um bloco de gelo de 0,3 m de espessura para que flutue na água, suportando sobre si um automóvel de massa igual a 1.100 kg? (*b*) Onde quer que o carro seja colocado sobre o bloco de gelo, importa? *Resposta:* (*a*) 46 m^2 (*b*) Sim.

35. Uma longa barra de madeira, uniforme, com seção transversal flutua ou com duas faces opostas paralelas à água ou com todas as quatro faces formando um ângulo de 45° com a água. Qual dessas posições é assumida pela barra nos casos em que a densidade for de 0,20, 0,50 ou 0,80 g/cm^3?

36. A tensão em uma corda prendendo um bloco maciço abaixo da superfície de um líquido (de densidade maior que o bloco) é T_0 quando o vaso que o encerra (Fig. 17-18) está em repouso. Mostre que a tensão T, quando o vaso sofre uma aceleração ascendente vertical a, é dada por $T_0\ (1 + a/g)$.


figura 17-18

SEÇÃO 17-5

37. Tome como referência a Fig. 17-10 do final da Seção 17-5. Suponha que a pressão absoluta do gás do tanque seja igual a 1,5 atm. (*a*) Calcule o valor da pressão manométrica. (*b*) Ache a diferença de altura h entre o nível superior e o nível inferior do mercúrio no manômetro.

38. O manômetro indicado na Fig. 17-10 contém água. O ramo da direita do tubo em U está aberto para a atmosfera, enquanto que o ramo da esquerda está ligado a um gás que possui pressão absoluta p *menor* do que a pressão atmosférica. A diferença entre o nível superior da água e o nível inferior da água do manômetro é igual a 12 cm. (*a*) O nível da água do ramo direito do manômetro está *acima* ou *abaixo* do nível da água do ramo esquerdo? (*b*) Ache o *módulo* da *pressão manométrica*. (*c*) Calcule o valor da *pressão absoluta* p. *Resposta:* (*a*) Abaixo. (*b*) 1.177 Pa. (*c*) $p = 9{,}99 \times 10^4$ Pa.

18
dinâmica dos fluidos

18-1
CONCEITOS GERAIS SOBRE O ESCOAMENTO DOS FLUIDOS

Uma das maneiras de descrever o movimento dos fluidos consiste em imaginá-los divididos em elementos infinitesimais de volume, que podemos chamar de partículas do fluido, e acompanhar o movimento de cada uma delas. Isto constituiria uma tarefa enorme. Com efeito, deveríamos atribuir a cada partícula do fluido as coordenadas x, y, z e exprimi-las em função do tempo t. No instante t_0 uma dada partícula do fluido encontra-se no ponto de coordenadas x_0, y_0, z_0; suas coordenadas x, y, z, no instante t, seriam determinadas pelas funções $x(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$ e $z(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$, que então descreveriam o movimento do fluido. Este tratamento, que é uma generalização direta dos conceitos da mecânica das partículas, foi desenvolvido inicialmente por Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Existe um outro tratamento, devido a Leonhard Euler (1707-1783), que é mais conveniente na maioria dos casos. Neste método, abandonamos a tentativa de especificar o comportamento de cada partícula, a cada instante; em lugar disto, especificamos a densidade e a velocidade do fluido em cada ponto do espaço, a cada instante. Será este o método que adotaremos. Descrevemos o movimento do fluido especificando a massa específica $\rho(x, y, z, t)$ e a velocidade $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, no ponto (x, y, z), no instante t. Dessa forma, concentramos nossa atenção no que ocorre em um ponto particular do espaço, em um instante particular, e não no que está ocorrendo a uma determinada partícula do fluido. Qualquer grandeza usada para descrever o estado do fluido, por exemplo a pressão p, terá

valor definido em cada ponto do espaço e a cada instante. Embora esta descrição do movimento do fluido focalize a atenção em um ponto do espaço e não em uma partícula do fluido, isto não impede que acompanhemos as próprias partículas do fluido, pelo menos durante pequenos intervalos de tempo dt. Pois, afinal de contas, são as partículas do fluido que seguem as leis da mecânica e não os pontos do espaço.

A fim de entendermos a natureza das simplificações que serão feitas, consideremos algumas características gerais do escoamento dos fluidos.

1. O escoamento de um fluido pode ser *estacionário* ou *não-estacionário*. O movimento do fluido denomina-se estacionário quando sua velocidade **v**, em qualquer ponto, for independentemente do tempo, isto é, constante. Em outros termos, em qualquer ponto dado, se o escoamento for permanente, a velocidade de cada partícula do fluido que passa por este ponto é sempre a mesma. Em algum outro ponto uma partícula pode ter velocidade diferente, mas qualquer outra partícula que passe nesse segundo ponto comporta-se aí tal como aquela partícula ao passar no mesmo ponto. Essas condições podem ser alcançadas quando as velocidades de escoamento são pequenas, como é exemplificado por um córrego que escoa mansamente. Ao contrário, no escoamento *não-estacionário*, como, para exemplificar, em uma vaga de maré, as velocidades **v** *são* funções do tempo. No caso de escoamento turbulento, como acontece nas cachoeiras e quedas d'água, as velocidades variam ao acaso, de um ponto a outro, assim como de um instante para o seguinte.

2. O escoamento dos fluidos pode ainda ser classificado como *rotacional* ou *irrotacional*. Se, em cada ponto, um elemento do fluido possui velocidade angular resultante nula, em torno daquele ponto, o escoamento chama-se irrotacional. Podemos imaginar uma pequena roda de pás imersa em um fluido móvel (Fig. 18-1). Se a roda se mover sem girar, o movimento é irrotacional; em caso contrário ele se diz rotacional. O escoamento rotacional abrange movimentos turbulentos, tais como os redemoinhos.

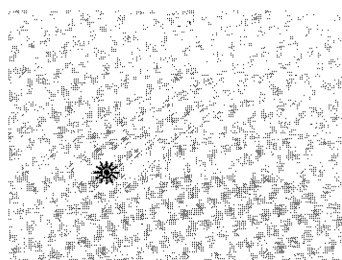


figura 18-1
Uma pequena roda d'água colocada em um fluido em movimento gira quando o escoamento é rotacional mas não se ele for irrotacional.

3. O escoamento de um fluido pode também ser *compressível* ou *incompressível*. O escoamento dos líquidos pode geralmente ser considerado *incompressível*, porém mesmo um gás altamente compressível pode, em certos casos, sofrer pequenas variações de massa específica; seu escoamento será então praticamente incompressível. No vôo a velocidades muito inferiores à do som no ar (descrito pela aerodinâmica subsônica), o movimento do ar em relação às asas é um escoamento quase incompressível. Em tais casos a massa específica ρ é constante, independente de x, y, z e t, e o tratamento matemático do escoamento do fluido é por isso muito simplificado.

4. Finalmente, o escoamento de um fluido pode ser *viscoso* ou *não-viscoso*. A viscosidade do movimento de um fluido é análoga ao atrito no movimento dos sólidos. Em muitos casos, tais como nos problemas de lubrificação, ela é extremamente importante; outras vezes, entretanto, é desprezível. A viscosidade introduz forças tangenciais entre camadas do fluido que possuem movimento relativo, resultando em dissipação da energia mecânica.

Limitaremos nosso estudo da dinâmica dos fluidos quase exclusivamente ao escoamento *estacionário*, *irrotacional*, *incompressível* e

não-viscoso. As simplificações matemáticas resultantes são evidentes. Corre-se o perigo, entretanto, de fazer tantas suposições simplificadoras que acabemos por não tratar mais de um fluido real.[1] Além disso, às vezes é difícil decidir se uma dada propriedade de um fluido — por exemplo, sua viscosidade — pode ser desprezada em dada situação. A despeito de tudo isto, a análise limitada que vamos fazer tem ampla aplicação na prática, como veremos.

18-2 *LINHAS DE CORRENTE*

No escoamento estacionário, a velocidade **v** em dado ponto é independente do tempo. Consideremos o ponto *P* (Fig. 18-2) dentro do fluido. Desde que **v** em *P* não varia com o tempo, qualquer partícula que chegue a *P* passará por este ponto com a mesma velocidade vetorial. Isto é igualmente válido para os pontos *Q* e *R*. Portanto, se traçarmos a trajetória da partícula, como foi feito na figura, a curva representará a trajetória de qualquer partícula que chegue a *P*. Esta curva denomina-se *linha de corrente.* A velocidade das partículas do fluido é tangente à linha de corrente em qualquer ponto. Duas linhas de corrente jamais se cruzam, pois, se isto acontecesse, uma partícula do fluido que alcançasse *P* poderia seguir uma ou outra trajetória e o escoamento não seria mais estacionário. No escoamento estacionário as linhas de corrente são estacionárias no tempo.[2]

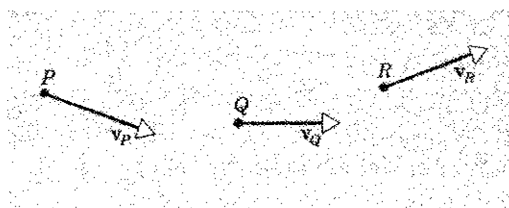


figura 18-2
Uma partícula que passe pelos pontos *P*, *Q*, *R* descreve uma linha de corrente, supondo que o escoamento seja estacionário. Qualquer outra partícula que passe por *P* deve descrever a mesma linha de corrente, se o escoamento for estacionário.

Em princípio podemos desenhar uma linha de corrente que passe por qualquer ponto do fluido. Suponhamos que haja escoamento estacionário e escolhamos um número finito de linhas de corrente, de forma a formar um feixe, como indica a Fig. 18-3. Esta região tubular denomina-se *tubo de escoamento.* O contorno de tal tubo é constituído de linhas de corrente e é sempre paralelo à velocidade das partículas do fluido. Portanto, nenhum fluido pode atravessar o contorno de um tubo de escoamento, que se comporta como uma canalização de mesma forma. O fluido que entra em uma extremidade deve sair na outra.

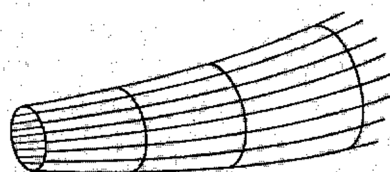


figura 18-3
Um tubo de escoamento constituído de um feixe de linhas de corrente.

[1] Richard Feynman menciona que o falecido John von Neuman chamava a esse fluido idealizado de "água seca".

[2] A família de linhas de corrente em um fluido é traçada de forma que, em qualquer ponto, a direção da velocidade instantânea **v** da partícula do fluido seja tangente à linha de corrente naquele ponto. No escoamento não-estacionário o conjunto das linhas de corrente varia com o tempo e a trajetória de uma partícula determinada do fluido não coincide com uma linha de corrente de um determinado instante. A linha de corrente e a linha de movimento da partícula tocam-se no ponto, localizando a partícula no instante considerado. A trajetória ou linha de movimento e a linha de corrente coincidem apenas no caso de escoamento estacionário.

Na Fig. 18-4 está representado um tubo de escoamento estreito. A velocidade do fluido em seu interior, embora seja paralela ao tubo em cada ponto, pode ter valores diferentes em diferentes pontos. Seja v_1 o módulo da velocidade da partícula em P e v_2 em Q. Sejam A_1 e A_2 as áreas das seções transversais do tubo, perpendiculares às linhas de corrente em P e Q, respectivamente. Em um intervalo de tempo Δt um elemento de fluido desloca-se aproximadamente de $v\Delta t$. Então, a massa de fluido Δm_1 que atravessa a seção A_1 no intervalo Δt é, aproximadamente,

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t,$$

ou seja, o *fluxo de massa* $\Delta m_1/\Delta t$ é aproximadamente $\rho_1 A_1 v_1$. Devemos fazer Δt suficientemente pequeno para que v e A permaneçam aproximadamente constantes, ao longo da distância que o fluido percorre neste intervalo. No limite, quando $\Delta t \to 0$, obtemos a definição precisa:

$$\text{fluxo de massa em } P = \rho_1 A_1 v_1$$

e

$$\text{fluxo de massa em } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

onde ρ_1 e ρ_2 são as massas específicas do fluido em P e Q, respectivamente. Como nenhum fluido pode atravessar as paredes do tubo e não há "fontes" ou "sorvedouros" pelos quais o fluido possa ser criado ou destruído no interior do tubo, a massa de fluido que atravessa cada seção transversal do tubo, por unidade de tempo, deve ser a mesma. Em particular, o fluxo de massa em P deve ser igual ao seu valor em Q:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

ou

$$\rho A v = \text{constante}. \qquad (18\text{-}1)$$

Este resultado expressa a lei da conservação da massa na dinâmica dos fluidos.

Você esperaria que a Eq. 18-1 fosse observada quando o escoamento é (*a*) não-estacionário, (*b*) rotacional (*c*) compressível, ou (*d*) viscoso?

Nos casos mais gerais, quando fontes e sorvedouros de fluido estão presentes e nos quais a massa específica varia com o tempo e a posição, a massa ainda deve ser conservada. Daremos, a seguir (sem demonstração), uma *equação de continuidade* que expressa este fato:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = S, \qquad (18\text{-}2)$$

na qual v_x, v_y e v_z são as componentes da velocidade do fluido; como a massa específica, ρ, elas variam com o tempo e com a posição.[3]

Consideremos um elemento de volume neste fluido. Pode-se mostrar que:

1. A soma dos três primeiros termos da Eq. 18-2 dá o fluxo de massa resultante, por unidade de volume, que sai do elemento de volume.

2. O quarto termo dá a taxa, por unidade de volume, segundo a qual a massa se acumula no elemento de volume.

[3] Como estas quatro grandezas são funções de mais de uma variável, escrevemos as derivadas, na Eq. 18-2, como derivadas parciais.

18-3 EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE

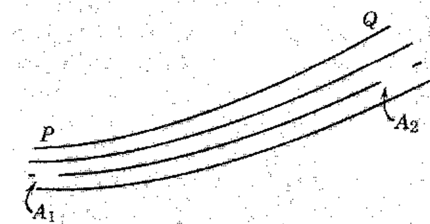


figura 18-4
Um tubo de escoamento usado para deduzir a equação de continuidade.

3. O último termo, S, dá a taxa por unidade de volume na qual a massa entra no elemento de volume através da fonte, se S for positivo, ou em que é retirada se S for negativo, através do sorvedouro. Com esta interpretação dos termos da Eq. 18-2, fica claro que ela nada mais é que uma expressão da conservação da massa no escoamento dos fluidos. Esta equação é dimensionalmente correta? Se $S = 0$ na Eq. 18-2, não há fontes ou sorvedouros. Se a soma dos três primeiros termos é negativa há um fluxo de massa não-nulo que penetra no elemento de volume e assim a massa contida no elemento de volume deve aumentar com o tempo, à medida que o fluido vai se acumulando. Isto está de acordo com a Eq. 18-2, porque, nas condições consideradas, $\partial\rho/\partial t$ deve ser positivo, o que significa que a densidade do fluido (e conseqüentemente sua massa) no elemento de volume aumenta com o tempo.

Se o fluido for incompressível, como vamos supor daqui por diante, $\rho_1 = \rho_2$ e a Eq. 18-1 toma a forma mais simples

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

ou

$$Av = \text{constante.} \tag{18-3}$$

O produto Av fornece o *fluxo de volume*, ou *vazão*, como é comumente chamado. Em unidades SI, m^3/s. Observe que, pode-se prever que em um escoamento permanente e incompressível a velocidade do escoamento é inversamente proporcional à área da seção transversal, tornando-se maior nas partes mais estreitas do tubo. O fato de o produto Av permanecer constante ao longo do tubo permite-nos interpretar o desenho das linhas de corrente. Em uma parte estreita do tubo as linhas de corrente devem ser mais próximas umas das outras do que nas partes mais largas. Assim, à medida que as linhas de corrente se aproximam, a velocidade do fluido deve aumentar e podemos concluir que linhas de corrente muito espaçadas indicam regiões de baixa velocidade e linhas de corrente pouco espaçadas indicam regiões de alta velocidade.

Pode-se obter outro resultado interessante aplicando a segunda lei do movimento ao escoamento do fluido entre P e Q (Fig. 18-4). Uma partícula do fluido tem em P a velocidade v_1 e deve ser desacelerada para adquirir em Q a velocidade menor v_2. Isto é, o fluido é desacelerado ao passar de P para Q. Este retardamento pode provir de uma diferença de pressão que atue na partícula do fluido, ao passar de P para Q, ou da ação da gravidade. Se o tubo de escoamento for horizontal, a força gravitacional não varia; portanto, podemos concluir que em um escoamento estacionário horizontal a pressão é maior onde a velocidade é menor.

Você já esteve alguma vez em meio a uma multidão que tenta passar através de uma pequena porta? Na retaguarda, atrás da multidão, a área da seção é grande, a pressão também grande, mas a velocidade de avanço bastante pequena. Na porta, a seção é menor, a pressão é bastante reduzida e a velocidade do avanço é muito maior. Este "fluido humano" peculiar é, sem dúvida, compressível e viscoso e seu escoamento é às vezes turbulento e rotacional.

18-4 *EQUAÇÃO DE BERNOULLI*[4]

A equação de Bernoulli é uma relação fundamental da mecânica dos fluidos. Como todas as equações da mecânica dos fluidos, ela não é um princípio novo, mas deriva das leis básicas da Mecânica

[4] Existem oito Bernoullis na Enciclopédia Britânica (11.ª edição). Aqui estamos tratando com Daniel Bernoulli (1700-1782), talvez o membro mais renomado desta famosa família.

Newtoniana. Verificaremos que é conveniente deduzi-la a partir do teorema do trabalho-energia (veja Seç. 7-4), pois ela é, essencialmente, um outro enunciado desse teorema, adequado ao escoamento dos fluidos.

Consideremos o escoamento estacionário de um fluido não-viscoso e incompressível através da canalização ou tubo de escoamento representado na Fig. 18-5. O trecho mostrado na canalização tem, à esquerda, seção transversal uniforme de área A_1; esta parte é horizontal e está situada, em relação a um certo nível de referência, à altura y_1. O tubo se alarga e se eleva gradualmente, de tal modo que o trecho à direita tem seção transversal uniforme de área A_2 e está, em relação ao mesmo nível de referência, à altura y_2. Concentremos nossa atenção nas porções de fluido hachuradas horizontal e obliquamente e chamemos a estas porções de "sistema". Estudemos então o movimento do sistema entre a posição mostrada em (*a*) e a posição mostrada em (*b*). Em todos os pontos da parte estreita do tubo a pressão é p_1 e a velocidade v_1; em todos os pontos da parte mais larga a pressão é p_2 e a velocidade v_2.

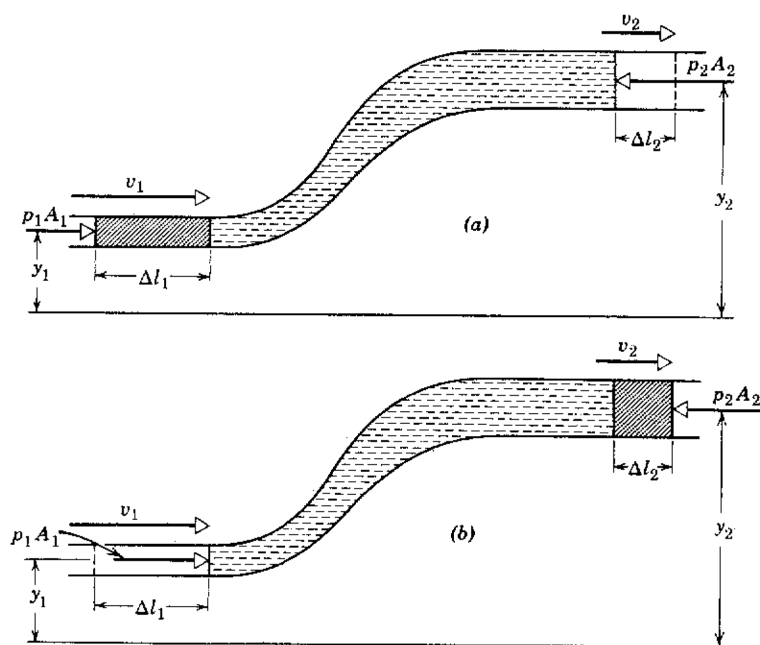


figura 18-5
Uma porção de fluido (hachuras horizontais e verticais) move-se ao longo de um conduto, desde a posição indicada em (*a*) até a posição representada em (*b*).

O teorema do trabalho-energia (veja Eq. 7-14) estabelece que *o trabalho realizado pela resultante das forças que atuam em um sistema é igual à variação da energia cinética do sistema.* Na Fig. 18-5, supondo desprezível a viscosidade, as forças que realizam trabalho sobre o sistema são as forças de pressão p_1A_1 e p_2A_2, que atuam, respectivamente, nas extremidades esquerda e direita, e a força da gravidade. Enquanto o fluido escoa através do tubo, o efeito resultante, evidenciado pela comparação da Fig. 18-5*a* com a Fig. 18-5*b*, será o transporte da porção de fluido representada pela área hachurada obliquamente, que passa da posição mostrada na Fig. 18-5*a* para a posição mostrada na Fig. 18-5*b*. A porção de fluido assinalada com hachuras horizontais permanece invariável enquanto o fluido escoa.

Pode-se determinar o trabalho, W, realizado pela força resultante sobre o sistema, como se segue:

1. O trabalho realizado sobre o sistema pela força de pressão p_1A_1 é $p_1A_1\Delta l_1$.

2. O trabalho realizado sobre o sistema pela força de pressão p_2A_2 é $-p_2A_2\Delta l_2$, é negativo, o que significa que *o sistema* realiza um trabalho positivo.

3. O trabalho realizado pela gravidade sobre o sistema está associado à elevação da porção de fluido representada por hachuras inclinadas, desde a altura y_1 à altura y_2 e vale $-mg(y_2 - y_1)$; m é a massa da porção de fluido contido em qualquer uma das áreas hachuradas obliquamente. Também este trabalho é negativo, porque o sistema realiza trabalho *contra* as forças gravitacionais.

O trabalho, W, realizado *sobre* o sistema pela força *resultante* é obtido somando os três termos considerados, ou seja,

$$W = p_1A_1\Delta l_1 - p_2A_2\Delta l_2 - mg(y_2 - y_1).$$

Ora, $A_1\Delta l_1$ ($= A_2\Delta l_2$) é o volume do elemento de fluido representado pela área de hachuras inclinadas, que pode ser expresso por m/ρ, sendo ρ a densidade do fluido (suposta constante). Observe que os dois elementos têm a mesma massa, logo, ao fazer $A_1\Delta l_1 = A_2\Delta l_2$, estamos supondo que o fluido seja incompressível. Com esta suposição teremos:

$$W = (p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1). \qquad (18\text{-}4a)$$

A variação de energia cinética do elemento de fluido é

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2{}^2 - \tfrac{1}{2}mv_1{}^2. \qquad (18\text{-}4b)$$

Através do teorema do trabalho-energia teremos (Eq. 7-14)

$$W = \Delta K$$

ou

$$(p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}mv_2{}^2 - \tfrac{1}{2}mv_1{}^2, \qquad (18\text{-}5a)$$

que pode ser escrito sob a seguinte forma:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1{}^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2{}^2 + \rho g y_2. \qquad (18\text{-}5b)$$

Como os índices 1 e 2 se referem a duas posições *quaisquer* no tubo de escoamento, podemos suprimi-los escrevendo:

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}. \qquad (18\text{-}6)$$

Esta equação é chamada *equação de Bernoulli* para escoamento estacionário, incompressível e não-viscoso. Ela foi apresentada pela primeira vez por Daniel Bernoulli (1700-1782) em sua *Hydrodynamica*, em 1738.

A equação de Bernoulli é aplicável, a rigor, apenas ao escoamento estacionário, as grandezas envolvidas sendo avaliadas ao longo de uma linha de corrente. Em nosso caso, a linha de corrente usada tem a direção do eixo do conduto. Se o escoamento foi irrotacional, entretanto, pode-se mostrar (veja o Probl. 25 para esse caso especial) que a constante da Eq. 18-6 é a mesma para *todas* as linhas de corrente.

Em um fluido incompressível e não-viscoso, não podemos alterar a temperatura do fluido por meios mecânicos. Por isso a equação de Bernoulli, tal como foi apresentada acima, refere-se a processos isotérmicos (isto é, em que a temperatura permaneça constante). É possível, no entanto, modificar a temperatura de um fluido *compressível* não-viscoso por meios mecânicos. A equação pode ser generalizada, de modo a incluir este caso, acrescentando a seu primeiro membro um termo u que represente a *energia interna* por unidade de volume do fluido. Este termo (e a pressão p) terá um valor que depende da temperatura.

Se o escoamento for viscoso, atuarão forças de mesma natureza que as de atrito, de forma que parte do trabalho realizado, que apareceu como variação da energia cinética no caso de fluido não-viscoso, comparece agora como energia térmica do fluido. Deve-se por isso escrever a Eq. 18-5*a* sob a forma

$$(p_1 - p_2)(m/\rho) - mg(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 + Q,$$

onde Q representa a energia térmica gerada no escoamento viscoso do ponto 1 para o ponto 2. Na prática, a equação de Bernoulli pode ser modificada adequadamente, utilizando-se correções empíricas para a conversão da energia mecânica em energia térmica. Todavia, se a tubulação for lisa e seu diâmetro grande, se comparado ao comprimento e se o escoamento do fluido for lento e pequena a viscosidade, o calor desenvolvido é desprezível.

Tal como a estática de uma partícula é um caso especial da dinâmica da partícula, também a estática dos fluidos constitui um caso particular da dinâmica dos fluidos. Não é de surpreender, por isso, que a lei da variação de pressão com a altura, em um fluido em repouso, esteja incluída na equação de Bernoulli, como caso especial. Com efeito, se o fluido se encontra em repouso, $v_1 = v_2 = 0$ e a Eq. 18-5*b* transforma-se em

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2,$$

isto é,

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

que é a Eq. 17-3.

Todos os termos da Eq. 18-6 têm as dimensões de pressão (verifique isto). A pressão $p + \rho gh$, que existe mesmo quando não há escoamento ($v = 0$) denomina-se *pressão estática*; o termo $\frac{1}{2}\rho v^2$ chama-se *pressão dinâmica.*

18-5 *APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE BERNOULLI E DA CONTINUIDADE*

A equação de Bernoulli pode ser empregada para determinar a velocidade de fluidos, mediante a medida de pressões. O princípio geralmente usado nesses dispositivos de medidas é o seguinte. A equação de continuidade exige que a velocidade do fluido aumente em um estrangulamento; de acordo com a equação de Bernoulli, haverá nessa região uma queda de pressão. Isto é, em uma canalização horizontal, $\frac{1}{2}\rho v^2 + p$ é constante; se v aumentar e o fluido for incompressível, p deverá diminuir. Este resultado foi deduzido também, por um raciocínio dinâmico, na Seç. 18-3.

1 Medidor de Venturi

Trata-se de um medidor (Fig. 18-6) que é colocado em uma canalização cuja seção reta tem área A, a fim de medir a velocidade de escoamento de um líquido, de massa específica ρ, que flui através dela. No estrangulamento a área é reduzida para a, introduzindo-se aí uma extremidade de um manômetro, como está indicado. Seja ρ' a massa específica do líquido manométrico, por exemplo, mercúrio. Aplicando as equações de Bernoulli e a de continuidade aos pontos

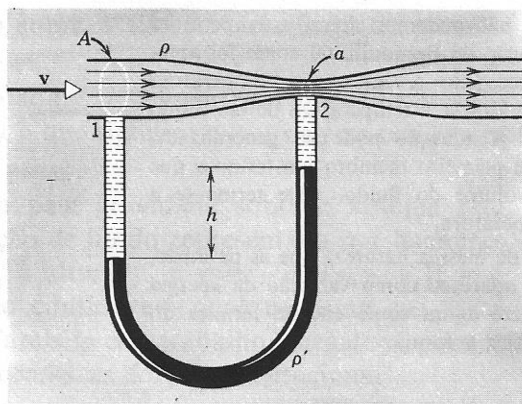


figura 18-6
Tubo de Venturi, usado para medir a velocidade de escoamento de um fluido.

1 e 2, é fácil mostrar que a velocidade de escoamento no ponto A é dada por

$$v = a\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}.$$

Se desejarmos o fluxo de volume ou *vazão* R, isto é, o volume de líquido que atravessa em cada segundo a seção reta da canalização, temos apenas de calcular

$$R = vA.$$

2
Tubo de Pitot

Este dispositivo (Fig. 18-7) é utilizado para medir a velocidade de escoamento de um gás. Consideremos o gás — ar, por exemplo — que escoa através das aberturas existentes em a. Essas aberturas são paralelas à direção de escoamento e suficientemente afastadas na parte posterior para que a velocidade e a pressão fora delas não sejam perturbadas pelo tubo. A pressão no ramo esquerdo do manômetro, que está ligado a essas aberturas é, por isso, a pressão estática da corrente de gás, p_a. A abertura do ramo direito do manômetro é perpendicular à corrente. A velocidade reduz-se a zero em b e o gás aí fica estagnado; portanto, nessa região a pressão é a pressão total, p_b. Aplicando a equação de Bernoulli aos pontos a e b obtém-se

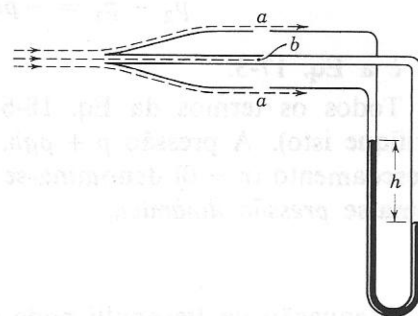


figura 18-7
Corte transversal de um tubo de Pitot.

$$p_a + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = p_b,$$

em que p_b, como mostra a figura, é maior do que p_a. Sendo h a diferença entre as alturas do líquido nos ramos do manômetro e ρ' a massa específica do líquido manométrico, resulta

$$p_a + \rho' gh = p_b.$$

Comparando as duas equações encontra-se

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 = \rho' gh$$

isto é,

$$v = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}},$$

que fornece a velocidade do gás. Este medidor pode ser calibrado de modo a fornecer v diretamente, tornando-se nesse caso um velocímetro.

3 Empuxo dinâmico

O empuxo dinâmico é a força exercida sobre um corpo, tal como a asa de um avião, hidrofólio ou o rotor de um helicóptero, devida ao movimento desses corpos em um fluido. Devemos distingui-la do *empuxo estático*, que é a força de flutuação que atua em um objeto, tal como um balão, de acordo com o princípio de Arquimedes (Seç. 17-4).

A Fig. 18-8 mostra as linhas de corrente em torno de um aerofólio (ou seção transversal de asa).[5] Escolhemos um aeroplano como nosso referencial, como em uma experiência de túnel de vento, e façamos a hipótese que o ar se desloca sobre a asa, da direita para a esquerda.

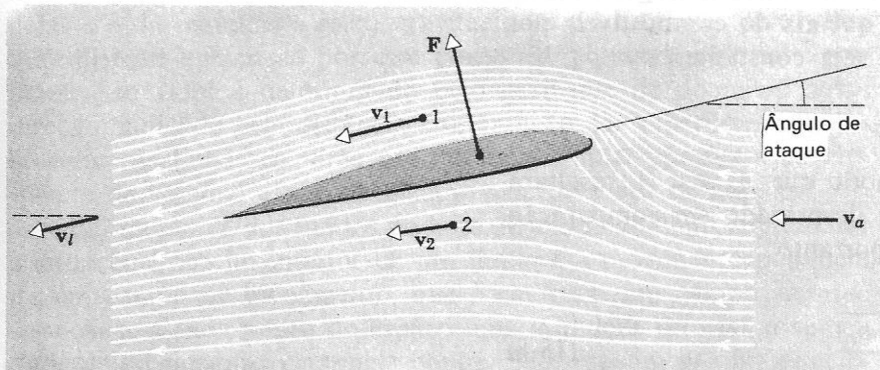


figura 18-8
Linhas de corrente em torno de um aerofólio. A velocidade do ar incidente $\mathbf{v}_a$ é horizontal. A do ar refletido $\mathbf{v}_l$ tem um componente para baixo. Portanto, como o aerofólio forçou o ar para baixo, o ar, pela terceira Lei de Newton, deve forçá-lo para cima. Isto é representado pelo "empuxo" **F**.

O *ângulo de ataque* da asa faz com que o ar seja defletido para baixo. Na terceira Lei de Newton a reação desta força para baixo, exercida pela asa sobre o ar, é uma força para cima **F**, o empuxo, exercido pelo ar sobre a asa.

A configuração das linhas de corrente é consistente. Acima da asa (ponto 1) as linhas de corrente são mais próximas umas das outras enquanto que abaixo (ponto 2) são mais afastadas. Portanto, $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$ e, do princípio de Bernoulli, $p_1 < p_2$ que deve ser verdade, se existe um empuxo.

4 Empuxo sobre um foguete

Como exemplo final calculemos o empuxo sobre um foguete, produzido pelo escapamento dos gases expulsos. Consideremos uma câmara (Fig. 18-9) de área transversal A, que contém um gás de massa específica ρ à pressão p. Suponhamos que na parte inferior da câmara exista um pequeno orifício de área transversal A_0. Deseja-se determinar a velocidade v_0 com a qual os gases escapam pelo orifício.

A equação de Bernoulli (Eq. 18-5*b*) pode ser escrita sob a forma

$$p_1 - p_2 = \rho g(y_2 - y_1) + \tfrac{1}{2}\rho(v_2{}^2 - v_1{}^2).$$

A massa específica de um gás é tão pequena que podemos desprezar a variação de pressão com a altura, dentro da câmara (ver Seç. 17-3). Portanto, se p representar a pressão p_1 no interior da câmara e p_0 a pressão atmosférica, p_2, no lado de fora, tem-se

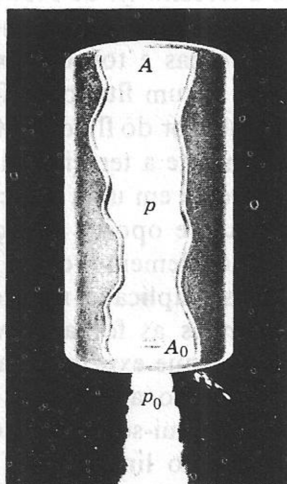


figura 18-9
Corrente de fluido escapando de uma câmara.

[5] Ver "Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics", Norman F. Smith, *The Physics Teacher* Novembro 1972.

Ver também *The Flettner Ship*, um artigo de Albert Einstein em seu livro *Essays in Science*, Phylosophical Library, New York. O barco Flettner, como um veleiro, utiliza a força do vento como potência propulsora. Ao contrário do veleiro ele tem um grande cilindro que gira em torno de um eixo vertical por ação de um motor. O empuxo dinâmico resultante (neste caso, horizontal) impulsiona o barco.

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho(v_0{}^2 - v^2)$$

ou seja,

$$v_0{}^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \qquad (18\text{-}7)$$

sendo v a velocidade do gás que sai da câmara e v_0 a *velocidade de escape* do gás pelo orifício. Embora o gás seja compressível e o escoamento possa tornar-se turbulento, ele poderá ser considerado estacionário e o fluido incompressível se a pressão e a velocidade de escape não forem muito elevadas.

Suponhamos agora que o escoamento de massa seja contínuo (em um motor de foguete isto ocorre quando a massa do gás expulso iguala a massa de gás produzida pela queima do combustível), por isso, supondo que a massa específica seja constante,

$$Av = A_0 v_0.$$

Se o orifício for muito pequeno, de modo que $A_0 << A$, resultará $v_0 >> v$ e na Eq. 18-7, v^2 poderá ser desprezado em comparação com $v_0{}^2$. A velocidade de escape é portanto

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \qquad (18\text{-}8)$$

Tratando-se da câmara de um foguete, o empuxo sobre ele (Seç. 9-7) é $v_0 dM/dt$; a massa de gás expelida no intervalo dt é $dM = \rho A_0 v_0 dt$, resultando

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0{}^2,$$

e pela Eq. 18-8 o empuxo é

$$2A_0(p - p_0). \qquad (18\text{-}9)$$

18-6 *CONSERVAÇÃO DO MOMENTO NA MECÂNICA DOS FLUIDOS*

Na Mecânica Newtoniana da partícula, a dedução das leis de conservação do momento linear e do momento angular utiliza explicitamente a terceira lei de Newton. As forças e torques internos de um sistema mecânico cancelam-se devido à terceira lei, e portanto apenas as forças e torques externos contribuem para os momentos. No caso de um fluido, as forças internas são representadas pela pressão no interior do fluido. Mas o próprio conceito de pressão contém implicitamente a terceira lei de Newton. A força, produzida pela pressão, exercida em uma direção através de qualquer elemento de superfície é igual e oposta à força exercida no sentido contrário através do mesmo elemento de superfície. Além disso, cada uma dessas duas forças é aplicada no mesmo ponto, isto é, no elemento de superfície. Ambas as forças devem ter a mesma direção; portanto, nas equações que exprimem a variação temporal do momento linear ou do momento angular de um fluido, as pressões internas se cancelarão. Conclui-se, portanto, que a taxa de variação com o tempo do momento linear total em um volume V de fluido em movimento é igual à *força externa* total que atua nele. De modo semelhante, a taxa de variação com o tempo do momento angular total em um volume V de fluido em movimento é igual ao *momento*

externo total que age nele. Seguem-se daí as leis do momento linear e do momento angular.

18-7 *CAMPOS DE ESCOAMENTO*

No capítulo sobre gravitação vimos como descrever as propriedades físicas nas proximidades das massas, utilizando o conceito de campo. A cada ponto de um campo pode ser associado um vetor, isto é, **g**, a força gravitacional por unidade de massa nesse ponto. Alternativamente, podemos associar uma grandeza escalar a cada ponto do espaço, o potencial gravitacional *V*. Pode-se então desenhar uma superfície — a superfície eqüipotencial — que passe por todos os pontos de mesmo potencial. Se desenharmos várias dessas superfícies, tais que seja constante a diferença entre o potencial de uma delas e o da seguinte, a força gravitacional em qualquer ponto tem uma direção que passa por esse ponto e é perpendicular às superfícies; seu valor é determinado pelo gradiente de potencial nessa direção, indicado pela distância e orientação das superfícies eqüipotenciais. As linhas de força proporcionam uma representação eloqüente de como o espaço é afetado pela presença de massas.

Em mecânica dos fluidos pode-se, de modo análogo, representar a situação física no interior de um fluido em movimento por meio de um campo de escoamento, que é em geral um campo *vetorial*. Associa-se a cada ponto do espaço uma grandeza vetorial, a velocidade de escoamento **v** naquele ponto. Se o escoamento for estacionário, o mesmo ocorrerá ao campo de escoamento. Está claro que mesmo neste caso uma partícula determinada do fluido pode ainda ter uma velocidade variável, quando passar de um ponto do campo para outro. O campo proporciona as propriedades do espaço dos quais se deduz o comportamento das partículas nesse espaço. Se o escoamento for irrotacional, além de estacionário, ele se denomina *escoamento potencial*. Então a velocidade de escoamento **v** pode ser relacionada a um potencial de velocidade ψ, tal como, na gravitação, **g** pode ser relacionada com o potencial gravitacional *V*. Se desenharmos superfícies de mesmo potencial de velocidade, como antes desenhamos superfícies de mesmo potencial gravitacional, podemos deduzir **v** a partir das superfícies de escoamento eqüipotencial, assim como **g** é deduzida a partir das superfícies eqüipotenciais gravitacionais. Conclui-se que um campo de escoamento potencial é análogo a um campo de força conservativo.

Uma certa massa de fluido em movimento pode ser sempre dividida em tubos de escoamento. Quando este é estacionário, os tubos mantêm forma inalterável e o fluido que em dado instante se encontre em um tubo aí permanece. Vimos que a velocidade de escoamento dentro de um tubo é paralela à sua superfície e tem valor inversamente proporcional à área da seção transversal (Eq. 18-1). Suponhamos que as seções transversais dos tubos sejam tais que a constante de proporcionalidade seja a mesma para todos eles. Essa constante pode ser 1, isto é, a vazão é a mesma para todos os tubos e é unitária. O valor da velocidade de escoamento pode ser determinado a partir das áreas da seção transversal dos tubos de escoamento. Existe outro processo, equivalente a este, e que consiste em escolher uma área unitária perpendicular à direção de escoamento e desenhar por essa área um número de linhas de corrente igual ao valor numérico do módulo da velocidade naquele ponto.

Consideremos alguns exemplos de campos de escoamento; para facilitar o desenho vamos tomar apenas casos *bidimensionais*. Nesses, a velocidade de escoamento é a mesma em todos os pontos localizados sobre uma linha perpendicular ao plano.

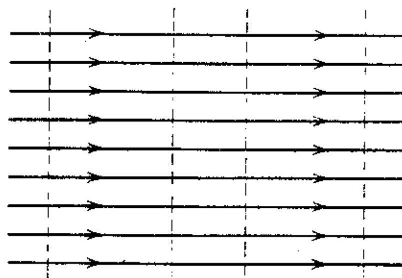


figura 18-10
Linhas de corrente (horizontais) e superfícies de mesmo potencial de velocidade (verticais) para um campo homogêneo de escoamento.

Na Fig. 18-10 foi desenhado um *campo homogêneo* de escoamento, em que todas as linhas de corrente são paralelas e a velocidade de escoamento **v** é a mesma em todos os pontos. Vimos que há dois modos equivalentes de estabelecer os valores relativos das velocidades de escoamento a partir de tais campos de escoamento: (*a*) a partir da largura dos tubos de escoamento e (*b*) a partir das distâncias entre linhas de mesmo potencial de velocidade. Este último método aplica-se apenas ao escoamento estacionário irrotacional. Para tal tipo de escoamento as linhas de mesmo potencial de velocidade são desenhadas como linhas interrompidas.

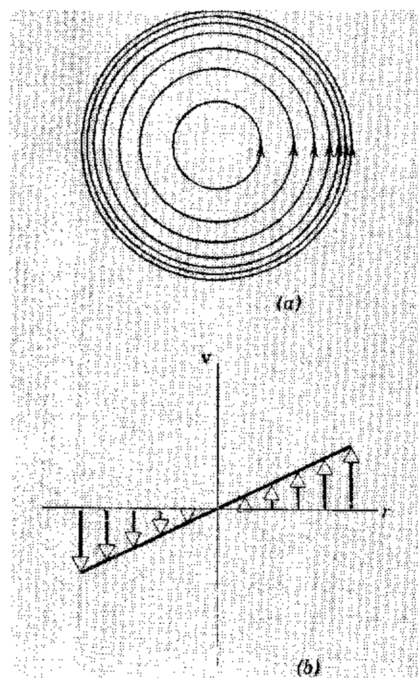


figura 18-11
(*a*) Campo rotacional uniforme de escoamento. (*b*) Variação da velocidade do fluido a partir do centro.

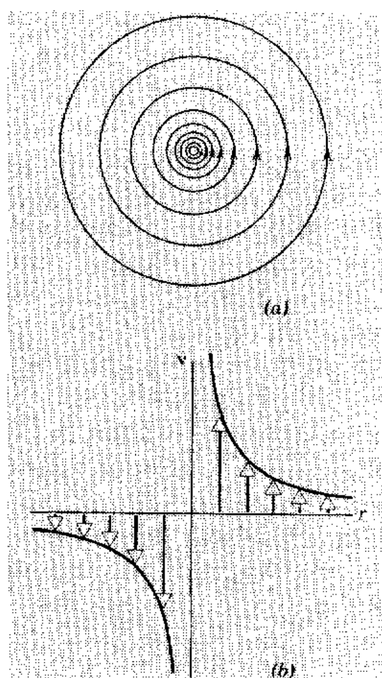


figura 18-12
(*a*) Campo de um vórtice.
(*b*) Variação da velocidade do fluido a partir do centro.

Na Fig. 18-11 mostra-se o campo para uma *rotação uniforme* (ver Probl. 18 do Cap. 17), onde v é proporcional a r. A Fig. 18-12 mostra o campo de um *vórtice*. Então v é proporcional a $1/r$ (ver Probl. 40). Observe que tanto a rotação uniforme como o vórtice são representados por linhas de corrente circulares, mas trata-se de tipos de escoamento inteiramente diferentes. Está claro que as *formas* das linhas de corrente fornecem informações incompletas; é necessário conhecer também o espaçamento entre elas.

A Fig. 18-13 representa o campo de escoamento de uma *fonte*: todas as linhas de corrente estão orientadas radialmente para fora. A fonte é uma linha que passa pelo centro e é perpendicular ao papel, fornecendo a massa Q por unidade de tempo. O campo de escoamento em torno de um *sorvedouro* é o mesmo que o da fonte, exceto quanto ao sentido do escoamento, que é radial e para dentro.

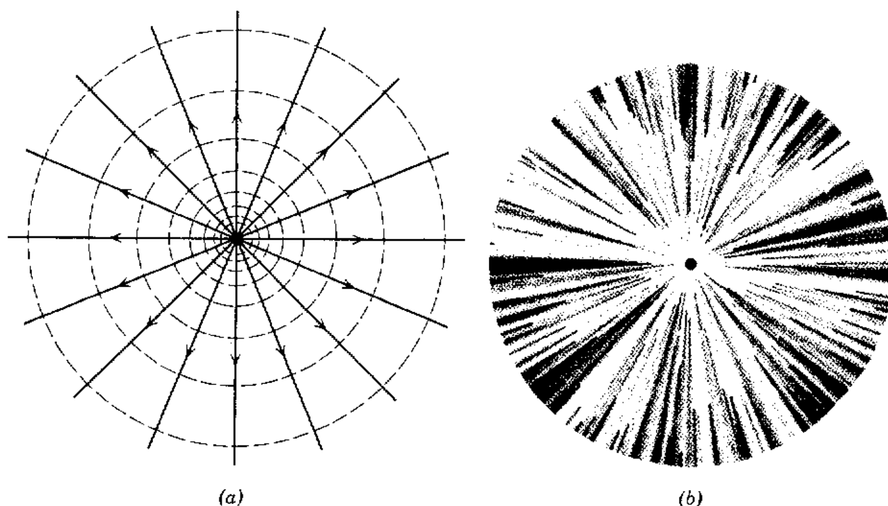


figura 18-13
(*a*) Escoamento a partir de uma fonte puntiforme linear. (*b*) Mapeamento correspondente, obtido quando a água escoa entre uma lâmina horizontal de vidro e uma camada, também horizontal, de gesso. Em (*b*) a água sai de um orifício no centro do gesso e se dirige para a borda. O sentido do escoamento torna-se visível polvilhando cristais de permanganato de potássio no gesso: ao se dissolverem, os cristais dão à água um colorido de vermelho-escuro. (O mapeamento foi realizado e fotografado pelo Professor A. D. Moore, na Universidade de Michigan; é reproduzido da *Introduction to Electric Fields*, de W. E. Rogers, McGraw-Hill Book Co., 1954.)

Para uma fonte e um sorvedouro lineares, que estejam próximos e tenham mesma intensidade, Q e $-Q$, obtém-se o campo combinado denominado *escoamento de dipolo linear* da Fig. 18-14.

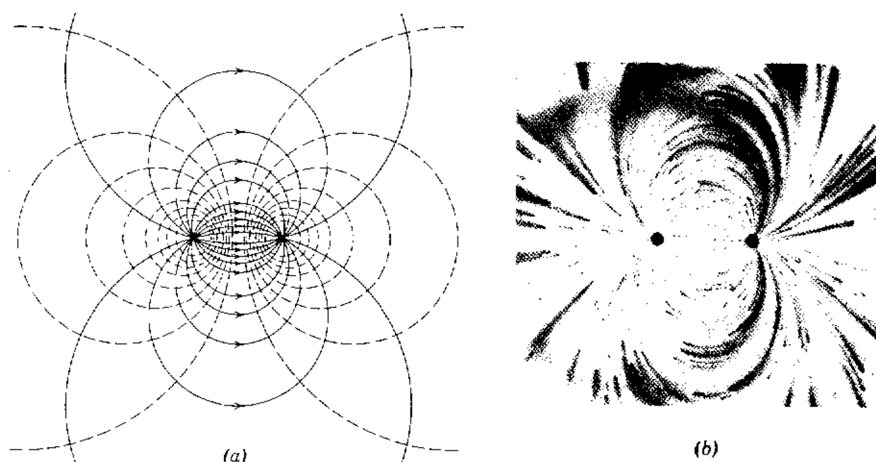


figura 18-14
(*a*) Escoamento de dipolo linear. A fonte encontra-se à esquerda, o sorverdouro à direita. (*b*) Mapeamento correspondente. (O mapeamento foi realizado e fotografado pelo Professor A. D. Moore, na Universidade de Michigan; é reproduzido da *Introduction to Electric Fields*, de W. E. Rogers, McGraw-Hill Book Co., 1954.)

Como veremos mais tarde, o campo eletrostático, o magnético e o de escoamento de uma corrente elétrica são também campos vetoriais. O paralelismo é o seguinte: o campo homogêneo (Fig. 18-10) corresponde ao campo elétrico de um condensador plano; o campo de uma fonte ou de um sorvedouro (Fig. 18-13) corresponde ao campo elétrico de um condensador cilíndrico ou de um fio retilíneo com carga positiva ou negativa, respectivamente; e o campo de dipolo linear (Fig. 18-14) corresponde ao campo elétrico de dois fios de cargas opostas. Em todos os casos supõe-se que o campo de escoamento seja potencial e que os campos elétricos sejam conservativos.

O campo homogêneo da Fig. 18-10 representa também o campo magnético no interior de um solenóide. O campo turbulento da Fig. 18-12 representa o campo magnético que circunda um condutor retilíneo percorrido por uma corrente; este último constitui um exemplo de um campo rotacional (em torno do eixo do redemoinho).

Devido a essas analogias entre os campos de fluidos e os campos eletromagnéticos, pode-se freqüentemente determinar um campo de escoamento que seja impossível calcular pelos métodos matemáticos atuais, mediante o estudo experimental com dispositivos elétricos apropriados.

Como vimos nesse capítulo, as idéias básicas de campo e os princípios de conservação encontram aplicação em muitas áreas da Física. Nós as encontraremos ainda muitas vezes.

questões

1. Faça uma descrição breve do significado de cada um dos seguintes tipos de escoamento e ilustre com um exemplo: (*a*) escoamento estacionário; (*b*) escoamento não-estacionário; (*c*) escoamento rotacional; (*d*) escoamento irrotacional; (*e*) escoamento compressível; (*f*) escoamento incompressível; (*g*) escoamento viscoso; (*h*) escoamento não-viscoso.
2. Pode-se estabelecer um coeficiente de atrito estático entre duas superfícies, sendo uma delas a de um fluido?
3. Um líquido escoará mais rapidamente e mais suavemente de uma lata fechada quando nesta se produzem dois orifícios e não apenas um. Explicar.
4. Enumere todas as suposições resultantes da derivação da equação de Bernoulli (Eq. 18-6).
5. Descreva as forças que atuam sobre um elemento de fluido quando este escoa através de uma tubulação da seção transversal não-uniforme.
6. Em uma demonstração de aula uma bola de pingue-pongue é sustentada no ar por meio de um jato de ar. O equilíbrio é estável, instável ou indiferente? Explicar.
7. A altura do líquido nos piezômetros indica que a pressão cai ao longo do conduto, mesmo se este tenha seção transversal uniforme e o líquido que escoa seja incompressível (Fig. 18-15). Explicar.

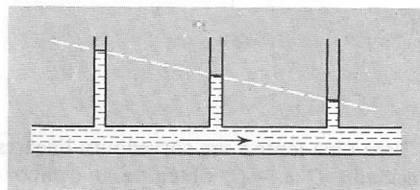


figura 18-15
Questão 7

8. Quanto mais alta a chaminé melhor a tiragem levando a fumaça para fora da lareira. Explicar porque a fumaça não se espalha pela sala onde está a lareira.
9. Explicar como um jogador pode chutar uma "bola curva" para sua direita ou esquerda. Você pode dar uma justificativa aplicando a equação de Bernoulli à uma bola girante? (Veja a referência 5 neste capítulo.)
10. Não somente as bolas de superfície áspera mas também as de superfície lisa podem descrever arcos quando arremessadas. Estas bolas, porém, descreverão arcos em direções opostas. Por quê? (Veja "Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball; and the Magnus Effect for Smooth Spheres", de Syman J. Briggs, em *American Journal of Physics*, novembro, 1959.)
11. Dois barcos a remo que se movam paralelamente e no mesmo sentido são atraídos um para o outro. Dois automóveis que se desloquem paralelamente são também puxados um para o outro. Explicar tais fenômenos com base na equação de Bernoulli.
12. Na construção de "arranha-céus", que forças produzidas pelo movimento do ar se devem procurar neutralizar? Como isto é feito? (Veja "The Wind Bracing of Buildings", de Carl W. Condit, em *Scientific American*, fevereiro, 1974.)
13. O efeito de um pára-quedas, de retardar a queda livre, pode ser explicado pela equação de Bernoulli?
14. Um líquido escoa em um conduto horizontal que tem um estrangulamento. Colocam-se tubos manométricos verticais tanto na parte larga como na estreita do conduto. Fechando-se a saída com uma rolha, o líquido nos tubos manométricos irá subir ou descer? Explicar.
15. O jato de água de uma torneira torna-se mais estreito à medida que cai. Explicar.
16. Você pode explicar por que a água escorre em corrente contínua por um encanamento vertical, mas se fragmenta em gotas quando cai livremente?
17. Como funciona a descarga do aparelho sanitário? (Veja "Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper", de W. Reyburn, Prentice-Hall, 1969.)
18. Você pode explicar por que um objeto que caia de grande altura adquire uma velocidade terminal constante?
19. A equação de Bernoulli (Eq. 18-6) é uma afirmativa da conservação da energia para o movimento do fluido. Em conexão com o medidor de Venturi (pág.: 94) pode você verificar um relacionamento formal com as variações de energia que ocorrem com o carro de uma montanha-russa quando ele desce e sobe?
20. Por vezes, as pessoas retiram as cartas dos envelopes cortando uma pequena tira de um dos lados mais estreitos, segurando firmemente o envelope e soprando para dentro da abertura. Existe aplicação com base na equação de Bernoulli para este caso?
21. Ao levantar vôo, é preferível a um avião mover-se com o vento ou contra ele? E ao aterrissar?
22. A diferença de pressão entre as superfícies superior e inferior da asa de um avião depende da altitude do avião? Explique.
23. A acumulação de gelo sobre as asas de um avião pode alterar sua forma a ponto de reduzir grandemente o empuxo. Explique.

24. Como é possível a um avião voar de cabeça para baixo?
25. Um engenheiro de aeronáutica afirma que ele pode projetar um helicóptero capaz de fazer uma aterrissagem suave sem provocar vento para baixo. Explique se você ache isto possível ou não e por quê.
26. "A forma 'de banana' da maioria dos bumerangues tem muito pouco a ver com a sua possibilidade de retorno .... O essencial é a seção reta dos braços que deveriam ser mais convexos de um lado do que do outro, como o perfil da asa de um avião." (De, "The Aerodynamics of Boomerangs" de Felix Hess, em *Scientific American*, novembro, 1968.) Explicar.
27. Quem fornece energia para os pássaros planarem? (Ver "The Soaring Flight of Birds" por C. D. Cone, em *Scientific American*, abril, 1962.)
28. Por que, na Eq. 18-9, aparece o fator 2 e não o fator 1? Intuitivamente seria de esperar que o empuxo seria simplesmente igual à diferença de pressão multiplicada pela área, isto é, $A_0(p - p_0)$.
29. O efeito destrutivo de um "tornado" é maior nas proximidades de centro do distúrbio do que na sua periferia. Explicar.
30. Quando se retira a tampa de uma pia cheia de água, esta escorre ao mesmo tempo que gira, fazendo um pequeno redemoinho. A velocidade angular de um elemento do liquido em torno de um eixo vertical que passe pelo orifício parece ser máxima nas proximidades deste. Explicar.
31. É verdade que no hemisfério norte a água, que escoa nos ralos das banheiras, gira no sentido anti-horário e no hemisfério sul, gira no sentido horário? Em caso afirmativo, explique e diga o que aconteceria no equador. (Veja "Bath-Tub Vortex", de Ascler H. Shapiro, em *Nature*, dezembro 15, 1962.)
32. Quanto mais longa a prancha de surfe e mais rasa a água, mais tempo a prancha deslizará. Explicar. (Veja "The Surf Skimmer", de R. D. Edge, em *American Journal of Physics*, julho, 1968.)
33. Quando a água é vertida de um bule de chá sua tendência é escoar pelo lado inferior do gargalo. Explique. (Veja "The Teapot Effect ... a Problem", de Markus Reiner, em *Physics Today*, setembro, 1956.)
34. Certos roedores, da família dos esquilos, vivem em grandes colônias em um complexo sistema de tocas que se intercomunicam. Eles se deparam com o problema de manter um suprimento de ar suficiente no interior de suas tocas, a fim de evitar a sufocação. Eles a evitam construindo montículos cônicos de terra em torno de algumas aberturas das tocas. Como funciona, em termos da equação de Bernoulli (Eq. 18-6) este sistema de ventilação? Note que devido às forças de viscosidade a velocidade do vento junto da terra é bem menor do que a alguns centímetros acima. (Ver *New Scientist*, pág. 191, 27 de janeiro, 1972.)
35. Use o critério da roda d'água (Fig. 18-1) para determinar que campos de escoamento (Figs. 18-10 até 18-14) são rotacionais.
36. No escoamento estacionário, o vetor velocidade **v** é constante em qualquer instante. Pode haver movimento acelerado das partículas do fluido? Discutir.

problemas

SEÇÃO 18-2

1. Uma *linha de corrente* de um escoamento é traçada de forma que a direção da velocidade instantânea de uma partícula do fluido seja tangente à linha de corrente em cada ponto. Seja uma linha de corrente dada pela curva $y = y(x)$ no plano xOy. Obtenha uma relação entre a derivada dy/dx e os componentes v_y e v_x da velocidade da partícula.

SEÇÃO 18-3

2. Conforme vimos, o *fluxo de massa* ou *vazão mássica*, é definido pela razão $(\Delta m/\Delta t)$ no limite quando Δt tende a zero. Obtenha a expressão instantânea da *vazão mássica*.
Resposta: $dm/dt = \rho v A$.
3. Seja o volume de uma certa massa de fluido designado por V. O *fluxo de volume* ou *vazão volumétrica* é definido pela razão $(\Delta V/\Delta t)$ no limite quando Δt tende a zero. Obtenha uma expressão para a *vazão volumétrica*.
4. Um tubo cilíndrico transporta óleo. A massa específica do óleo vale 0,85 g/cm^3. Ao passar pela seção reta do tubo, a velocidade é constante e igual a 1,2 m/s. O diâmetro do tubo vale 10 cm. Calcule: (*a*) a vazão volumétrica, (*b*) a vazão mássica.
Resposta: (*a*) 9,42 *l*/s. (*b*) 8 kg/s.
5. A vazão volumétrica de um rio é igual a 900 m^3/s. (*a*) Ache a vazão mássica do rio. (*b*) Se as águas deste rio se projetarem numa queda de 50 m de altura, qual é a potência disponível na base da queda?

6. A mangueira de um jardim possui um diâmetro de 2 cm e está ligada a um irrigador que consiste num recipiente munido de 20 orifícios, cada um dos quais com diâmetro de 0,14 cm. A velocidade da água na mangueira vale 0,85 m/s. Calcule a velocidade da água ao sair dos orifícios. *Resposta:* v = 8,67 m/s.

7. Um êmbolo no interior de um tubo vertical empurra uma coluna de 0,2 m^3 de água com uma velocidade de 1 m/s, no sentido de baixo para cima. O êmbolo se desloca até uma altura de 8 m, em relação ao nível inicial. O tubo está aberto para a atmosfera somente na sua parte superior. O diâmetro do tubo é igual a 10 cm. Calcule: (*a*) a vazão volumétrica da água, (*b*) a vazão mássica da água, (*c*) o trabalho realizado pelo êmbolo sobre a coluna de água, (*d*) a potência desenvolvida pelo êmbolo.

8. Água escoa, à velocidade inicial v_0, continuamente, através do cano de uma torneira que possui diâmetro interno d. Determinar o diâmetro do jato d'água, em função da distância h, abaixo da torneira. (Despreze a resistência do ar e suponha que não se formem gotículas.)

   Resposta: $d\left[\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right]^{1/2}$

9. Água é bombeada continuamente de um porão inundado à velocidade de 5,0 m/s e através de uma mangueira uniforme de raio 1,0 cm. A mangueira passa através de uma janela que se encontra a 3,0 m acima do nível da água. Qual é a potência fornecida pela bomba?

10. Um gás se escoa continuamente no interior de um sistema de tubos. Numa certa seção reta da tubulação, temos os seguintes dados: massa específica do gás = 1,2 mg/cm^3, velocidade do gás = 0,20 m/s, área da seção reta = 25 cm^2. Calcule a massa específica do gás numa outra seção do sistema, tal que a velocidade do gás seja de 0,10 m/s e a área da seção reta seja de 20 cm^2. *Resposta:* 3 mg/cm^3.

SEÇÃO 18-4

11. Considere os dados do Probl. 7. (*a*) Qual é a *pressão externa p* sobre o êmbolo? (*b*) Ache a *pressão dinâmica* $\rho v^2/2$ da água sobre o êmbolo. (*c*) Calcule o valor da *pressão barométrica* ρgh exercida pela água sobre o êmbolo. (*d*) Determine a *pressão total* exercida pela água sobre o êmbolo.

12. Um tubo oco está colado, em uma das extremidades, a um disco *DD* (Fig. 18-16). O conjunto é colocado um pouco acima de um outro disco *CC* de papelão. Soprando-se pelo tubo, o disco *CC* é atraído para *DD*. Seja *A* a área do papelão e v a velocidade média do ar entre *CC* e *DD*. Determinar a força dirigida para cima que atua no papelão, cujo peso deve ser desprezado. *Resposta:* $\frac{1}{2}\rho v^2 A$, onde ρ é a densidade do ar.

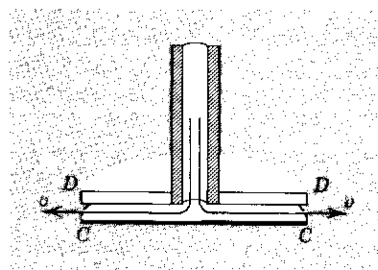


figura 18-16

13. Tome como referência a Fig. 18-15. A água passa na base de uma coluna piezométrica com uma velocidade de 2 m/s. A pressão externa inicial é igual a 4 atm. Não existe diferença de altura entre o ponto inicial e o local onde se encontra a coluna piezométrica. Calcule a altura atingida pela água no piezômetro.

14. Tome como referência a Fig. 18-15 (ver a Questão 7). A diferença de altura do nível da água entre dois piezômetros consecutivos é igual a 10 cm. Suponha que a velocidade da água ao passar pela base do primeiro piezômetro seja igual a 3,5 m/s. Encontre a velocidade da água quando ela passa pela base da segunda coluna piezométrica. *Resposta:* 3,2 m/s.

15. Em um oleoduto horizontal, de área transversal constante, a pressão decresce de 0,34 atm entre dois pontos distanciados de 300 m. Qual a perda de energia, por litro de óleo e por unidade de distância?

16. A Fig. 18-17 mostra um líquido que se escoa através de um orifício de um grande tanque. O orifício encontra-se a uma profundidade h abaixo da superfície livre do líquido. (*a*) Ache a velocidade do líquido que sai do orifício. (*b*) Se o orifício se encurvasse diretamente para cima, qual seria a altura máxima atingida pelo jato deste líquido? *Resposta:* (*a*) $v = (2gh)^{1/2}$. (*b*) h.

17. Um tanque contém água até a altura H. É feito um pequeno orifício, na sua parede, à profundidade h abaixo da superfície da água (Fig. 18-17). (*a*) Mostre que a distância x da base da parede até onde o jato atinge o solo é dada por $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (*b*) Poder-se-ia ter perfurado em outra profundidade de modo que este segundo jato tivesse o mesmo alcance? Em caso afirmativo, a que profundidade?

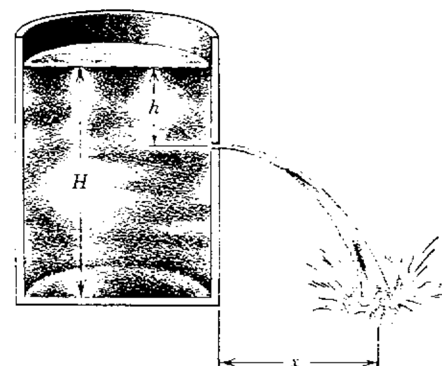


figura 18-17

18. A superfície superior da água em uma "chaminé de equilíbrio" fica à altura H do solo. (*a*) Determinar a que profundidade h deveria ser feito um pequeno orifício para que a água que sair por ele atinja o solo à distância máxima da base da chaminé. (*b*) Qual é esta distância máxima? *Resposta:* (*a*) $H/2$, (*b*) H.

19. (*a*) Suponha que, ao deslocar-se uma asa de avião, o ar esteja estagnado em sua borda dianteira e que em sua face superior a velocidade seja v. Considere a pressão na borda dianteira aproximadamente igual à atmosférica e determine o maior valor possível para v, admitindo o escoamento estacionário e o ar incompressível; utilize a equação de Bernoulli. A densidade do ar é 1,2 × 10^{-3} g/cm^3. (*b*) Compare a velocidade obtida no item anterior com a velocidade do som no ar, 1.240 km/h. Explique a diferença. Deveria haver alguma relação entre as duas velocidades?

20. Uma pessoa sopra ar, com a velocidade de 15 m/s, através de um dos ramos de um tubo em U que contêm água. Qual será a diferença entre os níveis da água? Considere a densidade do ar igual à 1,2 kg/m³. *Resposta:* 1,4 cm.

21. Um sifão é um dispositivo para remover líquidos de um recipiente que não pode ser tombado. Ele funciona como mostra a Fig. 18-18. O tubo deve ser inicialmente cheio, mas tão logo isto tenha sido feito, o líquido escoará até que seu nível paire abaixo da abertura do tubo em *A*. O líquido tem densidade ρ e viscosidade desprezível. (*a*) Com que velocidade o líquido sai do tubo em *C*? (*b*) Qual é a pressão no líquido no ponto máximo *B*? (*c*) Qual é a maior altura possível h_1 que um sifão pode fazer subir a água?

22. Considere a solução do item (*c*) do problema anterior. O limite da altura máxima h_1 é dado pela condição: $\rho g(h_1 + d + h_2) = p_D$, onde p_D é a pressão atmosférica. Contudo, se a *pressão de vapor* do líquido for *menor* do que 1 atm, a limitação da altura h_1 não é necessariamente dada pela condição acima. Para tais líquidos, devemos verificar, previamente, se a pressão no ponto *B* é menor ou maior do que a pressão de vapor do líquido. Quando a pressão no ponto *B* da Fig. 18-18 se tornar *menor* do que a pressão de vapor do líquido, ocorrerá a vaporização do líquido, formando-se bolhas no interior do tubo. Este fenômeno é conhecido pelo nome de *cavitação*. Ora, como as bolhas são compressíveis, o escoamento perde a *continuidade* e o sifão deixa de funcionar quando a referida pressão assumir um valor menor do que a pressão de vapor do líquido considerado. Para exemplificar os cálculos, determine a altura máxima h_1 para as seguintes condições: o líquido é a água; a pressão atmosférica vale $1{,}01 \times 10^5$ Pa; $d = 2$ m; $h_2 = 1$ m; pressão de vapor da água = um décimo da pressão atmosférica. *Resposta:* $h_1 = 6{,}28$ m.

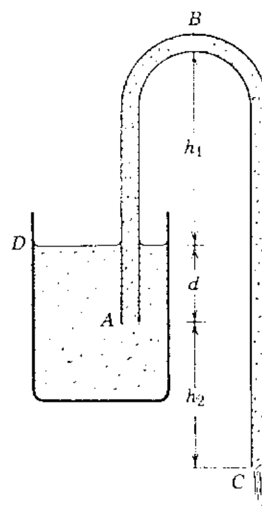


figura 18-18

SEÇÃO 18-5

23. Um gás ideal se escoa ao longo de uma tubulação horizontal. Numa dada seção, temos: $\rho_1 = 2$ mg/cm³, $v_1 = 3$ m/s. Numa outra seção do tubo, encontramos: $\rho_2 = 3$ mg/cm³, $v_2 = 4$ m/s. Calcule a diferença de pressão entre as duas seções.

24. Um tubo de Pitot é montado na asa de um avião para determinar a velocidade do aparelho em relação ao ar, que está à temperatura de 0°C. O tubo contém álcool e indica a diferença no nível de 26 cm. Qual a velocidade do avião em relação ao ar? A densidade do álcool é 0,81 kg/m³. *Resposta:* 200 km/h.

25. Por vezes testam-se, em tubulação horizontal de água corrente, modelos de torpedos, da mesma forma que são utilizados túneis aerodinâmicos para testes de modelos de aviões. Considere uma tubulação circular de 25 cm de diâmetro interno e um modelo de torpedo, alinhado ao longo do eixo da tubulação, com 5,0 cm de diâmetro. O torpedo deve ser testado quando a água se desloca a 2,4 m/s. (*a*) Com que velocidade deve a água escoar na parte da tubulação que está acima do torpedo? (*b*) Qual será a diferença de pressão entre a região onde se encontra o torpedo e uma região longe do mesmo?

26. Através de uma tubulação com uma área transversal de 4,0 cm², corre água com velocidade de 5,0 m/s. A água gradualmente abaixa 10 m enquanto a área da tubulação passa para 8,0 cm². (*a*) Qual a velocidade do fluxo no nível mais baixo? (*b*) Se a pressão no nível superior é de $1{,}50 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão no nível mais baixo?
Resposta: (*a*) 2,5 m/s. (*b*) $2{,}6 \times 10^5$ Pa.

27. Suponha que dois tanques, 1 e 2, cada qual com uma grande abertura em cima, contenham líquidos diferentes. Faz-se um pequeno orifício no lado de cada tanque, à mesma profundidade *h*, abaixo da superfície do líquido, mas o orifício do tanque 1 é a metade da área transversal do orifício do tanque 2. (*a*) Qual é a razão ρ_1/ρ_2 das densidades dos fluidos se for verificado que o fluxo de massa é o mesmo para os dois orifícios? (*b*) Qual é a razão entre as vazões dos dois tanques? (*c*) A que altura acima do orifício do segundo tanque deve acrescentar ou retirar fluido a fim de igualar as vazões?

28. Um pequeno avião tem uma área de asa (cada asa) de 9,3 m². A uma certa velocidade do ar, este escoa sobre a superfície superior da asa 49 m/s e sobre a superfície inferior a 40 m/s. Qual é o peso do avião? Suponha que este voe a velocidade constante e que os efeitos de elevação, associados à construção da fuselagem e da cauda, são pequenos. Discuta o empuxo dinâmico se o avião, voando à mesma velocidade do ar, estiver (*a*) em vôo plano, (*b*) subindo a 15° e (*c*) descendo a 15°. Considere a densidade do ar como sendo 1,2 kg/m³. *Resposta:* 8.900 N. O empuxo é o mesmo em todos os três casos.

29. A velocidade do ar ao passar na superfície inferior de uma asa é de 100 m/s. Qual deve ser a velocidade na face superior para que a pressão do empuxo seja de $1{,}2 \times 10^5$ N/m²?

30. Considere um tubo em U, uniforme, com um diafragma na base, contendo um líquido a alturas diferentes em cada ramo (ver Fig. 18-19). Imagine agora que o diafragma é perfurado de modo que o líquido escoe da esquerda para a direita. (*a*) Mostre que a aplicação do princípio de Bernoulli aos pontos 1 e 3 leva a uma contradição. (*b*) Explique por que o princípio de Bernoulli não é aplicável a este problema (*Sugestão:* O escoamento é estacionário?).

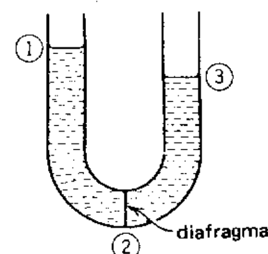


figura 18-19

31. Calcular a velocidade com que um líquido sai de um orifício feito em um tanque, levando em conta a velocidade da superfície superior do líquido, do seguinte modo. (*a*) Mostrar, partindo da equação de Bernoulli, que

$$v_0^2 = v^2 + 2gh$$

sendo v a velocidade da superfície superior. (*b*) Considerar depois o escoamento como um grande tubo de escoamento e obtenha v/v_0 a partir da equação de continuidade, de modo que

$$v_0 = \sqrt{2gh/[1 - (A_0/A)^2]},$$

sendo A a seção reta no topo e A_0 a do orifício. (*c*) Demonstrar então que, se o orifício for pequeno, em relação à área da superfície,

$$v_0 \cong \sqrt{2gh}\,[1 + \tfrac{1}{2}(A_0/A)^2]$$

32. Aplicando a equação de Bernoulli e a equação de continuidade aos pontos 1 e 2 da Fig. 18-6, mostrar que a velocidade de escoamento na entrada é

$$v = a\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}$$

33. Um medidor de Venturi tem diâmetro de 25 cm no tubo e de 12,5 cm no estrangulamento. A pressão da água no tubo é de 0,54 atm e no estreitamento é de 0,41 atm. Determinar a vazão em litros/s.
34. Consideremos o medidor de Venturi representado na Fig. 18-6, sem o manômetro. Seja $A = 5a$ e suponhamos que em A a pressão seja de 2,0 atm. (*a*) Calcular os valores de v em A e de v' em a, que reduziriam a zero a pressão p' em a. (*b*) Calcular a vazão correspondente, sendo de 5,0 cm o diâmetro em A. O fenômeno que ocorre em a quando p' se reduz a quase zero é conhecido como *cavitação*. A água se vaporiza em pequenas bolhas. *Resposta:* (*a*) 20 m/s. (*b*) $8{,}0 \times 10^{-3}$ m³/s.

SEÇÃO 18-6

35. (*a*) Consideremos um fluido de massa específica ρ, que escoa com velocidade v_1 e passa *abruptamente* de um conduto cilíndrico de área transversal a_1 para outro conduto de maior diâmetro e área transversal a_2 (Fig. 18-20). O jato de líquido que emerge do conduto estreito mistura-se com o que se encontra na canalização maior, depois do que ele escoa quase uniformemente com velocidade média v_2. Sem preocupar-se com os pormenores, aplique o conceito de momento linear para demonstrar que o aumento de pressão devido à mistura é aproximadamente igual a

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2).$$

(*b*) Demonstre, partindo do princípio de Bernoulli, que em um conduto cuja seção aumente *gradualmente* a diferença seria

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

e explique a perda de pressão devida ao alargamento brusco do conduto. Pode-se fazer uma analogia com os choques elásticos e inelásticos da mecânica da partícula?

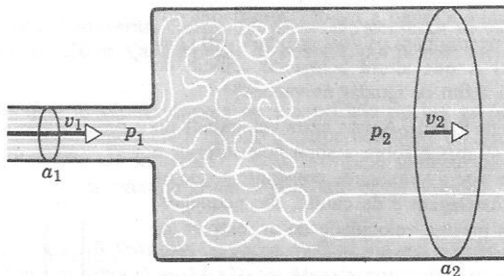


figura 18-20

SEÇÃO 18-7

36. Mostrar que a constante que aparece na equação de Bernoulli, Eq. 18-6, é a mesma para *todas* as linhas de corrente no caso do escoamento, estacionário e irrotacional ilustrado na Fig. 18-10.
37. Um campo de força é conservativo se $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$; o círculo no sinal de integração significa que esta deve ser feita ao longo de uma curva fechada no campo. Um escoamento é potencial (e portanto irrotacional) se $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para qualquer trajetória fechada do campo. Usando esse critério, demonstrar que os campos das Figs. (*a*) 18-10 e (*b*) 18-13 são campos de escoamento potencial.
38. A velocidade de um líquido, no *escoamento Poiseuille* indicado na Fig. 18-21, é dada por: $v = v_c - kr^2$, onde v_c é a velocidade no centro de um tubo de raio $R = 0{,}5$ cm, $k = 8{,}4$ cm⁻¹·s⁻¹ e r é a distância (em cm) até o centro do tubo. Por causa da viscosidade

do líquido, a velocidade na superfície interna do tubo é igual a zero. Calcule a velocidade v_c no centro do tubo. *Resposta:* $v_c = 2.1$ cm/s.

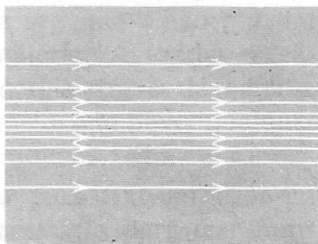


figura 18-21

39. Considere o Probl. 38. (*a*) Obtenha uma expressão para o cálculo da vazão volumétrica do líquido. (*b*) Levando em conta os dados numéricos do Probl. 38, calcule o valor da vazão volumétrica do líquido.

40. Quando, em um escoamento, existem curvas muito fechadas, os efeitos centrífugos são apreciáveis. Considere um elemento de fluido que se mova com velocidade v ao longo de uma linha de corrente de um escoamento curvo em um plano horizontal (Fig. 18-22). (*a*) Demonstrar que $dp/dr = \rho v^2/r$, e portanto a pressão aumenta de $\rho v^2/r$ por unidade de comprimento perpendicular à linha de corrente, quando se passa da parte côncava para a convexa da linha de corrente. (*b*) Utilizar este resultado e a equação de Bernoulli para demonstrar que vr é constante e que portanto a velocidade aumenta para o centro de curvatura. Logo, as linhas de corrente que sejam uniformemente espaçadas em um conduto retilíneo se comprimirão perto da parede interna de um conduto curvo e se afastarão perto da parede externa.

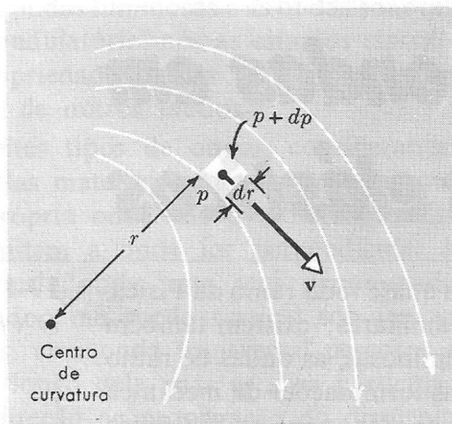


figura 18-22

19
ondas em meios elásticos

19-1 *ONDAS MECÂNICAS*

O movimento ondulatório aparece em quase todo ramo da Física. As ondas na superfície da água nos são familiares; existem também as ondas sonoras assim como as ondas luminosas, as ondas de rádio e outras ondas eletromagnéticas. Uma das formulações da mecânica dos átomos e das partículas subatômicas denomina-se mecânica ondulatória. Está claro pois que as propriedades e o comportamento das ondas são muito importantes na Física.

Neste capítulo e no seguinte limitaremos nossa atenção às ondas que se propagam em meios deformáveis ou elásticos. Essas ondas — de que são exemplo as ondas sonoras — poderiam chamar-se *ondas mecânicas.* Elas se originam no deslocamento de uma parte de um meio elástico em relação à sua posição normal, ocasionando a oscilação dela em torno de uma posição de equilíbrio. Devido às propriedades elásticas do meio, o distúrbio é transmitido de uma camada à seguinte; esse distúrbio, ou onda, progride conseqüentemente através do meio. Note que o próprio meio não se move como um todo juntamente com o movimento ondulatório, as várias partes do meio apenas oscilam, descrevendo trajetórias limitadas. Por exemplo, nas ondas de água pequenos objetos flutuantes, tais como rolhas de cortiça, mostram que o movimento real da água é ligeiramente para cima e para baixo, assim como para a frente e para trás. Todavia, as ondas de água propagam-se continuamente ao longo da água. Quando elas atingem objetos flutuantes, estes são postos em movimento, adquirindo desse modo energia

transmitida pelas ondas.[1] O movimento ondulatório pode transmitir energia a distâncias consideráveis. A energia das ondas é a energia cinética e potencial da matéria, mas a transmissão da energia ocorre pela sua passagem de uma parte do meio à seguinte e não por um movimento de longo alcance da própria matéria. As ondas mecânicas são caracterizadas pelo transporte de energia através da matéria, devido ao deslocamento do distúrbio nesse meio, sem haver qualquer correspondente movimento da matéria como um todo.

É necessário haver um meio material para transmitir ondas mecânicas. Tal meio, entretanto, não é necessário para transmitir ondas eletromagnéticas; por exemplo, a luz atravessa o espaço interestelar, praticamente vazio. As propriedades do meio que determinam a velocidade de uma onda mecânica em tal meio, como veremos na Seç. 19-5, são a sua inércia e sua elasticidade. Todos os meios materiais — inclusive, por exemplo, o ar, a água e o aço — possuem tais propriedades e podem transmitir ondas mecânicas. É a elasticidade que origina as forças restauradoras em qualquer parte do meio deslocada de sua posição de equilíbrio; é a inércia que determina como a porção deslocada do meio responderá a tais forças restauradoras. Conjuntamente esses dois fatores determinam a velocidade da onda.

19-2 *TIPOS DE ONDAS*

Ao citar as ondas de água, as ondas luminosas e as ondas sonoras como exemplos de movimento ondulatório, nós as estamos classificando de acordo com suas propriedades físicas gerais. As ondas podem no entanto classificar-se de outros modos.

Podem distinguir-se diferentes tipos de ondas, considerando como o movimento das partículas materiais está relacionado com a direção de propagação da própria onda. Se o movimento das partículas materiais que transmitem a onda for perpendicular à direção de propagação da própria onda, esta será denominada *transversal*. Por exemplo, quando uma corda vertical sob tensão vibra em uma das extremidades, uma onda transversal percorre a corda; o distúrbio se move ao longo dela, mas as suas partículas oscilam perpendicularmente à direção de propagação do distúrbio (Fig. 19-1*a*).

As ondas luminosas não são ondas mecânicas. O distúrbio que se propaga não é um movimento da matéria, mas um campo eletromagnético (Cap. 40). Entretanto, como os campos elétrico e magnético são perpendiculares à direção de propagação, também as ondas luminosas são transversais.

Se o movimento das partículas que transmitem a onda tiver a mesma direção de propagação da onda, esta denomina-se *longitudinal*. Por exemplo, quando uma mola vertical sob tensão é levada a oscilar em uma das extremidades, uma onda longitudinal percorre a mola, cujas espirais vibram na mesma direção em que o distúrbio se propaga (Fig. 19-1*b*). As ondas sonoras são exemplo de ondas longitudinais; elas serão discutidas no Cap. 20.

Algumas ondas não são exclusivamente transversais ou exclusivamente longitudinais. É o caso das ondas que se propagam na superfície da água, cujas partículas descrevem trajetórias elípticas enquanto a onda se propaga.

[1] Veja "Ocean Waves", por Willard Bascom, *Scientific American*, Agosto de 1957.

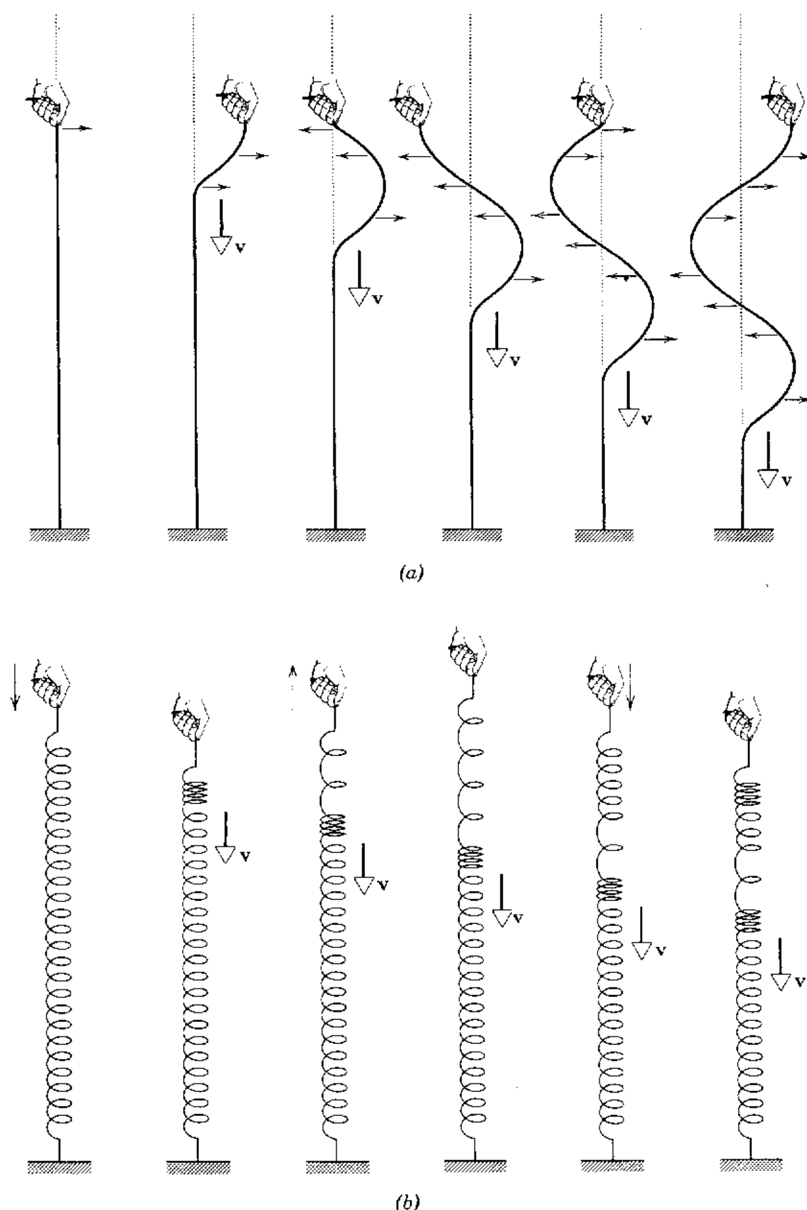


figura 19-1

(*a*) Em uma onda transversal, as partículas do meio (corda) vibram perpendicularmente à direção em que a própria onda se propaga. (*b*) Em uma onda longitudinal as partículas do meio (mola) vibram na mesma direção em que se propaga a onda.

As ondas podem ainda classificar-se como uni, bi e tridimensionais, conforme o número de dimensões em que elas propagam energia. As ondas que se movem ao longo da corda e da mola da Fig. 19-1 são unidimensionais. As ondas superficiais, ou vagas, provocadas quando um pedregulho cai em um poço tranqüilo, são ondas bidimensionais. As ondas sonoras e as ondas luminosas emitidas radialmente por uma pequena fonte são ondas tridimensionais.

As ondas podem ainda ser classificadas de acordo com o comportamento de uma partícula do meio que transporta a onda, durante o tempo em que esta se propaga. Por exemplo, pode-se produzir um *pulso* ou *onda única*, que se propaga ao longo de uma corda esticada, aplicando um único movimento transversal em sua extremidade. Cada partícula permanece em repouso até ser alcançada pela onda, quando se move durante um curto período, voltando em seguida ao repouso. Se continuarmos a mover para diante e para trás a extremidade da corda (Fig. 19-1*a*), produz-se um *trem de ondas*, que se move ao longo dela. Se o movimento for periódico,

produz-se um trem de ondas periódico, que transmite a cada partícula da corda um movimento periódico. O caso especial mais simples de onda periódica é a *onda harmônica simples*, que produz em cada partícula um movimento harmônico simples.

Consideremos um pulso tridimensional. Pode-se desenhar uma superfície que passe por todos os pontos que em dado instante sofrem um distúrbio semelhante. Com o decorrer do tempo esta superfície se move, revelando como se propaga o pulso. Superfícies análogas podem ser desenhadas para os pulsos subseqüentes. A idéia pode ser generalizada, no caso de uma onda periódica, desenhando-se superfícies cujos pontos estejam todos na mesma fase de movimento. Tais superfícies denominam-se *frentes de onda*. Se o meio for homogêneo e isotrópico, a direção de propagação será sempre perpendicular à frente de onda. A normal às frentes de onda, que indica a direção em que as ondas se propagam, é chamada *raio*.

As frentes de onda podem ter muitas formas. Se os distúrbios se propagam em uma só direção, as ondas se chamam *ondas planas*. Em dado instante as condições são as mesmas em qualquer plano perpendicular à direção de propagação; as frentes de onda são planas e os raios são retas paralelas (Fig. 19-2*a*). Outro caso simples é o das *ondas esféricas*, em que o distúrbio se propaga em todas as direções, a partir de uma fonte puntual. As frentes de onda são esferas e os raios são linhas radiais, traçadas, a partir da fonte, em todas as direções (Fig. 19-2*b*). Longe da fonte as frentes de onda esféricas têm pequena curvatura, e em uma região limitada podem ser consideradas como planas. Há, naturalmente, muitas outras formas possíveis para as frentes de onda.

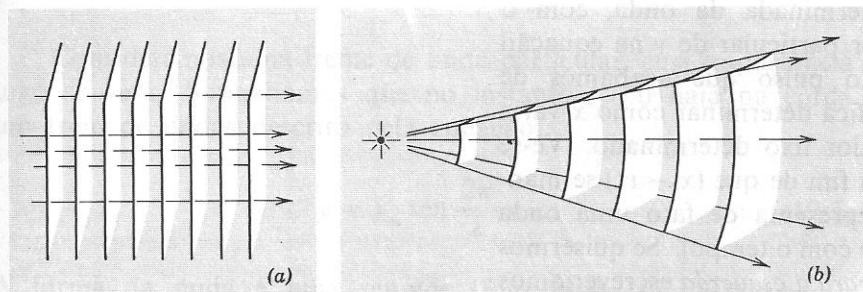


figura 19-2
(*a*) Uma onda plana. Os planos representam frentes de onda distantes entre si de um comprimento de onda; as flechas representam raios. (*b*) Uma onda esférica. Os raios coincidem com os da esfera e as frentes de onda, distanciadas de um comprimento de onda, são calotas esféricas. A grandes distâncias da fonte, entretanto, pequenas regiões da frente de onda tornam-se praticamente planas.

Todos esses tipos de ondas serão considerados à proporção que estudarmos os fenômenos físicos ondulatórios. Neste capítulo as ondas transversais em uma corda serão utilizadas freqüentemente para ilustrar as propriedades gerais das ondas. No capítulo seguinte estudaremos as conseqüências dessas propriedades no caso do som, que é uma onda mecânica longitudinal. Posteriormente estudaremos as propriedades das ondas não-mecânicas, tais como a luz e as ondas materiais.

19-3 ONDAS PROGRESSIVAS

Consideremos uma longa corda esticada, cuja direção será considerada como eixo Ox, e suponhamos que se propague nela uma onda transversal. Em dado instante, suponhamos $t = 0$, a forma da corda pode ser representada pela função

$$y = f(x) \qquad t = 0, \tag{19-1}$$

sendo y o deslocamento transversal de um ponto da corda na posição x. Na Fig. 19-3a mostra-se uma possível forma de onda (um pulso) da corda, no instante $t = 0$. A experiência revela que, com o decorrer do tempo, uma onda se propaga ao longo da corda, sem alteração de forma, desde que sejam pequenas as perdas internas devidas ao atrito. No instante t posterior a onda terá percorrido para a direita a distância vt, sendo v o módulo da velocidade da onda, suposta constante. A equação da curva no instante t será

$$y = f(x - vt) \qquad t = t, \tag{19-2}$$

equação que representa a mesma forma de onda tanto em torno do ponto $x = vt$ e no instante t, como em torno do ponto $x = 0$ e no instante $t = 0$ (Fig. 19-3b). Essa é a equação geral que representa uma onda de *qualquer* forma e que se *propaga para a direita.* Para descrever uma forma particular, deve-se especificar exatamente qual é a função f.[2]

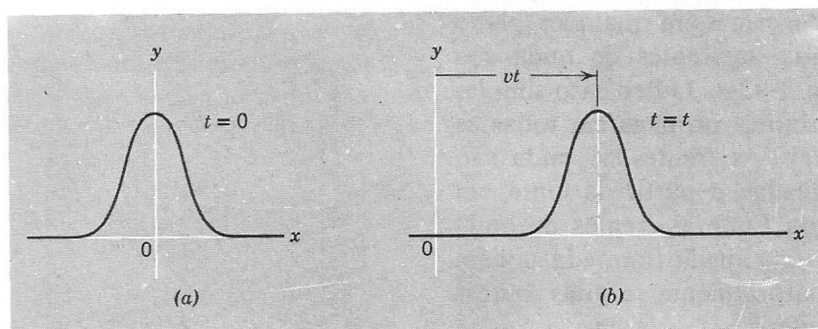


figura 19-3
(a) A forma de uma corda (neste caso um pulso) no instante $t = 0$. (b) Em um instante posterior t o pulso percorreu para a direita uma distância $x = vt$.

Examinemos mais cuidadosamente esta equação. Se quisermos acompanhar uma parte (ou fase) determinada da onda, com o decorrer do tempo, procura-se um valor particular de y na equação (por exemplo, o extremo superior do pulso que acabamos de descrever). Matematicamente isto significa determinar como x varia com t quando $(x - vt)$ assume um valor fixo determinado. Vê-se que, ao aumentar t, x deve aumentar, a fim de que $(x - vt)$ se mantenha constante. Logo, a Eq. 19-2 representa de fato uma onda que se desloca para a direita (x crescente com o tempo). Se quisermos representar uma onda que se desloque *para a esquerda* escreveríamos

$$y = f(x + vt), \tag{19-3}$$

pois neste caso a posição x de uma fase fixa $(x + vt)$ da onda decresce com o tempo. Obtém-se facilmente a velocidade de uma fase particular da onda. No caso de uma onda que se desloca para a direita, exige-se, para uma fase particular, que

$$x - vt = \text{constante.}$$

Diferenciando em relação ao tempo resulta

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \text{ ou } \frac{dx}{dt} = v; \tag{19-4}$$

[2] Quando se diz que "y é uma função de $(x - vt)$" deve-se entender que as variáveis x e t ocorrem apenas na combinação $x - vt$. Por exemplo, sen $k(x - vt)$, $\log(x - vt)$ e $(x - vt)^3$ são funções de $x - vt$, porém $x^2 - vt^2$ não é.

portanto, v é realmente a *velocidade de fase* da onda. Se a onda progredir para a esquerda obtém-se, do mesmo modo, $-v$ como velocidade de fase.[3]

A equação geral de uma onda pode ter outra interpretação. Note que, para qualquer valor fixo do tempo t a equação fornece y como função de x. Isto define uma curva que representa a forma verdadeira da onda no instante considerado, ou seja, é um "instantâneo" da onda naquele instante. Suponhamos, por outro lado, que desejamos focalizar nossa atenção em um ponto da corda, isto é, em um valor fixo de x. Então a equação fornece y como função do tempo t; ela descreve como varia com o tempo a posição transversal de um ponto da corda.

O argumento acima apresentado tanto vale para ondas longitudinais como transversais. O exemplo análogo para ondas longitudinais é o caso de um longo tubo retilíneo que contenha gás, seu eixo sendo tomado como eixo Ox. O mesmo raciocínio conduz então a uma equação cuja forma é a mesma das Eqs. 19-2 e 19-3 e que fornece as variações, com o tempo, da pressão em todos os pontos do tubo (ver Seç. 20-3).

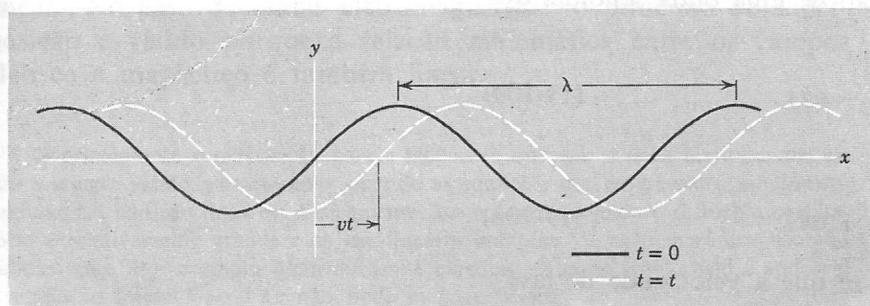


figura 19-4
No instante $t = 0$, a corda tem a forma $y = y_m \operatorname{sen} 2\pi x/\lambda$ (linha contínua). Em um instante posterior t a onda senoidal terá se deslocado para a direita numa distância $x = vt$ e a corda tem a forma expressa por $y = y_m \operatorname{sen} 2\pi (x - vt)/\lambda$.

Consideremos uma frente de onda particular, cuja importância logo se verá. Suponhamos que no instante $t = 0$ haja na corda um trem de ondas descrito pela equação

$$y = y_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} x. \tag{19-5}$$

A forma da onda é uma senóide (Fig. 19-4). O deslocamento máximo y_m é a *amplitude* da onda senoidal. O valor do deslocamento transversal y é o mesmo tanto em x como em $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ etc. O símbolo λ representa o *comprimento de onda* do trem de ondas, isto é, a distância entre dois pontos consecutivos da onda que possuem a mesma fase. Suponhamos que, ao decorrer o tempo, a onda se propague para a direita com velocidade de fase v. Portanto, a equação da onda no instante t é

$$y = y_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt). \tag{19-6}$$

Note que esta equação tem a forma exigida para uma onda progressiva (Eq. 19-2).

---

[3] Nos distúrbios que podem ser representados como um grupo de ondas, a energia pode ser transportada com velocidade diferente da velocidade de fase de qualquer onda particular. Esta velocidade de grupo será estudada no Cap. 41, ao tratarmos das ondas eletromagnéticas. Até então sempre que usamos o termo velocidade de onda deve entender-se velocidade de fase da onda.

O *período* T é o tempo necessário para que a onda percorra a distância de um comprimento de onda λ, portanto,

$$\lambda = vT. \qquad (19\text{-}7)$$

Levando este valor à equação de onda obtém-se

$$y = y_m \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \qquad (19\text{-}8)$$

Por esta forma é claro que, em qualquer instante, y tem em $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ etc., o mesmo valor que em x, e que y, em qualquer posição dada, tem, nos instantes $t + T$, $t + 2T$ etc., o mesmo valor que no instante t.

Para reduzir a Eq. 19-8 a uma forma mais compacta, definem-se duas grandezas, denominadas *número de onda*, k, e *freqüência angular* ω (ver Eq. 15-12), dadas pelas equações

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ e } \omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (19\text{-}9)$$

Em função dessas grandezas, a equação de uma onda senoidal que progride para a direita é

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \qquad (19\text{-}10a)$$

e se progride para a esquerda

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \qquad (19\text{-}10b)$$

Comparando as Eqs. 19-7 e 19-9, vê-se que a velocidade de fase v da onda é dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \qquad (19\text{-}11)$$

Nas ondas progressivas das Eqs. 19-10a e 19-10b supusemos que o deslocamento y seja nulo na posição $x = 0$, no instante $t = 0$. Nem sempre é isto que ocorre. A expressão geral de um trem de ondas senoidal que progride para a direita é

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi),$$

sendo ϕ denominada constante de fase. Por exemplo, se $\phi = 90°$ o deslocamento y, em $x = 0$ e $t = 0$, é y_m. Neste exemplo particular,

$$y = y_m \cos(kx - \omega t),$$

pois a função co-seno é deslocada de 90° em relação ao seno.

Fixando a atenção em determinado ponto da corda, digamos em $x = \pi/k$, o deslocamento y nesse ponto pode ser escrito como

$$y = y_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi),$$

pois $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$. Esta equação é análoga à Eq. 15-29 para o movimento harmônico simples. Portanto, qualquer elemento particular da corda executa movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio, à proporção que o trem de ondas progride na corda.

19-4 O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

É um fato experimental que, para muitos tipos de ondas, *duas ou mais ondas podem cruzar-se na mesma região do espaço independentemente uma da outra.* O fato de as ondas serem independentes uma da outra significa que o deslocamento de qualquer partícula, em dado instante, é simplesmente a soma dos deslocamentos que seriam produzidos se as ondas agissem isoladamente. Este processo de adição vetorial de deslocamentos de uma partícula denomina-se *superposição.* Por exemplo, ondas de rádio de numerosas freqüências passam por uma antena de rádio e as correntes elétricas criadas na antena pela ação superposta de todas essas ondas são muito complexas. Não obstante, é possível sintonizar uma emissora particular; o sinal recebido desta é, em princípio, o mesmo que receberíamos se todas as outras estações parassem de irradiar. Analogamente no caso do som, podemos ouvir notas tocadas pelos vários instrumentos de uma orquestra, mesmo que a onda sonora proveniente da orquestra e que alcança nossos ouvidos seja muito complexa.

No caso de ondas em meios deformáveis, o princípio de superposição é válido desde que a deformação e a força restauradora sejam proporcionais entre si, relação essa expressa por uma equação linear. No caso de ondas eletromagnéticas, o princípio de superposição é válido porque a relação matemática entre os campos elétrico e magnético é também linear.

O princípio de superposição parece tão óbvio que vale a pena acentuar que ele não é sempre válido, por exemplo, quando as equações que descrevem o movimento ondulatório não são lineares. Fisicamente isso acontece quando o distúrbio ondulatório é relativamente grande e as leis lineares habituais de ação mecânica não são válidas mais. Por exemplo, além do limite elástico, a Lei de Hooke não é aplicável e a relação linear $F = -kx$ não pode mais ser usada.

Explosões violentas criam ondas de choque que, embora sejam ondas elásticas longitudinais no ar, comportam-se diferentemente das ondas sonoras comuns. A equação que governa a propagação dessas ondas é quadrática e o princípio de superposição não é válido. Duas notas muito altas produzem no ouvido algo mais que a percepção de duas notas individuais. Quem está familiarizado com aparelhos de alta fidelidade conhece a "distorção de intermodulação" entre dois sons, que ocorre quando o sistema deixa de combinar linearmente os tons; essa distorção é mais evidente quando os tons possuem grande amplitude. As ondas de água oferecem um exemplo físico mais óbvio: as vagas não conseguem cruzar independentemente os vagalhões, ao contrário do que ocorre quando cruzam suaves ondulações do mar.

Fisicamente, a importância do princípio de superposição é que, quando válido, ele torna possível analisar um movimento ondulatório complicado como combinação de ondas simples. Com efeito, foi demonstrado pelo matemático francês J. Fourier (1768-1830) que, para obter a forma mais geral de onda periódica, são necessárias apenas ondas harmônicas simples. Fourier provou que qualquer movimento periódico de uma partícula pode ser representado como combinação de movimentos harmônicos simples. Por exemplo, se $y(t)$ representa o movimento de uma fonte de ondas de período T, pode-se analisar $y(t)$ como

$$y(t) = A_0 + A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_2 \operatorname{sen} 2\omega t + A_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \ldots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \ldots,$$

sendo $\omega = 2\pi/T$. Essa expressão constitui uma *série de Fourier.* As constantes A_i e B_i têm valores definidos para um dado movimento periódico $y(k)$; ver Fig. 19-5, por exemplo. Quando os movi-

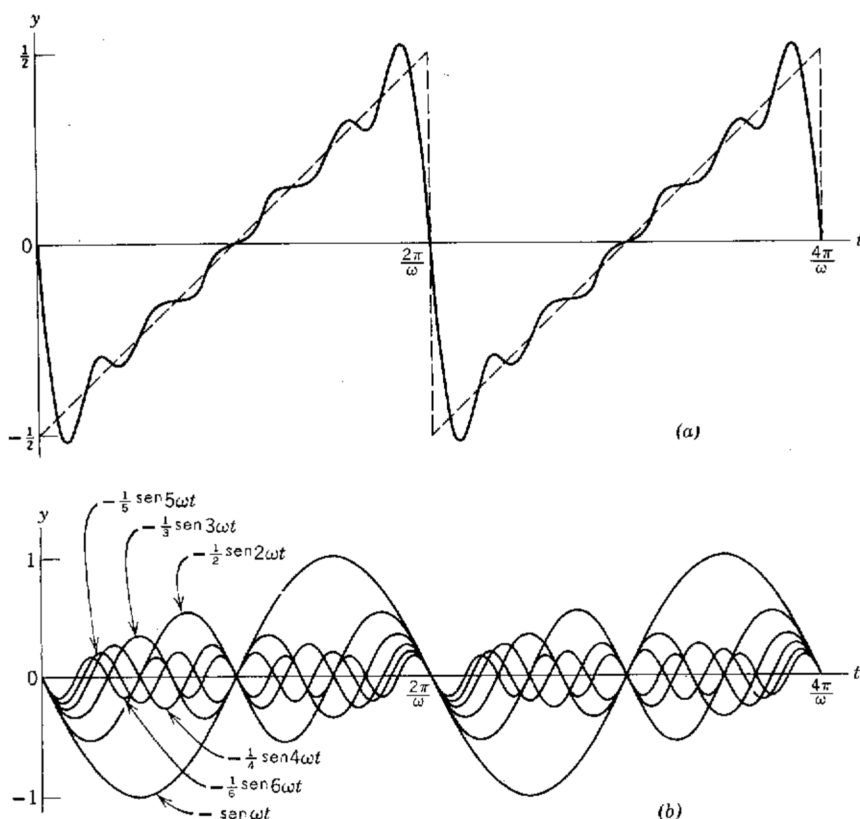


figura 19-5
(*a*) A linha interrompida é uma "onda" de dente-de-serra, utilizada freqüentemente em eletrônica. Ela pode ser expressa como $y(t) = (\omega/2\pi)\,t - \frac{1}{2}$, para $0 < t < 2\pi/\omega$; como $y(t) = (\omega/2\pi)\,t - \frac{3}{2}$ para $2\pi/\omega < t < 4\pi/\omega$ etc. A série de Fourier para esta função é $y(t) = -\text{sen}\,\omega t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\omega t - \frac{1}{3}\,\text{sen}\,3\omega t - \ldots$
A linha contínua representa a soma dos seis primeiros termos desta série: vê-se que ela se aproxima bastante da curva de dente-de-serra, exceto nas vizinhanças das descontinuidades. Incluindo maior número de termos da série, a aproximação torna-se cada vez melhor. (*b*) Os seis primeiros termos da série de Fourier que, adicionados, fornecem a linha contínua da parte (*a*).

mentos não são periódicos, como em um pulso, a soma é substituída por uma integral, denominada integral de Fourier. Qualquer movimento de uma fonte de ondas pode, portanto, ser representada em função de movimentos harmônicos simples. Desde que o movimento da fonte cria as ondas, não surpreende que as próprias ondas possam ser analisadas como combinações de ondas harmônicas simples. Nisso reside a importância do movimento harmônico simples e das ondas harmônicas simples.

Quando a elasticidade do meio é tal que a Lei de Hooke não é exatamente obedecida, então um pulso de onda produzido na extremidade de uma corda esticada pode mudar sua forma enquanto que se propaga ao longo da corda. Embora cada componente harmônico do pulso se propague sem deformação, a velocidade de cada componente é diferente para cada freqüência (ou comprimento de onda). Este fenômeno é chamado de *dispersão* e o meio é dito ser *dispersivo* para o tipo de onda em questão. Como resultado a forma do pulso pode mudar e a velocidade do pulso pode depender dos detalhes de sua forma inicial. Exemplos de situações não dispersivas são ondas mecânicas se propagando ao longo de uma corda ideal (perfeitamente flexível) esticada e ondas eletromagnéticas (incluindo a luz) se propagando no vácuo. Exemplos de situações dispersivas são ondas de oceano e ondas luminosas se propagando em um meio dispersivo como o vidro.

Uma outra maneira pela qual um pulso pode mudar sua forma é pela perda de energia mecânica para o meio ou para a sua vizinhança, como por exemplo, por resistência do ar, viscosidade ou atrito interno. Neste caso a amplitude da onda decresce com o tempo e a onda é dita ser *atenuada*.

Por enquanto, nós admitiremos que o meio é não dispersivo e que não existe dissipação de energia enquanto a onda se propaga ao longo do meio.

19-5 *VELOCIDADE DE ONDA*

Dadas as características do meio, seria possível calcular a velocidade de onda aplicando os princípios básicos da mecânica clássica. Nesta seção continuaremos a focalizar a atenção nas ondas transversais em uma corda; no Tópico Suplementar III mostra-se

como calcular a velocidade de tais ondas da maneira mais geral. Consideram-se aqui dois outros métodos: um, baseado na análise dimensional e outro consistindo de uma análise mecânica um pouco menos geral em que se calcula a velocidade de um pulso transversal ao longo de uma corda esticada.

Estabelecemos na Seç. 19-1 que a velocidade de onda em determinado meio depende da elasticidade do meio e de sua inércia. No caso de uma corda esticada, a elasticidade é medida pela tensão F da corda; quanto maior esta, maior será a força restauradora elástica sobre um elemento da corda que seja puxado lateralmente. A inércia é medida por μ, a massa por unidade de comprimento da corda. Supondo, portanto, que a velocidade de onda v dependa apenas de F e de μ, a análise dimensional permite estabelecer a dependência entre v e essas grandezas. As dimensões de F são MLT^{-2} e para μ temos ML^{-1}. A única combinação dessas dimensões que fornece uma velocidade (cujas dimensões são LT^{-1}) é tomar a raiz quadrada de F/μ. Isto é, F/μ tem as dimensões L^2T^{-2} e $\sqrt{F/\mu}$ as de velocidade, LT^{-1}. A análise dimensional não permite revelar quaisquer grandezas adimensionais, por isso o resultado

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{19-12}$$

pode ou não ser completo; o máximo que se pode dizer é que a velocidade de onda é o produto de uma constante adimensional por $\sqrt{F/\mu}$. O valor dessa constante pode ser obtido através de análise mecânica do problema ou da experiência. Ambos os métodos mostram que a constante é igual a 1 e portanto a Eq. 19-12 é correta.

Vamos agora *deduzir* a velocidade de um pulso, que se propaga em uma corda esticada, através da análise mecânica. A Fig. 19-6 representa um pulso de onda que se desloca ao longo da corda, da direita para a esquerda, com velocidade v. Pode-se imaginar que toda a corda se mova para a direita com essa velocidade, de forma que o pulso de onda permaneça fixo no espaço, enquanto as partículas que compõem a corda passam sucessivamente por ele. Isto significa simplesmente que, em lugar de tomar nosso referencial nas paredes entre as quais supõe-se esticada a corda, escolhe-se um referencial que esteja em movimento uniforme em relação àquele. Como as leis de Newton envolvem apenas acelerações, neste caso iguais em ambos os referenciais, podemos usá-las em qualquer um, escolhendo, como foi feito, o mais conveniente.

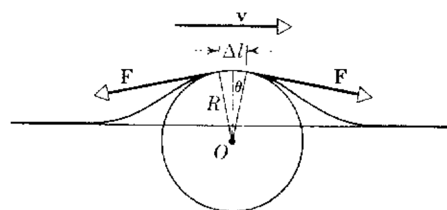


figura 19-6
Dedução da velocidade de onda, tendo em conta as forças que agem sobre uma seção da corda, de comprimento Δl.

Considere-se uma pequena seção do pulso, cujo comprimento Δl seja um arco de um círculo de raio R, mostrado na figura. Sendo μ a massa por unidade de comprimento da corda (ou densidade linear), $\mu \cdot \Delta l$ é a massa desse elemento. A tensão F da corda é uma força tangencial que age em cada extremo deste pequeno segmento da corda. As componentes horizontais se cancelam e as verticais são iguais a F sen θ. Portanto, a força vertical total é $2F$ sen θ. Como θ é pequeno, sen $\theta \cong \theta$ e portanto,

$$2F \operatorname{sen}\theta = 2F\,\theta = 2F\frac{(\Delta l/2)}{R} = F\frac{\Delta l}{R},$$

expressão da força que produz a aceleração centrípeta das partículas da corda, dirigida para O. Ora, a força centrípeta que atua na massa $\mu \cdot \Delta l$ que se move sobre um círculo de raio R com velocidade v é expressa por $\mu\,\Delta l\,v^2/R$, conforme a Seç. 6-3. Note que a velocidade tangencial v desse elemento de massa é horizontal na parte superior do arco, identificando-se com a velocidade de fase do pulso. Combinando as expressões equivalentes dadas acima obtém-se

$$F\frac{\Delta l}{R} = \frac{\mu\Delta l\,v^2}{R}$$

ou seja,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Se a amplitude do pulso de onda fosse muito grande, comparada com o comprimento da corda, não seria possível utilizar a aproximação $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$. Além disso, a tensão F da corda seria alterada pela presença do pulso, enquanto supusemos que F se identificasse com a tensão original da corda esticada. Como no caso da superposição, o resultado a que chegamos é válido apenas no caso de deslocamentos transversais da corda relativamente pequenos — caso esse, entretanto, de aplicação prática muito freqüente. Note-se também que a velocidade de onda independe da forma desta, pois não foi feita nenhuma suposição particular quanto à forma real do pulso utilizado na dedução.

A freqüência de uma onda é naturalmente determinada pela freqüência da fonte. A velocidade com a qual a onda percorre um meio é determinada pelas propriedades deste, como foi antes exemplificado. Uma vez determinadas a freqüência ν e a velocidade v da onda, o comprimento de onda λ está fixado. Com efeito, da Eq. 19-7 e da relação $\nu = 1/T$, tem-se

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \qquad (19\text{-}13)$$

EXEMPLO 1

Uma onda transversal senoidal é gerada em uma das extremidades de uma longa corda horizontal mediante uma barra que a desloca para cima e para baixo de 0,50 cm. O movimento é contínuo, repetindo-se regularmente 120 vezes cada segundo. (*a*) Se a corda tem densidade linear de 0,25 kg/m, sendo mantida sob a tensão de 90 newtons, determinar a velocidade, a amplitude, a freqüência e o comprimento de onda do movimento ondulatório.

A extremidade da corda afasta-se 0,25 cm da posição de equilíbrio, primeiro para cima, depois para baixo, a amplitude será portanto $y_m = 0{,}25\,\text{cm}$.

Como o movimento se repete 120 vezes por segundo, a freqüência será $\nu = 120\,\text{s}^{-1} = 120\,\text{Hz}$.

A velocidade da onda é dada por $v = \sqrt{F/\mu}$, porém $F = 90\,\text{N}$ e $\mu = 0{,}25\,\text{kg/m}$, de modo que

$$v = \sqrt{\frac{90\,\text{N}}{0{,}25\,\text{kg/m}}} = 19\,\text{m/s}.$$

O comprimento de onda será

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{19\,\text{m/s}}{120\,\text{s}^{-1}} = 16\,\text{cm}$$

(*b*) Escreva a equação da onda, supondo que ela se mova da esquerda para a direita e que, no instante $t = 0$, a extremidade da corda, cuja posição é $x = 0$, não esteja na posição de equilíbrio $y = 0$.

A expressão geral de uma onda senoidal transversal que se move da esquerda para a direita é

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi).$$

Fazendo $y = 0$ para $x = t = 0$ resulta

$$0 = y_m \operatorname{sen}(-\phi),$$

significando que a constante de fase deve ser $\phi = 0$. Portanto, para essa onda

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Substituindo os valores acima obtidos,

$$y_m = 0{,}25\,\text{cm}$$

$$\lambda = 16\,\text{cm} \quad \text{ou} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{16\,\text{cm}} = 0{,}39\,\text{cm}^{-1}$$

$$v = 19\,\text{m/s} \quad \text{ou} \quad \omega = vk = (1.900\,\text{cm/s})(0{,}39\,\text{cm}^{-1}) = 740\,\text{s}^{-1} = 740\,\text{Hz}$$

obtém-se como equação da onda

$$y = 0{,}25\,\text{sen}\,(0{,}39\,x - 740\,t)$$

sendo y medido em metros e t em segundos.

EXEMPLO 2

Quando esta onda se propaga ao longo da corda, cada uma das partículas desta sobe e desce perpendicularmente à direção do movimento ondulatório. Determinar a velocidade e a aceleração de uma partícula localizada a 62 cm da extremidade.

A forma geral desta onda é

$$y = y_m\,\text{sen}\,(kx - \omega t) = y_m\,\text{sen}\,k\,(x - vt).$$

Nesta equação, v é a velocidade horizontal constante do trem de ondas. Desejamos a velocidade de uma partícula da corda na qual se propaga a onda; a velocidade desta partícula não é horizontal nem constante. Com efeito, cada partícula se move verticalmente, segundo o eixo Oy. A fim de determinar sua velocidade, que designaremos por u, fixemos nossa atenção em uma determinada posição x — isto é, x é agora uma constante naquela equação — e indaguemos como varia com o tempo o deslocamento da partícula. Sendo x constante obtém-se

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -y_m\,\omega\cos\,(kx - \omega t),$$

em que a notação de *derivada parcial* $\partial y/\partial t$ lembra que, embora y geralmente seja função tanto de x como de t, supomos momentaneamente que x permaneça constante e que apenas t varie. A aceleração a da partícula para este valor (constante) de x é

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -\,y_m\omega^2\,\text{sen}\,(kx - \omega t) = -\,\omega^2 y.$$

Isto mostra que cada partícula atingida pela onda transversal senoidal executa movimento harmônico simples, pois a aceleração a é proporcional ao deslocamento y, embora tendo o sentido oposto.

Para uma partícula em que $x = 62\,\text{cm}$ sendo a onda a do Exemplo 1, em que

$$y_m = 0{,}25\,\text{cm},\; k = 0{,}39\,\text{cm}^{-1},\; \omega = 740\,\text{s}^{-1}$$

obtém-se

$$u = -y_m\,\omega\cos\,(kx - \omega t)$$

ou seja,

$$u = -\,0{,}25(740)\cos\left[(0{,}39)(62) - 740t\right] = -185\cos\,(24 - 740t)$$

e

$$a = -\,\omega^2 y$$

ou seja,

$$a = -\,(740)^2\,0{,}25\,\text{sen}\left[(0{,}39)(62) - 740t\right] = -13{,}7 \times 10^4\,\text{sen}\,(24 - 740t)$$

sendo t medido em segundos, u em cm/s e a em cm/s^2.

Você pode descrever os movimentos desta partícula no instante $t = 4\,\text{s}$?

19-6 POTÊNCIA E INTENSIDADE DE UMA ONDA

Na Fig. 19-7 está desenhado um elemento de uma corda esticada, localizado em uma posição qualquer x em um instante particular t. O componente *transversal* da tensão da corda exercida *pelo* elemento localizado à esquerda de x *sobre* o elemento situado à direita de x é

$$F_{\text{trans}} = -F\frac{\partial y}{\partial x}$$

F é a tensão da corda; $\partial y/\partial x$ expressa a tangente (trigonométrica) do ângulo formado pela direção de **F** com a horizontal, no instante t em questão, e, supondo que os deslocamentos sejam pequenos, ela pode ser igualada ao seno do ângulo. A força transversal tem o sentido de y crescente; na figura a inclinação é negativa, portanto a força transversal é positiva. A velocidade transversal da partícula localizada em x é $\partial y/\partial t$, que pode ser positiva ou negativa. A potência dissipada pela força em x, ou a energia que passa por x em cada unidade de tempo, deslocando-se no sentido positivo Ox (ver Seç. 7-6), é

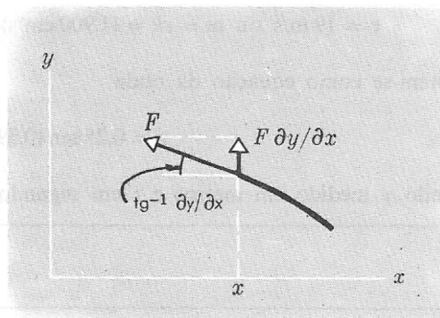


figura 19-7
O componente transversal da tensão na mola em cada ponto x vale $F(\partial y/\partial x)$.

$$P = \left(-F\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Supondo que a onda seja senoidal simples,

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

o valor da inclinação em x é

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ky_m \cos(kx - \omega t), \ (t = \text{constante})$$

e a força transversal é

$$-F\frac{\partial y}{\partial x} = -F\,ky_m \cos(kx - \omega t).$$

A velocidade transversal de uma partícula da corda, na posição x, será

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t), \ (x = \text{constante}).$$

Portanto, a potência transmitida através de x é

$$\begin{aligned} P &= (-Fky_m)(-\omega y_m)\cos^2(kx - \omega t) \\ &= y_m{}^2 k\omega F \cos^2(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Note que a potência, ou taxa de transmissão da energia, não é constante, pois que a potência fornecida oscila. Quando a energia percorre a corda, ela é armazenada em cada um dos elementos desta como combinação de energia cinética de movimento e energia potencial de deformação. A situação é muito semelhante à que ocorre em um circuito de corrente alternada, em que a energia é armazenada tanto no indutor como no condensador e a potência fornecida oscila. No caso de uma corda, a potência é absorvida por atrito interno e efeitos de viscosidade, revelando-se sob a forma de calor; no circuito elétrico, a potência é consumida na resistência, aparecendo também como calor. A potência fornecida à corda ou ao circuito é freqüentemente considerada como a média ao longo de um período de movimento. A potência média liberada é

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P\,dt,$$

sendo T o período. Utilizando o fato de que o valor médio de $\operatorname{sen}^2 x$ ou de $\cos^2 x$ é 1/2,

em um ciclo, obtém-se para a corda

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} y_m{}^2 k\omega F = 2\pi^2 y_m{}^2 \nu^2 \frac{F}{v},$$

resultado independente de x ou de t. Entretanto, no caso da corda $v = \sqrt{F/\mu}$, por isso

$$\overline{P} = 2\pi^2 y_m{}^2 \nu^2 \mu v.$$

O fato de a taxa da transmissão da energia depender do quadrado da amplitude de onda e do quadrado da freqüência tem validade geral, qualquer que seja o tipo de onda.

O estudante deve confirmar o fato de que, se houvéssemos considerado uma onda que se propagasse no sentido negativo de Ox, o resultado seria o oposto do que foi alcançado acima, isto é, a onda fornece potência no sentido de sua propagação.

No caso de uma onda tridimensional, tal como uma onda luminosa ou uma onda sonora proveniente de uma fonte puntual, é mais expressivo falar de *intensidade* da onda, que se define como a potência transmitida através de cada unidade de área perpendicular à direção de propagação da onda. Tal como no caso de uma onda em uma corda, a intensidade de uma onda espacial é sempre proporcional ao quadrado da amplitude.

Quando uma onda progride pelo espaço, sua energia pode ser absorvida. Por exemplo, em um meio viscoso (tal como xarope ou chumbo), a amplitude das ondas mecânicas decresce rapidamente e elas desaparecem, devido à absorção da energia mecânica por atrito interno. Na maioria dos casos que nos interessam, entretanto, a absorção pode ser considerada desprezível. Em todo este capítulo admitiu-se que não houvesse perda de energia em uma dada onda, não importando a distância que ela percorra.

EXEMPLO 3

Uma fonte puntual emite ondas esféricas com potência P (Fig. 19-8). Determinar como a intensidade das ondas depende da distância à fonte. Supõe-se que o meio seja isotrópico e que a fonte irradie uniformemente em todas as direções, isto é, que as emissões tenham simetria esférica.

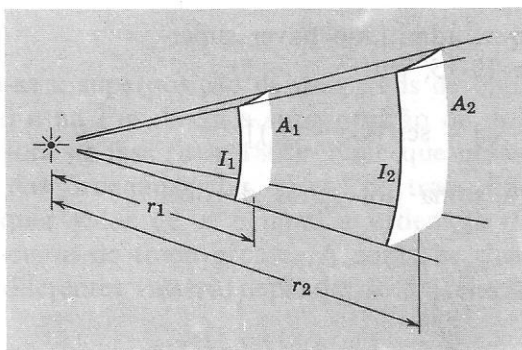


figura 19-8
Exemplo 3.

A intensidade de uma onda tridimensional é a potência transmitida através de uma área unitária perpendicular à direção de propagação. À proporção que a frente de onda se expande desde a distância r_1 da fonte (no centro) até a distância r_2, a área de sua superfície aumenta de $4\pi r_1{}^2$ para $4\pi r_2{}^2$. Se não houver absorção de energia, a energia total transmitida por segundo pela onda permanece constante, com valor P, logo

$$P = 4\pi r_1{}^2 I_1 = 4\pi r_2{}^2 I_2,$$

sendo I_1 e I_2 as intensidades da onda às distâncias r_1 e r_2, respectivamente. Portanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2{}^2}{r_1{}^2}$$

e a intensidade da onda varia inversamente com o quadrado de sua distância à fonte. Desde que a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude, esta deve variar com o inverso da distância à fonte.

19-7 *INTERFERÊNCIA DE ONDAS*

A *interferência* refere-se aos efeitos físicos da superposição de dois ou mais trens de ondas. Consideremos duas ondas de mesma freqüência e mesma amplitude, que se propagam com a mesma velocidade, no mesmo sentido (Ox, positivo), havendo entre elas, no entanto, a diferença de fase ϕ. As equações das duas ondas serão

$$y_1 = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi) \tag{19-14}$$

e

$$y_2 = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{19-15}$$

A primeira dessas equações pode ser reescrita sob as formas equivalentes

$$y_1 = y_m \operatorname{sen}\left[k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right] \tag{19-14a}$$

e

$$y_1 = y_m \operatorname{sen}\left[kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]. \tag{19-14b}$$

As Eqs. 19-14*a* e 19-15 sugerem que, se tomarmos um "instantâneo" das duas ondas em qualquer instante t, verificaremos que a distância entre elas, ao longo do eixo Ox, é constante e igual a ϕ/k. As Eqs. 19-14*b* e 19-15 sugerem que, se nos mantivermos em uma posição fixa x, as duas ondas produzirão aí dois movimentos harmônicos simples entre os quais existe uma diferença de tempo constante, ϕ/ω. Ambas as interpretações esclarecem o significado da constante de fase ϕ.

Determinemos a onda resultante, que, admitindo haver superposição, será a soma das Eqs. 19-14 e 19-15, isto é,

$$y = y_1 + y_2 = y_m[\operatorname{sen}(kx - \omega t - \phi) + \operatorname{sen}(kx - \omega t)].$$

Da equação trigonométrica para a soma dos senos de dois ângulos,

$$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(B + C) \cos \tfrac{1}{2}(C - B), \tag{19-16}$$

obtém-se

$$y = y_m\left[2 \operatorname{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2}\right]$$

$$= \left(2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right). \tag{19-17}$$

Este resultado representa uma nova onda, de mesma freqüência, cuja amplitude é $2y_m \cos\phi/2$. Quando ϕ for *muito pequena* (em relação a 180°), a amplitude resultante será aproximadamente $2y_m$, isto é, quando ϕ for muito pequena, $\cos\phi/2 \cong \cos 0° = 1$. Para $\phi = 0$,

as duas ondas terão sempre a mesma fase; a "crista" de uma corresponderá à de outra e de modo semelhante para as "depressões". Diz-se nesse caso que as ondas interferem construtivamente. A amplitude resultante é exatamente o dobro da amplitude de qualquer das ondas individuais. Quando $\phi \cong 180°$, por outro lado, a amplitude resultante será aproximadamente nula, isto é, $\cos \phi/2 \cong \cos 90° = 0$. Se $\phi = 180°$ *exatamente*, a "crista" de uma onda corresponderá à "depressão" da outra; dizemos que as duas ondas interferem destrutivamente e a amplitude resultante é nula.

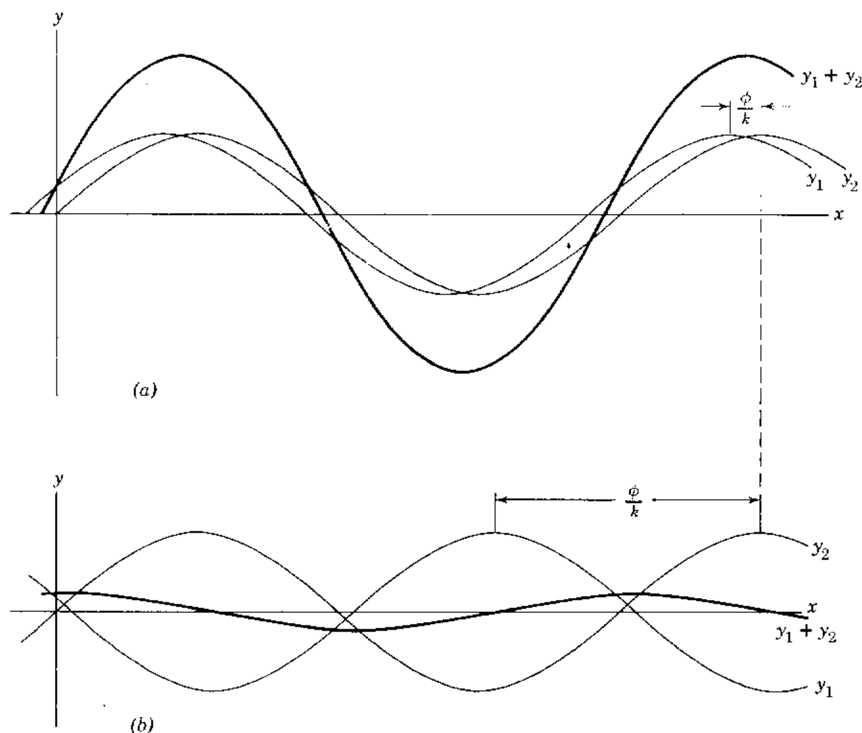


figura 19-9
(*a*) A superposição de duas ondas de mesma freqüência e mesma amplitude e que estão quase em fase resulta em uma onda cuja amplitude é quase o dobro da amplitude de qualquer das componentes. (*b*) A superposição de duas ondas de mesma freqüência e amplitude e que estão em oposição de fase (180° fora de fase) resulta em uma onda cuja amplitude é praticamente nula. Observe que em ambos os casos a freqüência resultante mantém-se inalterável. (Os desenhos correspondem ao instante $t = 0$.)

Na Fig. 19-9*a* mostra-se a superposição de dois trens de onda quase em fase (ϕ pequena) e na Fig. 19-9*b* a superposição de dois trens de onda quase 180° fora de fase ($\phi \cong 180°$). Note que nessas figuras a soma algébrica das ordenadas das curvas de traço fino (componentes), para qualquer valor de *x*, é igual à ordenada do ponto correspondente da curva de traço grosso. A soma de duas ondas pode, portanto, ter diferentes valores, dependendo da relação de fase entre elas.

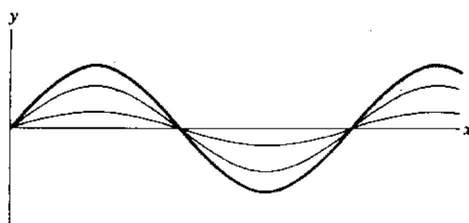


figura 19-10
A superposição de duas ondas de mesma freqüência e mesma fase, mas de amplitudes diferentes (linhas finas) resulta em uma terceira onda de mesma freqüência e fase (linha grossa).

A onda resultante será senoidal, mesmo que as amplitudes das ondas componentes sejam diferentes. A Fig. 19-10, por exemplo, ilustra a soma de duas ondas senoidais de mesmas freqüência e velocidade, porém de amplitudes diferentes. A amplitude resultante depende da diferença de fase, considerada nula nessa figura. O resultado, para outras diferenças de fase, poderia ser obtido deslocando uma das ondas componentes em relação à outra, ao longo do eixo *Ox*, e forneceria uma amplitude resultante menor. O valor mínimo da amplitude resultante seria a diferença entre as amplitudes das componentes e ocorre quando a diferença de fase for de 180°. No entanto, a onda resultante é sempre senoidal. A adição de um número qualquer de ondas senoidais, de mesma freqüência e velocidade, fornece um resultado semelhante. A onda resultante terá

sempre amplitude constante, pois as ondas componentes (e sua resultante) movem-se com a mesma velocidade, mantendo a mesma posição relativa. O estado real de coisas pode ser descrito dizendo que todas as ondas das Figs. 19-9 e 19-10 se movem para a direita com a mesma velocidade.

Os fenômenos de interferência são obtidos, na prática, a partir de trens de ondas originárias da mesma fonte (ou fontes que mantenham entre si uma relação fixa de fase), mas que percorrem diferentes distâncias até o ponto de interferência. A diferença de fase ϕ entre as ondas que chegam a dado ponto pode ser calculada determinando-se a diferença entre os caminhos percorridos por elas, desde a fonte até o ponto de interferência. A diferença de caminho é $\phi/k = \phi\lambda/2\pi$. Quando a diferença de caminhos é 0, λ, 2λ, 3λ etc., de forma que $\phi = 0$, 2π, 4π etc., as duas ondas interferem construtivamente. Quando a diferença de caminho for de $\lambda/2$, $3/2\lambda$, $5/2\lambda$ etc., ϕ será π, 3π, 5π etc., e as ondas interferem destrutivamente. Mais tarde retornaremos a essa questão com maiores detalhes.

19-8 *ONDAS COMPLEXAS*

Até agora estudamos apenas as ondas do tipo harmônico simples, nas quais os deslocamentos, a qualquer instante, são representados por uma senóide. Vimos que a superposição de um número qualquer de tais ondas, que tenham a mesma freqüência e velocidade, porém de amplitudes e fases arbitrárias, terá como resultado uma onda simples desse tipo. Se, todavia, forem superpostas ondas que tenham *freqüências diferentes*, a onda resultante será *complexa*. O movimento de uma partícula, em uma onda complexa, não será mais harmônico simples e a forma da onda não será mais senoidal. Nesta seção consideraremos apenas os aspectos qualitativos das ondas complexas. O tratamento analítico desse tipo de ondas será feito quando encontrarmos situações físicas descritas por elas. Examinaremos os resultados de adicionar graficamente duas ou mais ondas que se propaguem com a mesma velocidade e na mesma direção, mas tendo freqüências relativas, amplitudes e fases diferentes.

Nas Figs. 19-11*a* e 19-11*b* adicionam-se duas ondas de mesma amplitude, cujas freqüências estão na razão 3 : 1; a relação de fase é modificada de *a* para *b* e vemos como a mudança de relação de fase pode produzir uma resultante de forma muito diferente. Se as ondas forem sonoras, nossos tímpanos vibrarão de um modo representado pela resultante em cada caso, que ouviremos e interpretaremos como as duas freqüências originais, pouco importando a relação de fase entre elas. Se as ondas resultantes representarem luz visível, nossos olhos receberão a mesma sensação de uma mistura de duas cores, qualquer que seja a relação de fase das componentes.

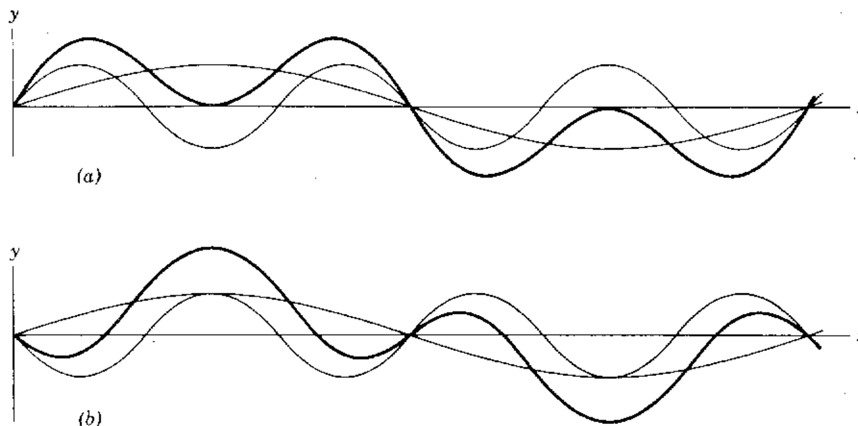


figura 19-11
A superposição de duas ondas cujas freqüências estão na razão 3 : 1 (linhas) finas) resulta em uma onda cuja forma (linha grossa) depende da relação de fase dos componentes. Comparar (*a*) e (*b*).

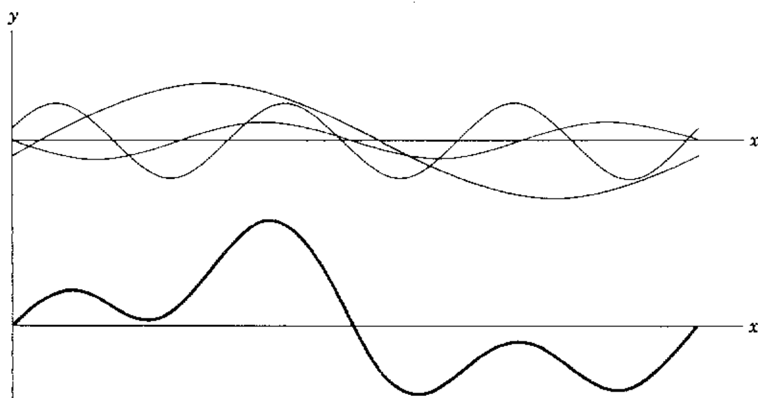


figura 19-12
A superposição de três ondas de freqüências diferentes (em cima) resulta em uma forma de onda complexa (embaixo).

Na Fig. 19-12 são adicionadas três ondas de freqüências e amplitudes diferentes. A onda complexa resultante é totalmente diferente de uma onda periódica simples e a esse respeito assemelha-se às formas de ondas normalmente produzidas por instrumentos musicais. Na Fig. 19-13 adiciona-se uma onda de freqüência muito alta com outra de freqüência muito baixa. Cada freqüência componente é facilmente identificável na resultante.

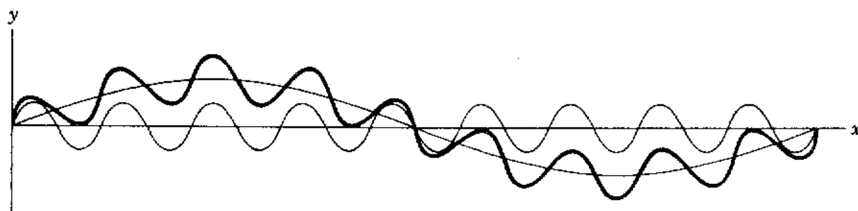


figura 19-13
A superposição (linha grossa) de duas ondas de freqüências muito diferentes (linhas finas).

Na Fig. 19-14 estão somadas duas ondas de freqüências muito próximas. A onda resultante consiste de grupos que, no caso de ondas sonoras, produzem o fenômeno conhecido dos batimentos (Seç. 20-6).

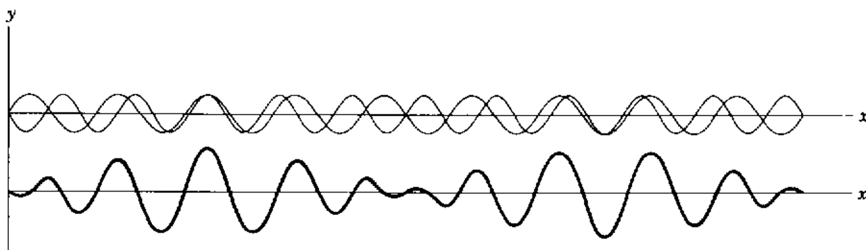


figura 19-14
A superposição (embaixo) de duas ondas de freqüências quase iguais (em cima) é uma ilustração do fenômeno dos batimentos (v. Cap. 20).

Em todas essas figuras a resultante é obtida supondo que seja válido o princípio de superposição, simplesmente adicionando os deslocamentos provocados, em qualquer ponto, pelas ondas componentes. Como todas essas se propagam com a mesma velocidade, a forma de onda resultante se move com esta mesma velocidade e se mantém inalterada.

O osciloscópio de raios catódicos (Cap. 27) proporciona o meio mais simples de observar como as ondas complexas podem ser sintetizadas e analisadas, em função de ondas harmônicas simples.

19-9 *ONDAS ESTACIONÁRIAS*

Em um corpo unidimensional de tamanho finito, tal como uma corda esticada pelas duas extremidades e de comprimento l, as ondas que se propaguem na corda são refletidas nos contornos do corpo, isto é, nas presilhas. Cada reflexão dessas origina uma onda que se propaga pela corda no sentido oposto. As ondas refletidas somam-se às ondas incidentes, de acordo com o princípio de superposição.

Consideremos dois trens de onda que tenham mesma freqüência, velocidade e amplitude e que se propaguem em *sentidos opostos* ao longo de uma corda. Duas dessas ondas podem ser representadas pelas equações

$$y_1 = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$
$$y_2 = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t).$$

A onda resultante pode ser representada, portanto, como

$$y = y_1 + y_2 = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t) \qquad (19\text{-}18a)$$

ou, utilizando a relação trigonométrica dada pela Eq. 19-16, como

$$y = 2y_m \operatorname{sen} kx \cos \omega t, \qquad (19\text{-}18b)$$

que é a equação de uma *onda estacionária*.[4] Note que uma partícula, localizada em qualquer ponto determinado x, realiza movimento harmônico simples com o decorrer do tempo e que todas as partículas vibram com a mesma freqüência. Em uma onda progressiva cada partícula da corda vibra com a mesma amplitude. *Entretanto, a característica de uma onda estacionária é o fato de que a amplitude não é a mesma para diferentes partículas, variando com a posição x da partícula.*[5] Com efeito, a amplitude, $2y_m$ sen kx, tem valor *máximo* $2y_m$ nos pontos para os quais

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ etc.}$$

ou seja,

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \text{ etc.}$$

Esses pontos são denominados *antinodos*, estando distanciados entre si de meio comprimento de onda. O valor *mínimo* igual a zero da amplitude corresponde aos pontos para os quais

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi \text{ etc.,}$$

isto é,

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda \text{ etc.}$$

Tais pontos denominam-se *nodos*, estando distanciados entre si de meio comprimento de onda. A distância de um nodo ao antinodo adjacente é de um quarto de comprimento de onda.

Está claro que não há transmissão da energia ao longo da corda para a direita ou para a esquerda, pois a energia não pode ultrapassar os pontos nodais, em que a corda está permanentemente em repouso. Portanto, a energia permanece "estacionária" na corda, embora alternando-se entre energia cinética de vibração e energia potencial elástica. O movimento é denominado ondulatório porque podemos imaginá-lo como decorrente de uma superposição de

---

[4] As ondas estacionárias podem também ser produzidas em corpos finitos de duas ou de três dimensões: veja nos Caps. 20 e 38 respectivamente, exemplos desses casos.

[5] As ondas componentes que se movem em sentidos opostos ao longo da corda ainda produzirão ondas estacionárias mesmo se tiverem amplitudes diferentes. Consideramos aqui apenas o caso de amplitudes iguais: veja no entanto o Prob. 40.

ondas que se propaguem em sentidos opostos (Eq. 19-18*a*). Podemos, com a mesma razão, interpretar o movimento como uma oscilação da corda como um todo (Eq. 19-18*b*), cada partícula oscilando com movimento harmônico simples de freqüência angular ω e cuja amplitude depende de sua posição. Cada elemento da corda possui inércia e elasticidade; a corda como um todo pode ser pensada como um conjunto de osciladores acoplados. Portanto, a corda vibrante é a idêntica, em princípio,[6] a um sistema mola-massa, excetuando o fato de este sistema ter apenas uma freqüência natural, enquanto uma corda vibrante possui um grande número de freqüências naturais (ver Seç. 19-10).

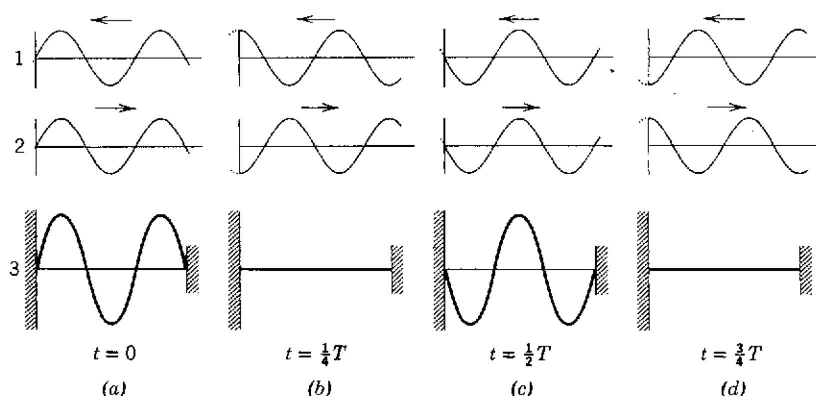


figura 19-15
As ondas estacionárias como superposição de ondas que se propagam para a direita e para a esquerda: 1 e 2 são as componentes, 3 é a resultante.

Na Fig. 19-15, representa-se em (*a*), (*b*), (*c*) e (*d*), nas partes inferiores das figuras, a configuração de uma onda estacionária a intervalos de um quarto de período. As ondas progressivas, uma

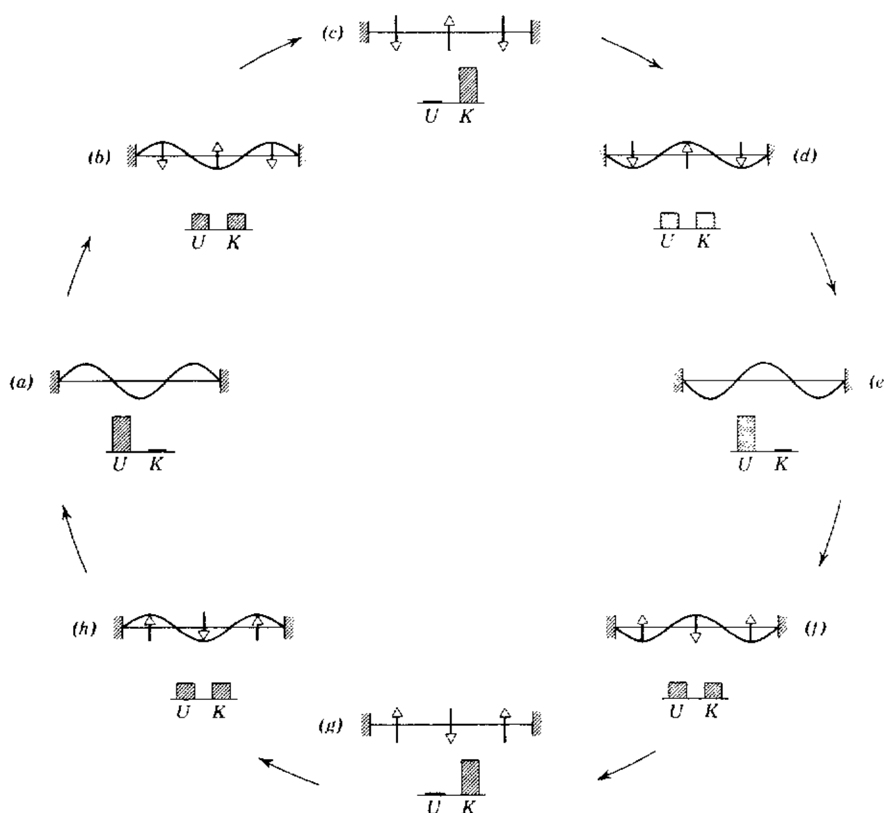


figura 19-16
Uma onda estacionária em uma corda esticada, mostrando um ciclo de oscilação. Em (*a*) a corda está momentaneamente em repouso e a energia do sistema é toda potencial, devida às deformações elásticas associadas com o deslocamento transversal da corda. (*b*) Um oitavo de ciclo mais **tarde**, o deslocamento se reduz e a corda está em movimento. As duas flechas mostram as velocidades das partículas da corda nas posições indicadas. K e U têm o mesmo valor. (*c*) A corda não é deslocada, mas suas partículas possuem velocidade máxima: a energia é toda cinética. O movimento continua, até que a condição (*a*) seja de novo alcançada, após o que o ciclo volta a repetir-se.

[6] Para uma discussão geral, ver "On the Teaching of 'Standing Waves'", J. Rekveld, *American Journal of Physics*, março de 1958.

movendo-se no sentido positivo e a outra no sentido negativo do eixo Ox, cuja superposição pode considerar-se como a causa das ondas estacionárias, são representadas também a intervalos de um quarto de período, nas figuras superiores 2 e 1. Podem produzir-se também ondas estacionárias eletromagnéticas ou sonoras.

Na Fig. 19-16 mostra-se como a energia associada com a corda vibrante desloca-se para diante e para trás, entre energia cinética de movimento, K, e energia potencial de deformação, U, durante um ciclo. O estudante deve comparar com a Fig. 8-4, que mostra a mesma coisa para um sistema mola-massa. As cordas vibrantes freqüentemente oscilam tão rapidamente que o olho apenas percebe uma mancha cuja forma é a da envoltória do movimento; veja Fig. 19-17.

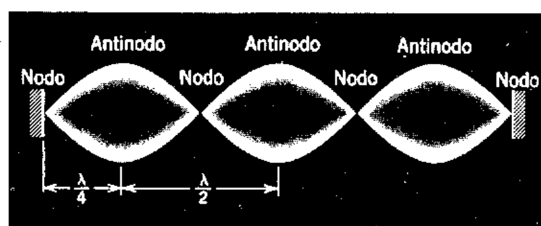


figura 19-17
A envoltória de uma onda estacionária: a figura corresponde a uma fotografia do movimento e revela os nodos e antinodos de vibração.

A superposição de uma onda incidente e de uma onda refletida, sendo a adição de duas ondas progressivas de sentidos opostos, originará uma onda estacionária. Consideraremos agora mais minuciosamente o processo de reflexão de uma onda. Suponhamos que um pulso percorra uma corda esticada, fixa por uma das extremidades, como indica a Fig. 19-18*a*. Quando o pulso alcança aquele extremo, ele exerce sobre o suporte uma força dirigida para cima; o suporte, por ser rígido, não se move e, de acordo com a terceira lei de Newton, ele exercerá na corda uma força igual e oposta. Esta força de reação gera um pulso no suporte, pulso que percorre a corda no sentido oposto ao do pulso incidente. Dizemos que o pulso incidente foi *refletido* no extremo fixo da corda. Note que o pulso refletido retorna com deslocamento transversal invertido. Se um trem de ondas incide no extremo fixo, aí será produzido da mesma maneira um trem de ondas refletido. O deslocamento de qualquer ponto da corda é a soma dos deslocamentos provocados pelas ondas incidente e refletida. Como o ponto extremo é fixo, essas duas ondas devem sempre interferir destrutivamente nesse ponto, resultando em deslocamento nulo aí. Portanto, a onda refletida está sempre 180° fora de fase em relação à onda incidente, para uma extremidade fixa. Dizemos que, *ao ser refletida em uma extremidade fixa, uma onda sofre uma variação de fase de* 180°.

Consideremos agora a reflexão de um pulso na extremidade livre de uma corda esticada, isto é, em uma extremidade que pode mover-se livremente em uma direção transversal. Consegue-se isso ligando a extremidade a um anel leve que pode escorregar sem atrito ao longo de uma haste transversal ou, como veremos depois, ao longo de uma corda longa e muito mais leve. Quando o pulso alcançar a extremidade livre, ele exerce uma força no elemento da corda aí localizado: o elemento é acelerado e, devido à inércia, ele ultrapassa a posição de equilíbrio e exerce uma força de reação sobre a corda. Isto produz um pulso que se propaga pela corda no sentido oposto ao do pulso incidente. Há de novo reflexão,

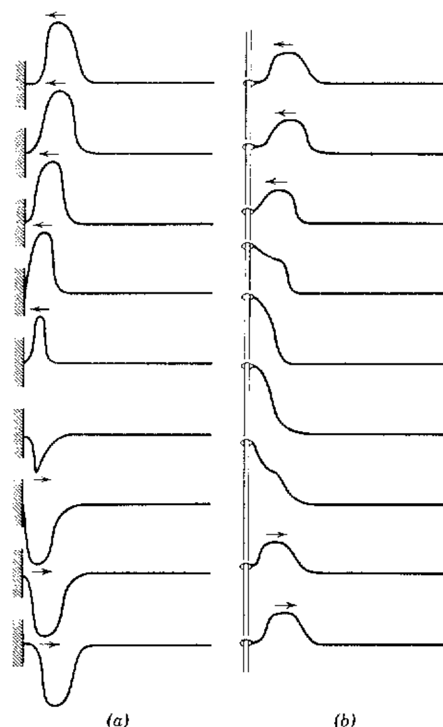


figura 19-18
(*a*) Reflexão de um pulso de onda na extremidade fixa de uma corda. Os desenhos correspondem a intervalos de tempo iguais. A fase varia de 180° devido à reflexão. (*b*) Reflexão de um pulso de onda em uma extremidade livre, que pode mover-se em direção transversal. (A corda está ligada a um anel que desliza verticalmente sem atrito.) A fase não se altera com a reflexão.

nesse caso em uma extremidade livre, que obviamente adquire o mesmo deslocamento máximo que as partículas da corda; o trem de ondas incidente e o refletido devem interferir construtivamente naquele ponto, para que aí ocorra um máximo. Portanto, a onda refletida está sempre em fase com a onda incidente em tal ponto (ver Fig. 19-18*b*). Dizemos que *em uma extremidade livre uma onda é refletida sem mudança de fase.*

Concluímos que, quando existem ondas estacionárias em uma corda, haverá um nodo na extremidade fixa e um antinodo na extremidade livre. Essas idéias serão aplicadas às ondas sonoras e eletromagnéticas, em capítulos subseqüentes.

Na exposição acima supusemos que houvesse reflexão total no contorno do corpo. Entretanto, o que realmente ocorre em um contorno é reflexão parcial e transmissão parcial da onda incidente. Imaginemos, por exemplo, que uma das extremidades da corda esteja presa não a uma parede rígida, mas a outra corda. No ponto de ligação a onda incidente será parcialmente refletida e parcialmente transmitida; a amplitude da onda refletida será menor que a da onda incidente, pois haverá uma onda transmitida à segunda corda e que transporta parte da energia incidente. Se a segunda corda possuir maior densidade linear que a primeira, a onda refletida que percorre esta última sofrerá ainda uma variação de fase de 180° ao refletir-se. No entanto, como sua amplitude é menor que a da onda incidente, o ponto de ligação se moverá, pois não é mais um nodo; haverá, portanto, na junção das duas cordas, certa transmissão de energia da primeira para a segunda. Se esta última possuir menor densidade linear que a primeira, haverá reflexão parcial sem mudança de fase, embora continue a ocorrer transmissão de energia para a segunda corda. O melhor meio de obter uma "extremidade livre" de uma corda consiste em ligá-la a outra corda, longa e muito mais leve. A energia transmitida é desprezível e a segunda corda serve para manter a tensão na primeira.

É interessante notar que a onda transmitida propaga-se à velocidade diferente das ondas incidente e refletida. Com efeito, a velocidade da onda é expressa pela relação $v = \sqrt{F/\mu}$; ora a tensão é a mesma em ambas as cordas, mas suas densidades são diferentes. Conseqüentemente, a onda percorre com menor velocidade a corda mais densa. A freqüência da onda transmitida é igual à da onda incidente e da refletida. Ondas que possuam a mesma freqüência mas diferentes velocidades de propagação terão diferentes comprimentos de onda; logo, de acordo com a relação $\lambda = v/\nu$, concluímos que na corda mais densa, em que v é menor, também será inferior o comprimento de onda. Esse fenômeno de variação do comprimento de onda quando uma onda passa de um meio para outro será encontrado freqüentemente no estudo das ondas luminosas.

19-10 *RESSONÂNCIA*

Em geral, sempre que, sobre um sistema capaz de oscilar, atuar uma série de impulsos periódicos cuja freqüência seja igual ou quase igual à freqüência natural do sistema, este último começará também a oscilar com amplitude relativamente grande. Tal fenômeno denomina-se *ressonância* (ver Seç. 15-10); diz-se que o sistema ressoa com o impulso aplicado.

Consideremos uma corda que tenha fixas ambas as extremidades; nela podem ser produzidas oscilações ou ondas estacionárias. A única exigência que deve ser atendida é que as extremidades da corda sejam nodos de vibração. Entre eles pode haver qualquer número de nodos intermediários, zero inclusive; por isso o comprimento de onda da onda estacionária pode assumir muitos valores diferentes. A distância entre nodos adjacentes é $\lambda/2$; portanto, em uma corda de comprimento l haverá exatamente um número inteiro n de meios comprimentos de onda, $\lambda/2$. Isto é,

$$\frac{n\lambda}{2} = l$$

ou seja,

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ora, $\lambda = v/\nu$ e $v = \sqrt{F/\mu}$, portanto as freqüências naturais de oscilação do sistema são

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{19-19}$$

Se a corda for posta em vibração e abandonada, as oscilações gradualmente desaparecerão. O movimento é amortecido, devido à dissipação da energia nos suportes elásticos das extremidades e pela resistência que o ar oferece ao movimento. Se aplicarmos ao sistema uma força, ele poderá adquirir energia; quando a freqüência dessa força for próxima de uma das freqüências naturais da corda, esta vibrará com grande amplitude e com aquelas freqüências. Pelo fato de a corda possuir um grande número de freqüências naturais, a ressonância pode ocorrer a muitas freqüências. Ao contrário, no caso de um sistema mola-massa, só existe uma freqüência de ressonância. A diferença está ligada ao fato de que, no sistema mola-massa, a característica inercial esta concentrada em uma parte dele — a massa suspensa — e a característica elástica encontra-se noutra parte — a mola. Dizemos que o sistema apresenta *elementos separados*.

Por outro lado, em uma corda esticada têm-se *elementos distribuídos*, visto que qualquer elemento dela possui não só a característica inercial como também a elástica. No caso do sistema mola-massa, existe apenas um modo de trocar energia entre as formas cinética e potencial, quando o sistema oscila; a energia cinética deve estar ligada à massa móvel e a potencial à mola deformável. No caso da corda, todavia, encontram-se distribuídos uniformemente, ao longo da corda, os elementos inércia e elasticidade. Existe não apenas um, mas inúmeros modos possíveis de troca de energia entre as formas cinética e potencial quando o sistema oscila, correspondendo à série de n valores permitidos pela Eq. 19-19.

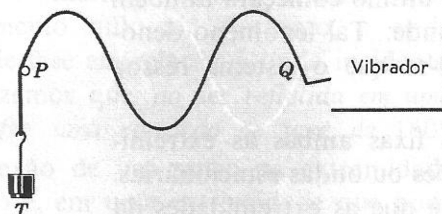


figura 19-19
Ondas estacionárias em uma corda; a freqüência natural da corda e da força aplicada são praticamente iguais.

Para demonstrar a ressonância em uma corda, basta fazer passar uma de suas extremidades por uma roldana e prender-lhe um peso, transformando-a em extremidade fixa; o outro extremo é ligado a um vibrador, conforme a Fig. 19-19. As oscilações transversais do vibrador criam na corda uma onda progressiva, que se reflete na extremidade fixa. A freqüência das ondas é a do vibrador, sendo

o comprimento de onda determinado pela relação $\lambda = v/\nu$. O extremo fixo P é um nodo mas não Q, pois está vibrando. Fazendo variar a tensão da corda, por exemplo, modificando o peso suspenso, o comprimento de onda será alterado, devido à alteração da velocidade de onda; o comprimento de onda varia no mesmo sentido que a velocidade, se a freqüência for constante. Quando o comprimento de onda se aproximar de $2l/n$, sendo l o comprimento da corda, obtêm-se ondas estacionárias de grande amplitude. A corda vibra então em um de seus nodos naturais e ressoa com o vibrador, que realiza trabalho sobre ela, a fim de manter as oscilações e superar as perdas devidas ao amortecimento. A amplitude aumenta até o ponto do vibrador consumir toda sua energia para compensar as perdas devidas ao amortecimento. O ponto Q é praticamente um nodo, pois a amplitude do vibrador é pequena, se comparada à da corda.

Quando existe amortecimento, portanto, a freqüência ressonante é quase igual a uma freqüência natural da corda. Um dos pontos extremos é um nodo e outro é quase um nodo, entre eles existem pontos em que a amplitude é muito pequena e que por isso se comportam quase como nodos. Tais pontos não podem ser nodos verdadeiros, pois a energia deve passar por eles ao transmitir-se ao longo da corda a partir do vibrador. Esta situação é semelhante à condição de ressonância no caso de um oscilador harmônico amortecido forçado, discutido na Seç. 15-10. Também nesse caso a freqüência de ressonância era quase igual à freqüência natural do sistema, assim como a amplitude era grande mas não infinita. Se não houvesse amortecimento, a freqüência ressonante seria exatamente igual a uma freqüência natural. Em tal caso a amplitude aumentaria, enquanto a energia fosse fornecida até o infinito. Na prática, o sistema deixaria de obedecer à Lei de Hooke, ou a condição de as oscilações serem pequenas, quando a amplitude se tornasse grande, e o sistema seria destruído. Isto ocorre mesmo quando há amortecimento, se este for pequeno ou se a força aplicada for grande (foi o caso do desastre com a ponte Tacoma, Fig. 15-21).

Se a freqüência do vibrador for muito diferente de uma das freqüências naturais do sistema, previstas na Eq. 19-19, a onda refletida em P pode estar muito fora de fase com o vibrador, ao retornar a Q e realizar trabalho sobre ele. Isto é, a corda pode ceder alguma energia ao vibrador, tal como recebe energia dele. A onda "estacionária" não tem forma fixa, mas oscilante. Em média a amplitude é pequena e difere pouco da freqüência do vibrador. Esta situação é análoga à do movimento errático de um balanço puxado periodicamente com uma freqüência natural; o deslocamento do balanço é muito pequeno.

Quando há ressonância, portanto, a corda absorve os picos de energia do vibrador. A sintonização de um rádio constitui um processo análogo: ela consiste em igualar a freqüência natural de uma corrente alternada, no circuito receptor, à freqüência das ondas emitidas pela estação desejada. O circuito ressoa com os sinais transmitidos e absorvem deles os picos de energia. Encontraremos novamente condições de ressonância ao estudar o som, no Eletromagnetismo, em Óptica e em Física atômica e nuclear. Nessas áreas, como em mecânica, o sistema absorverá picos de energia da fonte quando ocorrer a ressonância, e relativamente pouca energia fora dessa condição.

EXEMPLO 4

Em uma demonstração com o aparelho acima descrito, o vibrador possui freqüência $\nu = 20\,\text{Hz}$; a massa específica linear da corda é $\mu = 0{,}076\,\text{g/cm}$ e seu comprimento $l = 6{,}00\,\text{m}$. Varia-se a tensão F puxando para baixo a extremidade

da corda, através de uma polia. Determine a força que deve ser exercida na corda para demonstrar ressonância, sabendo que inicialmente não há nodo intermediário e a seguir que existem um, dois e três nodos, sucessivamente.

Quando há ressonância,

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

e a tensão F é expressa por

$$F = \frac{4l^2\nu^2\mu}{n^2}.$$

Quando não existe nodo intermediário, $n = 1$, portanto,

$$F_1 = 4l^2\nu^2\mu + 4(6{,}0\,\text{m})^2(20\,\text{s}^{-1})^2 \times 7{,}6 \times 10^{-3}\,\text{kg/m} = 438\,\text{N}.$$

Quando existe um nodo intermediário, $n = 2$, logo,

$$F_2 = \frac{4l^2\nu^2\mu}{4} = 109\,\text{N},$$

e analogamente para o caso de haver dois ou três nodos entre as extremidades:

$$F_3 = \frac{F_1}{3^2} = \frac{438}{9}\,\text{N} = 48{,}7\,\text{N},$$

$$F_4 = \frac{F_1}{4^2} = \frac{438}{16}\,\text{N} = 27{,}4\,\text{N}.$$

É necessário portanto diminuir gradualmente a tensão da corda a fim de obter ressonância, à medida que aumenta o número de nodos. Embora a freqüência de ressonância seja sempre a mesma nessas circunstâncias, a velocidade de propagação e o comprimento de onda na ressonância decrescem proporcionalmente.

Se o amortecimento for levado em conta, as tensões obtidas são exatamente corretas?

Se a tensão se mantiver constante, e portanto bem definida a velocidade de onda, seria obtida mais de uma condição de ressonância mediante a variação da freqüência do vibrador?

---

questões

1. Como se poderia provar experimentalmente que existe energia em uma onda?
2. A energia pode ser transmitida tanto por partículas como por ondas. Como é possível diferenciar experimentalmente os dois processos de transmissão da energia?
3. É possível produzir um movimento ondulatório tal que as partículas do meio vibrem com movimento harmônico simples angular? Em caso afirmativo, explique como e descreva a onda.
4. As ondas de torção são transversais ou longitudinais? Elas podem ser consideradas como resultantes da superposição de duas ondas que são ou transversais ou longitudinais?
5. Como as ondas planas podem ser produzidas? E as ondas esféricas?
6. As funções seguintes, nas quais A é uma constante, são todas da forma $f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \qquad y = A(x + vt)^2$$

$$y = A\sqrt{x - vt}, \qquad y = A\ \ln(x + vt).$$

   Explicar por que essas funções não são úteis para descrever o movimento ondulatório.
7. Pode-se produzir, em uma corda, uma forma de onda que possua uma descontinuidade na sua inclinação, isto é, uma ponta? Explicar.
8. Como a amplitude e a intensidade de ondas superficiais na água variam com a distância à fonte?

9. A lei do quadrado inverso não se aplica exatamente ao decréscimo com a distância da intensidade do som. Por quê?
10. Quando duas ondas interferem, uma altera a propagação da outra?
11. Quando ocorre interferência de ondas, há perda de energia? Explicar a resposta.
12. Explique por que não se observam efeitos de interferência entre os feixes luminosos emitidos por duas lanternas ou entre as ondas sonoras emitidas por dois violinos.
13. Como a Fig. 19-15 mostra, duas vezes durante um ciclo, a configuração de uma onda estacionária em uma corda esticada é uma linha reta, exatamente como se a corda não estivesse vibrando. Discutir do ponto de vista da conservação de energia.
14. Se duas ondas diferem apenas em amplitude e se propagam em sentidos opostos, elas produzirão ondas estacionárias? Há transmissão de energia? Haverá nodos? (Ver Probl. 40).
15. A reflexão parcial da energia de uma onda nas descontinuidades existentes ao longo da trajetória por ela percorrida é geralmente dissipativa e pode ser minimizada introduzindo dispositivos para "combinar impedâncias" entre as regiões da trajetória que sejam vizinhas da descontinuidade. Por exemplo, um megafone ajuda a "combinar" a coluna de ar da garganta e da boca com o ar externo. Dê outros exemplos e explique qualitativamente como tais dispositivos diminuem as perdas por reflexão. (Ver Probl. 40).
16. Considerar as ondas estacionárias em uma corda como resultantes da superposição de ondas progressivas e explicar, usando os conceitos de superposição, por que não existem verdadeiros nodos na corda ressonante da Fig. 19-19, mesmo no extremo "fixo". (*Sugestão:* Considere os efeitos do amortecimento.)
17. A Fig. 19-19 mostra um sistema que demonstra ondas estacionárias em uma corda. A corda é iluminada por uma luz fluorescente e o vibrador e a fonte de luz são ligados à mesma tomada elétrica. A corda exibe uma curiosa variação de cor no sentido transversal. Explique.
18. Na discussão das ondas transversais em uma corda, lidamos apenas com deslocamentos no plano xOy; em tais casos uma onda se denomina *plano-polarizada.* Pode haver deslocamentos em outro plano diferente do plano de polarização? Em caso afirmativo, duas ondas polarizadas em planos diferentes poderão superpor-se? Qual seria a aparência da onda resultante?
19. Uma onda transmite energia. Ela transmite também momento linear? Ela poderia transmitir momento angular? (Ver Questão 18.) (Ver "Energy and Momentum Transport in String Waves" por D. W. Juenker, em *American Journal of Physics*, janeiro, 1976).

problemas

SEÇÃO 19-2

1. A equação $y = y_m \text{ sen } (kx - \omega t)$ pode representar tanto uma onda progressiva *longitudinal* quanto uma onda progressiva *transversal*. Diga o significado de cada uma das variáveis x e y para cada um destes dois tipos de onda.

SEÇÃO 19-3

2. Uma onda transversal progressiva se propaga ao longo do eixo Ox da direita para a esquerda. Escreva a equação desta onda em função da freqüência angular e da velocidade de propagação da onda. *Resposta:* $y = y_m \text{ sen } (\omega t + (\omega x/v))$.
3. A velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo é igual a $3{,}0 \times 10^8$ m/s. (*a*) O intervalo visível do espectro eletromagnético se estende desde o vermelho ($\lambda = 7{,}0 \times 10^{-7}$ m) até o violeta, cujo comprimento de onda é igual a $4{,}0 \times 10^{-7}$ m. Determine o intervalo de freqüências para as ondas luminosas. (*b*) O intervalo de freqüências das ondas curtas de rádio (por exemplo, FM de rádio e VHF de televisão) vai desde 1,5 MHz até a faixa das microondas (300 MHz). Qual é o intervalo de comprimentos de onda correspondente?
4. Escreva a equação de uma onda progressiva em função: (*a*) de k e de v, (*b*) de λ e de ν, (*c*) de T e de λ. Suponha que a onda se propague ao longo do eixo Ox da esquerda para a direita.
Resposta: (*a*) $y = y_m \text{ sen } k\,(x - vt)$. (*b*) $y = y_m \text{ sen } (2\pi\,(x/\lambda) - 2\pi\,\nu t)$. (*c*) $y = y_m \text{ sen } \left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$.
5. A equação de uma onda transversal progressiva numa corda vibrante é dada por: $y = 5{,}0 \text{ sen } (0{,}4\pi\, x + 8{,}0\pi\, t)$, onde x e y são expressos em centímetros e t em segundos. Calcule: (*a*) a amplitude, (*b*) o comprimento de onda, (*c*) a freqüência, (*d*) o módulo da velocidade de propagação da onda, (*e*) o sentido de propagação da onda, (*f*) o módulo da velocidade transversal máxima de uma partícula da corda vibrante.

6. Uma onda transversal se propaga numa corda vibrante. Obtenha a equação da onda, sabendo os seguintes dados: amplitude = 1,5 cm; período = 0,4 s; velocidade de propagação = 80 cm/s. Considere as variáveis x e y em cm e t em s.
Resposta: $y = 1{,}5$ sen $(0{,}196x - 15{,}708t)$.

7. Uma onda senoidal propaga-se ao longo de uma corda. Um dado ponto da corda move-se desde o deslocamento máximo até o deslocamento zero num intervalo de tempo de 0,2 s. Suponha que o comprimento de onda seja igual a 1,2 m. Determine: (*a*) o período, (*b*) a freqüência, (*c*) a velocidade da onda.

8. Uma onda, cuja freqüência é igual a 400 Hz, possui velocidade de fase igual a 300 m/s. (*a*) Calcule a distância entre dois pontos, sabendo que a diferença de fase entre eles vale 30º. (*b*) Seja de 90º a diferença de fase entre dois deslocamentos produzidos num mesmo ponto; calcule o intervalo de tempo para que isto ocorra.
Resposta: (*a*) 6,25 cm. (*b*) $6{,}25 \times 10^{-4}$ s.

9. Escreva a equação de uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo Ox, sabendo os seguintes dados: amplitude = 1,5 cm; período = 0,04 s; velocidade = 250 m/s; para $x = 0$ e $t = 0$, $y = 0{,}8$ cm.

10. (*a*) Um vibrador ligado a uma mola espiral produz uma onda senoidal que se propaga continuamente ao longo da mola. A freqüência da fonte de vibração é igual a 20 Hz e a distância entre duas rarefações sucessivas na mola é igual a 20 cm. Calcule a velocidade da onda. (*b*) O deslocamento longitudinal máximo de uma partícula da mola é igual a 2,5 mm e a onda se move no sentido negativo do eixo Ox. Escreva a equação da onda. Suponha que a fonte da vibração esteja no ponto $x = 0$ e que nesse ponto o deslocamento no instante $t = 0$ seja nulo.
Resposta: (*a*) 400 cm/s. (*b*) $y = 0{,}25$ sen $(0{,}314x + 125{,}66t)$; onde x e y são dados em centímetros e t em segundos.

SEÇÃO 19-4

11. Considere as seguintes ondas progressivas:
$$y_1 = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi)$$
$$y_2 = y_m \text{ sen } (kx + \omega t - \phi)$$
onde ϕ é o ângulo de fase. Suponha que estas duas ondas sejam superpostas numa corda vibrante. Determine a equação da onda resultante.

SEÇÃO 19-5

12. Partindo da equação de uma onda progressiva, obtenha uma expressão ligando as derivadas parciais de segunda ordem: $\partial^2 y/\partial x^2$ e $\partial^2 y/\partial t^2$.
Resposta: $\partial^2 y/\partial x^2 = (1/v^2)\,(\partial^2 y/\partial t^2)$.

13. Calcule a velocidade de propagação de uma onda transversal numa corda cujo comprimento é igual a 1,5 m e cuja massa é de 50 g, submetida a uma tensão de 400 N.

14. A densidade linear de uma corda vibrante é $1{,}3 \times 10^{-4}$ kg/m. Uma onda transversal propaga-se na corda e é descrita pela equação $y = 0{,}021$ sen $(x + 30\,t)$, onde x e y são medidos em metros e t em segundos. Qual a tensão na corda? *Resposta:* 0,12 N.

15. Uma onda senoidal contínua propaga-se numa corda com velocidade de 50 cm/s. Verifica-se que o deslocamento das partículas da corda no ponto $x = 10$ cm varia com o tempo de acordo com a equação $y = 5{,}0$ sen $(1{,}0 - 4{,}0\,t)$ em cm. A densidade linear da corda é de 4,0 g/cm. (*a*) Qual é a freqüência da onda? (*b*) Qual é o comprimento de onda da onda? (*c*) Escreva a equação geral que dá o deslocamento transversal das partículas da corda em função da posição e do tempo. (*d*) Calcule a tensão na corda.

16. Prove que a inclinação de uma corda, em qualquer ponto, é numericamente igual à razão entre a velocidade da partícula e a velocidade da onda naquele ponto.

17. Uma onda transversal harmônica simples propaga-se ao longo de uma corda para a esquerda (ou $-x$). A Fig. 19-20 mostra um gráfico do deslocamento em função da posição no tempo $t = 0$. A tensão na corda é de 3.6 N e sua densidade linear é de

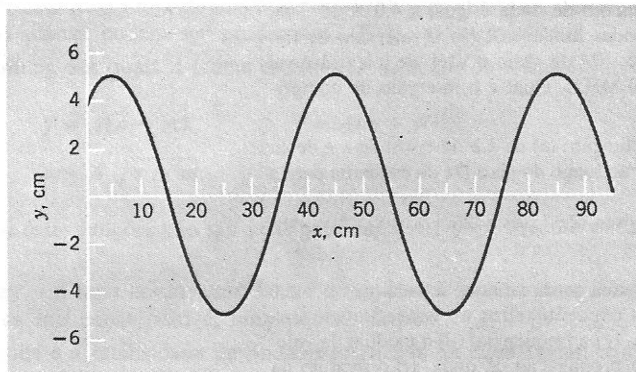


figura 19-20

25 g/m. Calcule (*a*) a amplitude, (*b*) o comprimento de onda, (*c*) a velocidade da onda, (*d*) o período e (*e*) a velocidade máxima de uma partícula na corda. (*f*) Escreva uma equação descrevendo a propagação da onda.

18. Um aro circular uniforme feito com uma corda gira no sentido horário, na ausência de gravidade (Fig. 19-21). A velocidade tangencial é v_0. Determinar a velocidade das ondas que se propagam nessa corda. (*Sugestão:* A resposta independe do raio do aro e da massa por unidade de comprimento da corda!) *Resposta:* v_0.

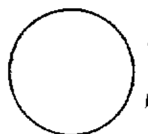


figura 19-21

19. Uma corda homogênea de massa m e comprimento L pende do teto. (*a*) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de y, a distância da extremidade inferior, e é dada por $v = \sqrt{gy}$. (*b*) Mostre que o transcurso do tempo de uma onda transversal que se propaga ao longo da corda é dado por $t = 2\sqrt{L/g}$. (*c*) A massa da corda afeta os resultados de (*a*) e (*b*)?

SEÇÃO 19-6

20. Uma onda transversal se propaga numa corda vibrante. O deslocamento transversal y é dado por:

$$y = 2 \text{ sen } (3x - 4t)$$

onde y e x são dados em cm e t em s. Determine a expressão da velocidade transversal u de uma partícula da corda em função de x e de t. *Resposta:* $u = -8 \cos (3x - 4t)$.

21. Considere o problema anterior. Obtenha a expressão da potência instantânea.

22. Uma fonte de 1,0 watt emite ondas esféricas em um meio isotrópico não absorvente. Qual a intensidade da onda a 1,0 m da fonte? *Resposta:* 0,080 W/m^2.

23. (*a*) Provar que a intensidade I (energia que atravessa a unidade de área por unidade de tempo) é igual ao produto da energia por unidade de volume, e, pela velocidade de propagação v de um distúrbio ondulatório. (*b*) As ondas de rádio propagam-se à velocidade de $3{,}0 \times 10^8$ m/s. Determinar a densidade de energia em uma onda de rádio, a 500 km de uma fonte de 5×10^4 watts. Suponha que as ondas sejam esféricas e a propagação isotrópica.

24. Uma fonte linear emite uma onda que se expande cilindricamente. Supondo que o meio não absorva energia, determine como (*a*) a intensidade e (*b*) a amplitude da onda dependem da distância à fonte. *Resposta:* (*a*) Proporcional a r^{-1}. (*b*) Proporcional a $r^{-1/2}$.

25. (*a*) Parta do Exemplo 2 e demonstre que a velocidade *máxima* de uma partícula de uma corda, pela qual esteja passando uma onda senoidal, é $u = y_m\omega$. (*b*) Vimos, no Exemplo 2, que as partículas da corda oscilam com movimento harmônico simples. A energia mecânica de cada partícula é a soma de suas energias cinética e potencial e é sempre igual ao valor *máximo* de sua energia cinética. Considere um elemento da corda, de massa $\mu\Delta x$, e demonstre que a energia *por unidade de comprimento* da corda é

$$E_l = 2\pi^2 \mu v^2 y_m^2.$$

(*c*) Mostre, finalmente, que a potência média ou média temporal de transmissão de energia, é o produto de E_l pela velocidade de onda. (*d*) Esses resultados são válidos apenas para ondas senoidais?

26. Uma onda propaga-se uniformemente em todas as direções, a partir de uma fonte puntiforme. (*a*) Justificar a seguinte expressão para o deslocamento y do meio, a qualquer distância r da fonte:

$$y = \frac{Y}{r} \text{ sen } k(r - vt).$$

Considere a velocidade, direção de propagação, periodicidade e intensidade da onda. (*b*) Quais as dimensões da constante Y? *Resposta:* (*b*) L^2.

SEÇÃO 19-7

27. Duas ondas progressivas possuem a mesma amplitude (y_m = 3 cm) e se propagam no mesmo sentido com a mesma velocidade de propagação (v = 15 cm/s). As duas ondas possuem o mesmo comprimento de onda (λ = 1,5 cm) e a diferença de fase entre elas é igual a ($\pi/2$) radianos. Obtenha a expressão da onda resultante destes dois movimentos oscilatórios.

28. As oscilações transversais de uma corda vibrante são dadas por:
$y_1 = \text{sen } (2x - 3t - 2\pi/3)$,
$y_2 = \text{sen } (2x - 3t)$.
Ache a expressão da onda resultante da superposição destes dois movimentos vibratórios. *Resposta:* $y = \text{sen } (2x - 3t - \pi/3)$

29. Determine a amplitude do movimento oscilatório resultante, quando se superpõem dois movimentos senoidais, que possuem o mesmo comprimento de onda e que se propagam

com a mesma velocidade. As amplitudes valem 3,0 cm e 5,0 cm e a diferença de fase entre as ondas é igual a $(\pi/3)$ radianos.

30. Uma fonte S e um detector D de ondas de alta freqüência estão no solo à distância d entre si. Verifica-se que uma onda recebida diretamente de S chega a D em fase com a onda refletida por uma camada horizontal situada à altura H (Fig. 19-22). Os raios incidentes e refletidos formam ângulos iguais com a camada refletora. Se esta se elevar de uma distância h, nenhum sinal é recebido em D. Despreze a absorção na atmosfera e determine a relação entre d, h, H e o comprimento de onda λ.
Resposta: $\lambda = 2\sqrt{4(H+h)^2 + d^2} - 2\sqrt{4H^2 + d^2}$.

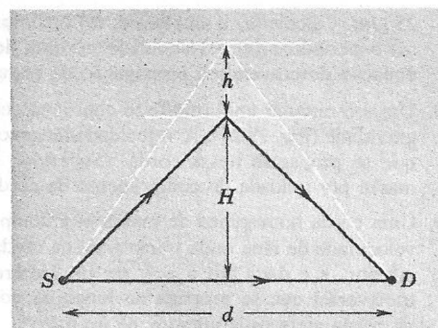


figura 19-22

31. Cinco ondas senoidais se propagam no mesmo sentido numa corda vibrante. Todas as ondas possuem a mesma amplitude (y_m = 1 cm), o mesmo comprimento de onda (λ = = 2 cm) e a mesma velocidade de fase (v = 4 cm/s). A diferença de fase entre duas ondas consecutivas é constante ($\phi = 20°$). Determine a amplitude e a defasagem da onda resultante em relação à primeira onda.

32. Dois pulsos se propagam ao longo de uma corda em direções opostas, como indicado na Fig. 19-23. A velocidade da onda é de 2,0 m/s e os pulsos estão inicialmente separados por uma distância de 6,0 cm. (*a*) Em que instante o deslocamento efetivo se anula? (*b*) Um deslocamento nulo implica numa energia cinética nula? Explique.
Resposta: (*a*) 15 ms. (*b*) Não. A velocidade transversal não se anula, portanto a energia cinética não é nula neste instante.

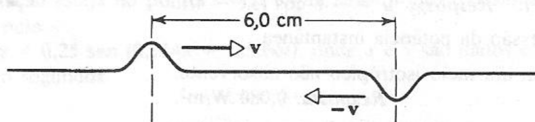


figura 19-23

33. Seja $B = kx - \omega t$. Considere as seguintes ondas:
$y_1 = \text{sen } B$; $y_2 = 2 \text{ sen } (B - \phi_1)$; $y_3 = 4 \text{ sen } (B - \phi_2)$.
Obtenha a equação da onda resultante da superposição destas três ondas. As unidades são homogêneas e y é dado em centímetros. Considere $\phi_1 = 0{,}4$, $\phi_2 = (\pi/5)$ radianos.

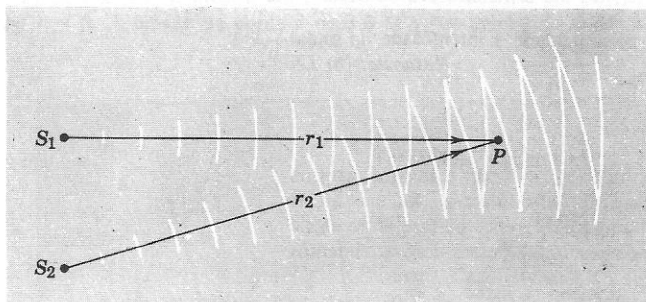
34. Considere duas fontes puntiformes S_1 e S_2 (Fig. 19-24) que emitem ondas de mesma freqüência e amplitude. As ondas são emitidas em fase e essa relação de fase mantém-se no decorrer do tempo. Considere os pontos P em que r_1 é aproximadamente igual a r_2. (*a*) Mostre que a superposição dessas duas ondas origina uma onda cuja amplitude varia com a posição P aproximadamente de acordo com

$$\frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2}(r_1 - r_2),$$

sendo $r = (r_1 + r_2)/2$. (*b*) Mostre a seguir que o cancelamento total ocorre quando $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, sendo n um inteiro qualquer, e que o deslocamento máximo ocorre quando $r_1 - r_2 = n\lambda$.

O lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos diferem de uma constante é uma hipérbole; os pontos fixos são os focos. Portanto, a cada valor de n corresponde uma hipérbole de interferência construtiva e uma de interferência destrutiva. Nos pontos em que r_1 e r_2 não são aproximadamente iguais (por exemplo, nas proximidades das fontes) as amplitudes das ondas provenientes de S_1 e S_2 diferem e os cancelamentos são apenas parciais.

figura 19-24



SEÇÃO 19-9

35. Mostre que a onda resultante obtida pela superposição das ondas do Probl. 11 é uma *onda estacionária*. Localize os *nodos* (ou *nós*) e os *antinodos* (ou *ventres*).

36. Duas ondas estacionárias possuem a mesma amplitude, o mesmo comprimento de onda e a mesma velocidade de propagação. Qual deve ser a diferença de fase para que ocorra: (*a*) interferência destrutiva, (*b*) interferência construtiva.
Resposta: (*a*) $2n\pi$. (*b*) $(2n + 1)\pi$. Onde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

37. A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é dada por

$$y = 10 \cos (0{,}0079\, x - 13\, t - 0{,}89),$$

em que x e y são expressos em centímetros e t em segundos. Escreva a equação de uma onda que, superpondo-se a esta, produziria ondas estacionárias na corda.

38. Uma corda vibra de acordo com a equação

$$y = 5 \text{ sen } \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t,$$

sendo x e y medidos em centímetros, t em segundos. (*a*) Quais a amplitude e a velocidade das ondas componentes cuja superposição origina essa vibração? (*b*) Qual a distância entre nodos? (*c*) Qual a velocidade de uma partícula da corda na posição $x = 1{,}5$ cm, quando $t = \frac{9}{8}$ s? *Resposta:* (*a*) 0,25 cm, 120 cm/s. (*b*) 3,0 cm. (*c*) Nula.

39. Duas ondas senoidais transversais propagam-se em direções opostas ao longo de uma corda. Cada uma tem amplitude de 0,30 cm e um comprimento de onda de 6,0 cm. A velocidade de uma onda transversal na corda é 1,5 m/s. Faça um gráfico da forma da corda em função de x para cada um dos seguintes instantes: $t = 0$, $t = 5{,}0$, $t = 10{,}0$, $t = 15{,}0$, $t = 20{,}0$ ms.

40. Se uma onda progressiva incidente é refletida parcialmente por um obstáculo, a superposição de duas ondas de diferentes amplitudes e que se propagam em sentidos opostos resulta em uma configuração de onda estacionária cuja envoltória está indicada na Fig. 19-25. A razão de onda estacionária (ROE) é definida como $(A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{\text{máx}}/A_{\text{mín}}$. (*a*) Mostrar que, para reflexão total (100%), ROE $= \infty$ e que se não houver reflexão, ROE $= 1$. (*b*) Mostrar que se a ROE for medida imediatamente antes do obstáculo, a percentagem de reflexão que ocorre nele é expressa pela fórmula

$$\% \text{ de reflexão} = [(\text{ROE} - 1)^2/(\text{ROE} + 1)^2] \times 100.$$

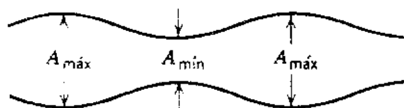


figura 19-25

41. Duas cordas de densidade linear μ_1 e μ_2 são ligadas no ponto $x = 0$ e esticadas sob a tensão F. Uma onda $y = A \text{ sen } k_1 (x - v_1 t)$, na corda de densidade μ_1, alcança a junção das duas cordas, na qual a onda é parcialmente refletida e parcialmente transmitida à outra corda. Sejam $B \text{ sen } k_2 (x - v_2 t)$ e $C \text{ sen } k_1 (x + v_1 t)$ essas ondas, respectivamente. (*a*) Suponha que $k_2 v_2 = k_1 v_1 = \omega$ e que o deslocamento do nodo, proveniente das ondas incidente e refletida, seja idêntico ao provocado pela onda transmitida. Prove que $A = B + C$. (*b*) Admitindo que, na proximidade do nodo, ambas as cordas tenham a mesma inclinação (por quê?), ou seja, que dy/dx da corda 1 $= dy/dx$ da corda 2, mostrar que

$$C = A \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

Em que condições C é negativo?

42. Considere uma onda estacionária que é a soma de duas ondas que se propagam em direcões contrárias e, que a não ser por este fato, são iguais. Mostre que a energia em cada arco da onda estacionária é $2\pi^2 \mu\, y_m^2\, \nu\, v$

SEÇÃO 19-10

43. Uma corda vibrante de comprimento $l = 30$ cm possui suas duas extremidades fixas. Obtenha os diferentes comprimentos de onda possíveis para a vibração desta corda.

44. Um diapasão emite vibrações de 600 ciclos/s provocando ondas estacionárias em uma corda com as duas extremidades presas. A velocidade de onda para a corda é de 400 m/s. A onda estacionária tem cinco nodos e 2,0 mm de amplitude. (*a*) Qual é o comprimento da corda? (*b*) Escreva uma equação para o deslocamento da corda em função da posição e do tempo.
Resposta: (*a*) 1,3 m. (*b*) $2{,}0 \times 10^{-3}$ sen $9{,}4\, x \cos 3.800 t$, onde x e y estão em metros e t em segundos.

45. Um arame de alumínio de comprimento $l_1 = 60{,}0$ cm e de $1{,}00 \times 10^{-2}$ cm² de área transversal está ligado a um arame de aço de mesma área transversal. O fio combinado, que suporta um bloco m de 10,0 kg de massa, é disposto, conforme a Fig. 19-26, de modo que a distância l_2 que vai da junta até a polia, seja de 86,6 cm. Uma fonte externa, de freqüência variável, produz ondas transversais no arame. (*a*) Determine a freqüência mais baixa de excitação pela qual ondas estacionárias sejam produzidas de maneira que a junta no arame seja um nodo. (*b*) Qual é o número total de nodos observados nesta freqüência, excetuando os dois das extremidades do arame? A densidade do alumínio é de 2,60 g/cm³ e a do aço, 7,80 g/cm³.

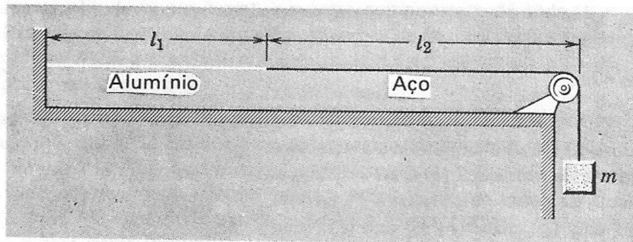


figura 19-26

20
ondas sonoras

20-1
ONDAS AUDÍVEIS, ULTRA-SÔNICAS E INFRA-SÔNICAS

As ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais que podem se propagar em sólidos, líquidos e gases. As partículas materiais que transmitem a onda oscilam paralelamente à direção de propagação da própria onda. As ondas mecânicas longitudinais podem ser geradas com freqüências cujos valores situam-se em um intervalo muito grande; as ondas sonoras são constituídas por aquelas cujas freqüências situam-se em um intervalo capaz de estimular a sensação de audição no ouvido e no cérebro humano. Este intervalo está compreendido, aproximadamente, entre 20 Hz e 20.000 Hz, e é denominado intervalo *audível.* Uma onda mecânica longitudinal cuja freqüência esteja abaixo do intervalo audível é denominada onda *infra-sônica*; se a freqüência estiver acima do intervalo audível tem-se uma onda *ultra-sônica.*

Os infra-sons de interesse são geralmente produzidos por fontes de grande tamanho, sendo exemplo os terremotos.[1] As altas freqüências associadas aos ultra-sons[2] podem ser produzidas por vibrações elásticas de um cristal de quartzo induzidos por ressonância com um campo elétrico alternado (efeito piezelétrico). É possível produzir freqüências ultra-sônicas muito altas, de até 6×10^8 Hz com este processo; os comprimentos de onda correspondente, no ar, são de aproximadamente 5×10^{-5} cm, igual a comprimentos de onda da luz no visível.

[1] Ver "Long Earthquake Waves", por Jack Oliver, *Scientific American*, março 1959.

[2] Ver "Applications of Ultrasonics" por Margaret F. Cracknell e Arthur P. Cracknell, *Contemporary Physics*, janeiro, 1976.

As ondas audíveis originam-se em cordas vibrantes (violino, cordas vocais humanas), em colunas de ar em vibração (órgão, clarineta) e em placas e membranas vibrantes (xilofone, alto-falante, tambor). Todos estes elementos vibrantes alternadamente comprimem o ar em volta deles, em seu movimento para a frente, rarefazendo-o em seu movimento de volta. O ar transmite estas perturbações em forma de onda que se propaga a partir da fonte. Ao penetrar no ouvido, estas ondas originam a sensação sonora. As ondas cujas formas são aproximadamente periódicas, ou consistem de um pequeno número de componentes aproximadamente periódicas, originam uma sensação agradável (se a intensidade não for muito grande), como acontece, por exemplo, com os sons musicais.[3] Uma onda sonora cuja forma é aperiódica nos dá a sensação de barulho. Um barulho pode ser representado como uma superposição de ondas periódicas, mas o número de componentes é muito grande.

Neste capítulo, trataremos das propriedades das ondas mecânicas longitudinais, usando as ondas sonoras como protótipo.

20-2 *PROPAGAÇÃO E VELOCIDADE DE ONDAS LONGITUDINAIS*

Se não encontrarem obstáculos, as ondas sonoras se propagarão em todas as direções a partir da fonte. Entretanto, é mais simples tratar da propagação em uma dimensão do que em três dimensões, de modo que consideraremos, inicialmente, a transmissão de ondas longitudinais em um tubo.

A Fig. 20-1 mostra um êmbolo na extremidade de um tubo comprido, cheio de uma substância compressível. As linhas verticais dividem o meio compressível (fluido) em finas "fatias", todas elas contendo a mesma massa de fluido. Onde as linhas se encontram mais próximas umas das outras, a pressão e a massa específica de têm valores maiores do que no estado normal do fluido, e reciprocamente. Suporemos o fluido como sendo um meio contínuo e ignoraremos, por enquanto, o fato de que ele é constituído por moléculas que se encontram em contínuo movimento caótico.

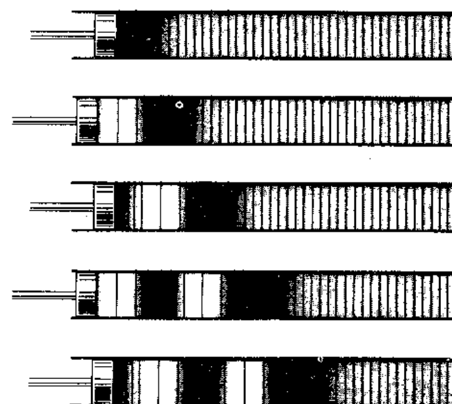


figura 20-1
Ondas sonoras produzidas em um tubo por um pistão oscilante. As linhas verticais dividem o meio compressível existente no tubo em camadas de mesma massa.

Se empurrarmos o êmbolo da Fig. 20-1, o fluido em frente a ele será comprimido, acarretando um aumento na pressão e na massa específica, em relação a seus valores no estado não perturbado. O fluido comprimido desloca-se para a frente, comprimindo as camadas adjacentes, e um pulso de compressão propaga-se ao longo do tubo. Se, então, deslocamos o êmbolo para trás, o fluido em frente a ele se expande, sua pressão e sua densidade diminuem, assumindo valores inferiores aos do estado não perturbado, e um pulso de rarefação propaga-se ao longo do tubo. Estes pulsos são semelhantes aos pulsos transversais que se propagam em uma corda, exceto que os elementos oscilantes do fluido deslocam-se paralelamente à direção de propagação (oscilações longitudinais) e não perpendicularmente a esta direção (oscilações transversais). Se o êmbolo oscilar para a frente e para trás, um conjunto contínuo de compressões e rarefações se propagará ao longo do tubo (Fig. 20-1). De modo semelhante às ondas transversais em uma corda (ver a Seç. 19-5) devemos poder expressar, usando as leis do movimento de Newton, a velocidade de propagação dessa onda longitudinal em termos de uma propriedade elástica e de uma propriedade inercial do meio. É o que faremos a seguir.

[3] Uma boa referência de caráter geral sobre às propriedades científicas dos sons musicais é "The Acoustical Foundations of Music" por John Backus, W. W. Norton & Co., Inc., Nova Iorque, 1969.

Por enquanto, admitamos que o tubo é muito comprido, de modo que possamos ignorar as reflexões que ocorrem na outra extremidade. Como fizemos com a corda da Fig. 19-6, não consideraremos uma onda extensa, mas apenas um único pulso (de compressão) que poderia ter sido gerado com um deslocamento curto e rápido do êmbolo para dentro do tubo.

A Fig. 20-2 mostra este pulso (indicado como "zona de compressão") propagando-se com velocidade v, da esquerda para a direita, ao longo do tubo. Por comodidade, admitamos que este pulso tenha fronteiras anterior e posterior bem definidas e que a pressão e a massa específica do fluido sejam uniformes em seu interior. Quando analisamos o movimento de um pulso transversal em uma corda, verificamos ser conveniente a escolha de um referencial no qual o pulso permanecesse estacionário; isto será feito aqui. Portanto, na Fig. 20-2, a zona de compressão permanece estacionária em nosso referencial enquanto o fluido move-se através dela, com velocidade v, da direita para a esquerda, como está indicado na figura.

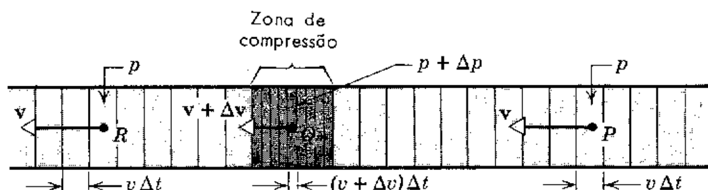


figura 20-2
Um pulso de compressão propaga-se ao longo de um tubo que contém gás. Em um referencial no qual o gás esteja em repouso, o pulso se move da esquerda para a direita com velocidade v. O pulso é visto, no entanto, de um referencial em que ele esteja estacionário; neste caso, o gás externo ao pulso flui através do tubo da direita para a esquerda, como indica a figura. Note que Δv é negativo.

Acompanhemos o movimento do elemento de fluido situado entre as linhas verticais em P na Fig. 20-2. Este elemento desloca-se para a frente com uma velocidade v até atingir a zona de compressão. Enquanto penetra nesta zona, ele encontra uma diferença de pressão Δp entre as suas faces anterior e posterior. O elemento é *comprimido* e *desacelerado*, movendo-se com uma velocidade menor $v + \Delta v$ no interior da zona, sendo Δv uma quantidade negativa. O elemento acaba por emergir da face esquerda da zona de compressão, expandindo-se para o seu volume original e a diferença de pressão Δp *acelera-o* até que ele adquira a velocidade v original. A figura mostra o elemento no ponto R, após passar pela zona de compressão e ao mover-se novamente com velocidade v, como ocorria em P.

Apliquemos as Leis de Newton ao elemento do fluido enquanto ele está penetrando na zona de compressão. A força resultante que atua sobre ele durante a entrada aponta para a direita na Fig. 20-2 e vale

$$F = (p + \Delta p)A - pA = \Delta pA$$

onde A é a área da seção reta do tubo.

O comprimento do elemento situado fora da zona de compressão (digamos, em P) é v. Δt é o tempo necessário para o elemento passar por um ponto dado qualquer. O volume do elemento é então $vA\Delta t$ e sua massa é $\rho_0 vA\Delta t$, onde ρ_0 é a massa específica do fluido fora da zona de compressão. A desaceleração a do elemento, enquanto penetra na zona, é $-\Delta v/\Delta t$; uma vez que Δv é negativo, a é positiva, indicando que, do mesmo modo que a força ΔpA, na Fig. 20-2, ela está voltada para a direita. Assim, a segunda Lei de Newton,

$$F = ma,$$

fornece-nos

$$\Delta pA = (\rho_0 vA\Delta t)\frac{-\Delta v}{\Delta t},$$

que pode ser escrita como

$$\rho_0 v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta v/v}.$$

Mas o fluido quę ocupa o volume $V = Av\Delta t$ em P é comprimido de $A(\Delta v)\Delta t = \Delta V$ ao penetrar na zona de compressão. Portanto,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta v\Delta t}{Av\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}$$

e obtemos

$$\rho_0 v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V}.$$

A razão entre a variação da pressão em um corpo, Δp, e a variação relativa que ela acarreta no volume, $-\Delta V/V$, é denominada *módulo volumétrico*, *B*, do corpo. Então, $B = -V \cdot \Delta p/\Delta v$, que é positivo, pois um aumento na pressão acarreta uma diminuição no volume. Em função, de B, a velocidade do pulso longitudinal no meio representado na Fig. 20-2, é dada por

$$v = \sqrt{B/\rho_0}. \qquad (20\text{-}1)$$

Uma análise mais geral do que a exposta acima mostra que a Eq. 20-1 aplica-se não apenas a pulsos retangulares do tipo mostrado na Fig. 20-2, mas também a pulsos de forma qualquer e a uma extensa sucessão de pulsos. Observe que a velocidade da onda é determinada pelas propriedades do meio no qual ela se propaga; note ainda a presença de uma propriedade elástica B, e uma propriedade de inércia, ρ_0. A Tab. 20-1 relaciona as velocidades das ondas longitudinais (sonoras) em vários meios.

Tabela 20-1

Velocidade do som

Meio	Temperatura, °C	Velocidade m/s
Ar	0	331,3
Hidrogênio	0	1.286
Oxigênio	0	317,2
Água	15	1.450
Chumbo	20	1.230
Alumínio	20	5.100
Cobre	20	3.560
Ferro	20	5.130
Valores extremos		
Granito		6.000
Borracha vulcanizada	0	54

Se o meio for um gás, como o ar, é possível exprimir B em função da pressão p_0 do gás não perturbado. Para uma onda sonora em um gás obtemos

$$v = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0},$$

onde a constante γ representa a razão de calores específicos do gás (Cap. 23).

Se o meio for um sólido, para uma barra fina o módulo volumétrico é substituído por um módulo de alongamento (denominado módulo de Young). Se o sólido for extenso, devemos levar em consideração o fato de que um sólido, ao contrário de um fluido, apresenta resistência a forças tangenciais ou de cisalhamento; por isso, a velocidade das ondas longitudinais dependerá tanto do módulo de cisalhamento quanto do módulo volumétrico.

20-3 *PROPAGAÇÃO DE ONDAS LONGITUDINAIS*

Consideremos novamente um conjunto contínuo de compressões e rarefações propagando-se ao longo do tubo da Fig. 20-1. À medida que a onda avança ao longo do tubo, cada pequeno volume elementar do fluido oscila em torno de sua posição de equilíbrio. Os deslocamentos se realizam para a direita e para a esquerda sobre a direção Ox, na qual a onda se propaga. Por conveniência, representemos o deslocamento de qualquer volume elementar (ou camada de elementos que se movem de maneira idêntica), a partir de sua posição de equilíbrio em x, pela letra y. Deve-se entender que o deslocamento y está dirigido *ao longo da direção de propagação* em uma onda longitudinal, enquanto que, em uma onda transversal, o deslocamento y se faz perpendicularmente *à direção de propagação*. Então, a equação de uma onda longitudinal que se propaga para a direita pode ser escrita como

$$y = f(x - vt).$$

Para o caso particular de uma oscilação harmônica simples, podemos ter

$$y = y_m \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt).$$

Nesta equação v é a velocidade da onda longitudinal, y_m é a sua amplitude e λ é o seu comprimento de onda; y representa o deslocamento de uma partícula no instante t, a partir de sua posição de equilíbrio em x. Como anteriormente, podemos escrever esta equação de maneira mais compacta como

$$y = y_m \cos(kx - \omega t). \qquad (20\text{-}2)$$

Em geral, é mais conveniente trabalhar com as variações de pressão em uma onda sonora do que com os deslocamentos reais das partículas que transmitem a onda. Procuremos, portanto, escrever a equação da onda em termos de variação na pressão e não em termos do deslocamento.

Da relação

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

obtemos

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}.$$

Do mesmo modo que representamos por y o deslocamento em relação à posição de equilíbrio x, representaremos por p a *variação* da pressão em relação ao valor não perturbado p_0. Assim substituímos Δp por p e escrevemos

$$p = -B\frac{\Delta V}{V}.$$

Se uma camada do fluido, à pressão p_0, tem uma espessura Δx e a área de sua seção reta é A, o seu volume é $V = A \cdot \Delta x$. Quando a pressão varia, o seu volume variará de $A\Delta y$, onde Δy representa a variação na espessura da camada durante uma compressão ou uma rarefação. Portanto,

$$p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A \cdot \Delta y}{A \cdot \Delta x}.$$

Se fizermos $\Delta x \to 0$, de modo que a camada de fluido tenda para uma espessura infinitesimal, obtemos

$$p = -B\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{20-3}$$

Usamos a notação de derivada parcial porque (veja a Eq. 20-2) y é função tanto de x quanto de t e consideramos constante esta segunda grandeza, na presente discussão. Se o deslocamento da partícula for harmônico simples, obtemos, da Eq. 20-2,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -ky_m \operatorname{sen}(kx - \omega t),$$

e, da Eq. 20-3,

$$p = Bky_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \tag{20-4}$$

Portanto, a variação da pressão em cada posição x é também harmônica simples.

Como $v = \sqrt{B/\rho_0}$, podemos escrever a Eq. 20-4 de maneira mais conveniente, como se segue:

$$p = [k\rho_0 v^2 y_m] \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Lembremos que p representa a variação da pressão, relativamente ao valor normal p_0. O termo entre colchetes representa a variação máxima na pressão e se denomina *amplitude da pressão.* Se a representarmos por P, teremos

$$p = P \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{20-5}$$

onde

$$P = k\rho_0 v^2 y_m. \tag{20-6}$$

Portanto, uma onda sonora pode ser considerada tanto uma onda de deslocamento quanto uma onda de pressão. Se a primeira for expressa por uma função co-senóide, a segunda o será por uma função senóide e reciprocamente. A onda de deslocamento está, então, defasada de 90° em relação à onda de pressão, isto é, quando em um ponto o deslocamento em relação à posição de equilíbrio for máximo ou mínimo, o excesso de pressão naquela posição é nulo; quando o deslocamento em um ponto for nulo, o excesso ou deficiência de pressão no ponto é máximo. A Eq. 20-6 fornece a relação entre a amplitude de pressão (máxima variação de pressão em relação ao equilíbrio) e a amplitude de deslocamento (máxima

variação de posição em relação ao equilíbrio). O estudante deve verificar as dimensões de cada membro da Eq. 20-6 e comprovar a homogeneidade dimensional. Quais as unidades da amplitude de pressão?

A intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado da amplitude de deslocamento da onda; veja a Seç. 19-6. Acabamos de mostrar que, para ondas sonoras, a amplitude de pressão é proporcional à amplitude de deslocamento. Portanto, a intensidade de uma onda sonora é proporcional ao quadrado da amplitude da pressão. Aliás, quando a intensidade é expressa em função da amplitude de pressão, a freqüência não aparece explicitamente na expressão (veja Probl. 9). Então, medindo-se variações de pressão, as intensidades de sons de freqüência *diferentes* podem ser comparadas diretamente. Por este motivo, os aparelhos que medem variações de pressão são preferíveis àqueles que medem a amplitude de deslocamento. Como veremos no Exemplo 1, as amplitudes de deslocamento, em qualquer caso, seriam difíceis de medir.

EXEMPLO 1

(*a*) A máxima variação de pressão, P, que o ouvido pode tolerar, em sons intensos, vale cerca de $28\ \mathrm{N/m^2}$ (= 28 Pa). A pressão atmosférica normal vale, aproximadamente, 100.000 Pa. Calcular o deslocamento máximo correspondente em uma onda sonora, no ar, cuja freqüência é 1.000 Hz.

Da Eq. 20-6 obtemos

$$y_m = \frac{P}{k\rho_0 v^2}.$$

Na Tab. 20-1 vemos que $v = 331$ m/s, de modo que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi \times 10^3}{331,3}\,\mathrm{m^{-1}} = 19\,\mathrm{m^{-1}}.$$

A massa específica do ar, ρ_0, é de $1,22\ \mathrm{kg/m^3}$. Portanto, para $P = 28$ Pa, obtemos

$$y_m = \frac{28}{19 \times 1,22 \times (331)^2}\,\mathrm{m} = 1,1 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}.$$

As amplitudes de deslocamento, para os sons *mais intensos*, são da ordem de 10^{-5} m, um valor realmente muito pequeno.

(*b*) No som mais fraco que pode ser ouvido na freqüência de 1.000 Hz, a amplitude de pressão vale cerca de $2,0 \times 10^{-5}$ Pa. Calcular a amplitude de deslocamento correspondente.

De $y_m = P/k\rho_0 v^2$, substituindo aqueles valores de k, v e ρ_0, obtemos, com $P = 2,0 \times 10^{-5}\ \mathrm{N/m^2}$,

$$y_m \cong 8 \times 10^{-12}\,\mathrm{m} \cong 10^{-11}\,\mathrm{m}.$$

Este valor é inferior ao raio de um átomo, que é da ordem de 10^{-10} m. Como pode o ouvido detectar um deslocamento tão pequeno?

Em nossa análise, não levamos em consideração a estrutura molecular da matéria e tratamos o fluido como se fosse um meio contínuo. Entretanto, nos gases as distâncias entre as moléculas são grandes, comparadas com os seus próprios diâmetros. As moléculas movem-se ao acaso em todas as direções. As oscilações produzidas por uma onda sonora que se propague no meio superpõem-se a este movimento térmico aleatório. Um impulso aplicado a uma molécula só é transmitido a outra molécula após a primeira ter-se deslocado através do espaço vazio entre elas e colidir com a segunda. Com base nesta breve discussão, você acha que a velocidade do som poderia ser maior do que a velocidade média das moléculas do fluido?

20-4 *ONDAS LONGITUDINAIS ESTACIONÁRIAS*

As ondas longitudinais que se propagam ao longo de um tubo são refletidas nas extremidades dele do mesmo modo que as ondas transversais em uma corda se refletem nas extremidades da corda. A interferência entre as ondas que se propagam em sentidos opostos originará ondas estacionárias longitudinais.

Se a extremidade do tubo for fechada, a onda refletida estará defasada de 180° em relação à onda incidente. Este resultado é uma conseqüência necessária do fato de o deslocamento dos pequenos volumes elementares, em uma extremidade fechada, ser sempre nulo. Portanto, uma extremidade fechada é um *nodo* de deslocamento. Se a extremidade do tubo for aberta, os elementos de fluido aí localizados podem mover-se livremente. No entanto, a natureza da reflexão nesta extremidade depende do fato de ser o tubo largo ou estreito, quando comparado com o comprimento de onda. Se o tubo for estreito em comparação com o comprimento de onda, como acontece na maioria dos instrumentos musicais, a onda refletida estará praticamente em fase com a onda incidente. Assim, a extremidade aberta será, praticamente, um *antinodo* de deslocamento. A posição exata do antinodo situa-se, em geral, em algum lugar próximo à abertura, mas o comprimento efetivo das colunas de ar de um instrumento de sopro, por exemplo, não é tão definido quanto o comprimento de uma corda fixa em ambas as extremidades.

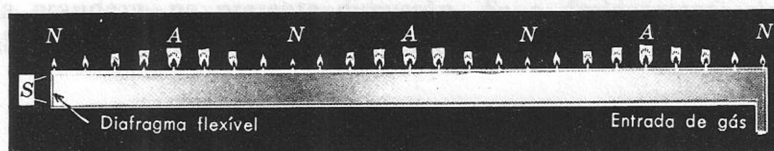


figura 20-3
As chamas indicam a presença de ondas estacionárias em um tubo que contém gás de iluminação. A e N referem-se aos antinodos e nodos de *deslocamento*, respectivamente.

A existência de ondas longitudinais estacionárias em uma coluna gasosa pode ser verificada claramente com o aparelho mostrado na Fig. 20-3. Uma fonte de ondas longitudinais, como um alto-falante de um oscilador de áudio, colocado em S, estabelece vibrações em um diafragma flexível existente em uma das extremidades do tubo. Este se enche com um gás que penetra pela entrada e sai lentamente pelas pequenas aberturas, espaçadas regularmente na parte superior do tubo. Acende-se o gás que escapa, obtendo-se uma série de chamas. Quando se encontra uma freqüência na qual a coluna de gás está em ressonância, a amplitude da onda estacionária longitudinal torna-se bastante grande e podemos observar uma variação, em forma de onda, na altura e na largura das chamas de gás ao longo do tubo. A separação entre os nodos e os antinodos é claramente visível. Variando a freqüência, podemos passar de uma condição de ressonância para outra. Os nodos naturais de vibração da coluna de gás são determinados pelo comprimento efetivo da coluna e pela velocidade da onda. O comprimento de onda na ressonância λ, pode ser considerado como sendo o dobro da distância entre nodos (ou antinodos) adjacentes e, se conhecermos a freqüência ν da fonte, quando ocorre a ressonância, poderemos calcular a velocidade da onda no gás, usando a relação $v = \nu\lambda$. Na prática, há maneiras mais simples e precisas de medir a velocidade do som nos gases (veja o Probl. 33 e o Exemplo 2).

Na Fig. 20-3, os nodos e os antinodos N e A, referem-se aos *deslocamentos* das partículas na onda estacionária. Em um nodo de deslocamento, as variações da pressão (acima e abaixo da média) são máximas. Portanto, um nodo de deslocamento corresponde a um antinodo de pressão. Em um antinodo de deslocamento, a pressão permanece constante no tempo. Portanto, um antinodo de deslocamento corresponde a um nodo de pressão.

Este fato pode ser entendido fisicamente lembrando que dois pequenos volumes elementares do gás, localizados em lados opostos de um nodo de deslocamento, estão vibrando em *oposição de fase.* Assim, quando eles se aproximam um do outro, a pressão neste nodo está aumentando e, quando eles se afastam um do outro, a pressão neste nodo está diminuindo. Dois pequenos elementos do gás, que se situam em lados opostos de um antinodo de deslocamento, vibram *em fase* e, assim, não ocasionam variações de pressão no antinodo.

20-5 *SISTEMAS VIBRANTES E FONTES SONORAS*

Se provocarmos uma perturbação lateral em uma corda fixa em ambas as extremidades, vibrações transversais se propagarão ao longo dela; estas perturbações serão refletidas nas extremidades fixas e será estabelecida uma onda estacionária. Os modos naturais de vibração da corda serão excitados e estas vibrações originarão ondas longitudinais no ar em volta da corda, que as transmitirá a nossos ouvidos como um som musical.

Vimos (Seç. 19-10) que uma corda de comprimento l, fixa em ambas as extremidades, entra em ressonância nas seguintes freqüências:

$$\nu_n = \frac{n}{2l}v = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}, n = 1, 2, 3 \ldots \qquad (20\text{-}7)$$

Nesta equação, v representa a velocidade das ondas transversais na corda, cuja superposição pode ser pensada como a causa das vibrações; a velocidade $v\,(=\sqrt{F/\mu})$ é a mesma para todas as freqüências. Em qualquer uma dessas freqüências, a corda apresentará um número inteiro, n, de antinodos entre suas extremidades e será satisfeita a condição de essas extremidades serem nodos (Fig. 20-4).

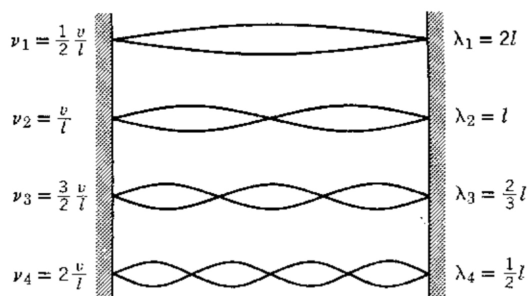


figura 20-4
Os primeiros quatro modos de vibração de uma corda fixa em ambas as extremidades. Note que $\nu_n\lambda_n = v = \sqrt{F/\mu}$.

A freqüência mais baixa, $\sqrt{F/\mu}/2l$, denomina-se *freqüência fundamental* ν_1 e todas as outras, superiores a essa, chamam-se *sobretons.* Os sobretons cujas freqüências são múltiplos inteiros da freqüência fundamental constituem o que denominamos uma série harmônica. A freqüência fundamental é o primeiro harmônico; a freqüência $2\nu_1$, é o primeiro sobretom ou o segundo harmônico, a freqüência $3\nu_1$ é o segundo sobretom ou o terceiro harmônico e assim sucessivamente.

Se a corda for deformada inicialmente, de modo que a sua forma seja igual à de *qualquer um* dos harmônicos possíveis, ela vibrará, quando abandonada, com a freqüência daquele harmônico. Entretanto, as condições iniciais, em geral, são causadas por golpes

na corda e, em tais casos, estarão presentes, na vibração resultante, tanto a freqüência fundamental como, também, muitos dos sobretons. Teremos uma superposição de vários modos naturais de vibração. O deslocamento real será a soma dos vários harmônicos com amplitudes diversas; veja a Fig. 19-12. Os impulsos que se transmitem pelo ar até o ouvido e o cérebro originam um efeito global que é característico do instrumento que foi tocado. O timbre do som de uma determinada nota (freqüência fundamental) tocada por um instrumento é determinado pelo número de sobretons presentes e por suas respectivas intensidades. A Fig. 20-5 mostra o espectro e as correspondentes formas da onda do som de um violino e de um piano.[4]

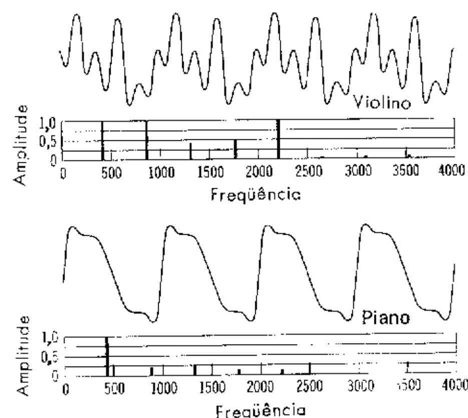


figura 20-5
Forma de onda e espectro sonoro de dois instrumentos, o violino e o piano. Em ambos os casos a freqüência fundamental é de 440 Hz (nota lá). Em cada diagrama mostram-se apenas quatro ciclos da onda. O espectro sonoro revela as amplitudes relativas dos vários harmônicos que compõem a onda. Note a presença de harmônicos superiores graves (especialmente o quinto) no espectro do violino.

Um tubo de órgão é um exemplo simples em que o som se origina em uma coluna de ar em vibração. Se ambas as extremidades do tubo são abertas e se uma corrente de ar for dirigida contra uma das extremidades, poderão ser estabelecidas ondas longitudinais estacionárias no tubo. A coluna de ar ressoará, então, com suas freqüências naturais de vibração, dadas por

$$\nu_n = \frac{n}{2l} v, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Nesta equação, v é a velocidade das ondas longitudinais na coluna, cuja superposição pode ser considerada a causa das vibrações e n é o número de meios-comprimentos de onda contidos no comprimento l da coluna. Como acontece com uma corda vibrante, a freqüência fundamental e os sobretons são excitados simultaneamente.

Em um tubo aberto, a freqüência fundamental corresponde (aproximadamente) a um antinodo de deslocamento em cada extre-

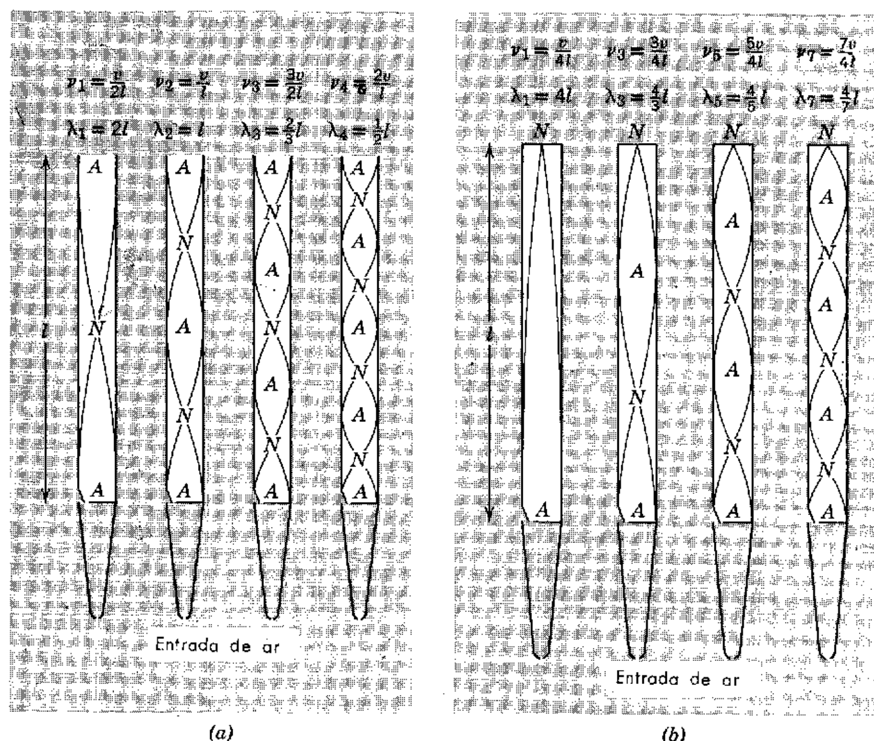


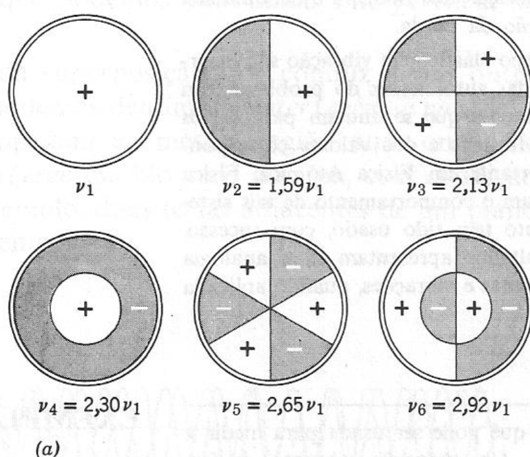
figura 20-6
(*a*) Os primeiros quatro modos de um tubo de órgão aberto. A distância da linha central do tubo às linhas finas desenhadas dentro deste representa a amplitude de deslocamento em cada lugar. *N* e *A* designam as posições dos nodos e antinodos de deslocamento. Observe que *ambas* as extremidades do tubo são abertas. (*b*) Os primeiros quatro modos de vibração de um tubo de órgão fechado. Note que os harmônicos pares estão ausentes e que o extremo superior do tubo é fechado.

[4] Veja "The Physics of the Piano" por E. Donnell Blackham, em *Scientific American*, dezembro, 1965, e "The Physics of the Violin" por Carleen M. Hutchins em *Scientific American*, novembro, 1962.

midade e a um nodo de deslocamento no centro, como está mostrado na Fig. 20-6*a*. Os demais esquemas da Fig. 20-6*a* mostram três dos sobretons: o segundo, o terceiro e o quarto harmônicos. Portanto, em um tubo aberto, a freqüência fundamental vale $v/2l$ e *todos* os harmônicos estão presentes.

Em um tubo fechado, a extremidade fechada é um nodo de deslocamento. A Fig. 20-6*b* mostra os modos de vibração de um tubo fechado. A freqüência fundamental vale $v/4l$ (aproximadamente), que é a metade da freqüência fundamental de um tubo aberto de igual comprimento. Os únicos sobretons presentes são aqueles que originam um nodo de deslocamento na extremidade fechada e um antinodo (aproximadamente) na extremidade aberta. Então, conforme se percebe pela Fig. 20-6*b*, o segundo, quarto etc., harmônicos não estão presentes. Em um tubo fechado, a freqüência fundamental vale $v/4l$ e apenas os harmônicos *ímpares* estão presentes. O timbre do som de um tubo aberto é, portanto, diferente do timbre do som de um tubo fechado.

Barras, placas e membranas esticadas ao vibrarem também originam ondas sonoras. Consideremos uma membrana flexível, esticada, tal como em um tambor. Quando ela é golpeada, um pulso bidimensional irradia-se do ponto atingido pela pancada e é refletido várias vezes nas fronteiras da membrana, se algum ponto desta for forçado a vibrar periodicamente, um conjunto contínuo de ondas propaga-se nela. Do mesmo modo que no caso unidimensional da corda, também aqui poderão ser estabelecidas ondas estacionárias na membrana bidimensional. Cada uma destas ondas estacionárias apresenta uma freqüência natural (ou característica); também aqui a freqüência mais baixa se denomina freqüência fundamental e as demais constituem os sobretons. Em geral, estão presentes vários sobretons, juntamente com a freqüência fundamental, quando a membrana está em vibração. Estas vibrações podem originar ondas sonoras de mesma freqüência.



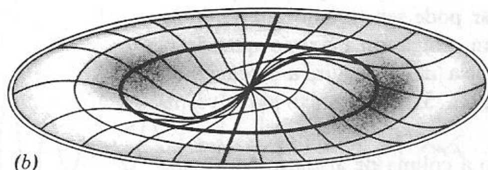


figura 20-7
(*a*) Os primeiros seis modos de vibração da membrana circular de um tambor, fixado ao longo de sua borda. As linhas representam nodos: a periferia, em qualquer caso, é um nodo. Os sinais + e − representam deslocamentos opostos: no instante em que se elevam as áreas + as áreas − baixam. Note que a freqüência de cada modo não é um múltiplo inteiro da freqüência fundamental ν_1, como acontece nas cordas e nos tubos. (*b*) Esquema de uma membrana de tambor que vibra no modo ν_6. O deslocamento representado foi exagerado por motivo de clareza.

Os nodos de uma membrana vibrante são linhas e não pontos (como acontece em uma corda vibrante) ou planos (caso de um tubo). Como as fronteiras de membrana são fixas, devemos ter aí uma linha nodal. A Fig. 20-7 mostra alguns modos possíveis de vibração de uma membrana circular fixada pela borda, assim como suas linhas nodais. A freqüência natural de cada modo é apresentada em termos de freqüência fundamental ν_1. Observe que as freqüências dos sobretons *não* são harmônicas, isto é, elas não são múltiplos inteiros de ν_1. Barras vibrantes também apresentam um conjunto anarmônico de freqüências naturais. Por este motivo, barras e placas têm um uso restrito como instrumentos musicais.

Em geral verifica-se que todos os corpos elásticos vibrarão livremente com um conjunto definido de freqüências para um dado conjunto de condições de fronteira. Estas freqüências são denominadas freqüências próprias, freqüências características ou *autofreqüências* do sistema. Em geral, as autofreqüências *não* formam uma série harmônica, embora algumas delas possam ter uma relação igual à razão de números inteiros. Em todos estes casos temos ondas estacionárias e certas regiões dos corpos permanecem constantemente em repouso. Estes nodos constituem linhas curvas em corpos bidimensionais e superfícies em corpos tridimensionais.

Lembre-se que, para uma corda vibrante, a equação que descreve uma onda estacionária (veja a Eq. 19-18*b*) é do tipo

$$y = 2y_m \cos 2\pi\nu t \,\text{sen}\, \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Esta equação é válida para uma corda fixa em ambas as extremidades ($y = 0$ em $x = 0$ e $x = n\lambda/2$). A forma da corda, em qualquer instante, é determinada pela equação

$$y = C \,\text{sen}\, \frac{2\pi x}{\lambda} = C \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{l} \qquad (t = \text{constante}),$$

onde a constante C é um "fator de escala", cujo valor varia com o tempo; l é o comprimento da corda e n é um número inteiro que especifica o modo de vibração (o harmônico). A função sen $2\pi x/\lambda$ determina a posição dos nodos e é denominada função própria, função característica ou *autofunção* da corda.

De modo semelhante, os nodos de *qualquer* corpo elástico em vibração são determinados por certas funções de posição, denominadas autofunções do problema. Em geral, estas funções *não* são senoidais mas são funções que se anulam para certos valores das coordenadas. A determinação destas funções e dos valores correspondentes das autofreqüências é um problema importante em Física Atômica, Física Nuclear e Física do Estado Sólido. Elas caracterizam o comportamento de tais sistemas. É em mecânica quântica que o procedimento tem sido usado, com sucesso, para sistemas microscópicos. Entretanto, os resultados apresentam uma analogia marcante com os resultados da teoria clássica das ondas e vibrações, quando aplicada a sistemas macroscópicos.

EXEMPLO 2

A Fig. 20-8 mostra uma aparelhagem simples que pode ser usada para medir a velocidade do som no ar utilizando ressonância. Um diapasão vibrante, de freqüência ν, é mantido próximo da extremidade aberta de um tubo, que está parcialmente cheio de água. O comprimento da coluna de ar pode ser variado alterando-se o nível da água. Verifica-se que a intensidade do som atinge um máximo quando o nível da água é abaixado gradualmente até a distância a. A seguir, a intensidade alcança novamente valores máximos às distâncias s, $2s$, $3s$ etc., abaixo do nível a. Determinar o valor da velocidade do som no ar.

A intensidade do som atinge um máximo quando a coluna de ar entra em ressonância com o diapasão. A coluna de ar se comporta como um tubo fechado em uma extremidade. A configuração da onda estacionária consiste de um nodo na super-

fície da água e de um antinodo próximo à extremidade aberta. Como a freqüência da fonte é fixa e a velocidade do som na coluna de ar tem um valor definido, a ressonância se processa com um determinado comprimento de onda

$$\lambda = \frac{v}{\nu}.$$

A distância s entre duas posições sucessivas de ressonância é, portanto, a distância entre nodos adjacentes. (Veja a Fig. 20-8.) Então,

$$s = \frac{\lambda}{2} \text{ ou } \lambda = 2s.$$

Combinando as equações, encontramos

$$2s = \frac{v}{\nu} \text{ ou } v = 2s\nu.$$

Em uma experiência com um diapasão de freqüência $\nu = 1.080$ Hz verificou-se que s valia 15,3 cm. Então,

$$\lambda = 2s = 30{,}6 \text{ cm}$$

e $v = \nu\lambda = (1.080)\ (0{,}306)$ m/s $= 330$ m/s.

Qual o significado da distância a? Outros gases, além do ar, poderiam ser usados convenientemente nesta montagem?

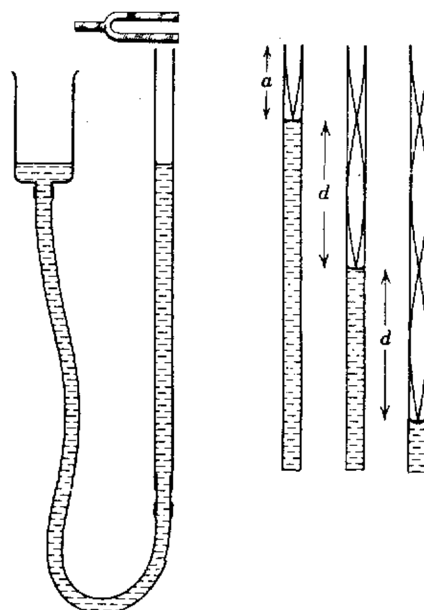


figura 20-8
Exemplo 2. Medição da velocidade do som no ar. O nível de água no tubo pode ser ajustado, elevando ou baixando o reservatório à esquerda, ligado ao tubo por uma mangueira.

20-6 *BATIMENTOS*

Quando duas ondas de freqüências iguais propagam-se ao longo da mesma linha, em sentidos opostos, formam-se ondas estacionárias, de acordo com o princípio da superposição. Podemos caracterizar estas ondas por meio de um gráfico da amplitude de oscilação em função da distância, como na Fig. 20-4. Isto ilustra um tipo de interferência que podemos denominar *interferência no espaço.*

O mesmo princípio da superposição nos conduz a um outro tipo de interferência, que podemos denominar *interferência no tempo.* Ela ocorre quando se propagam na mesma região duas ondas de *freqüências ligeiramente diferentes.* No caso do som, esta condição é satisfeita quando, por exemplo, duas teclas adjacentes de um piano são tocadas simultaneamente.

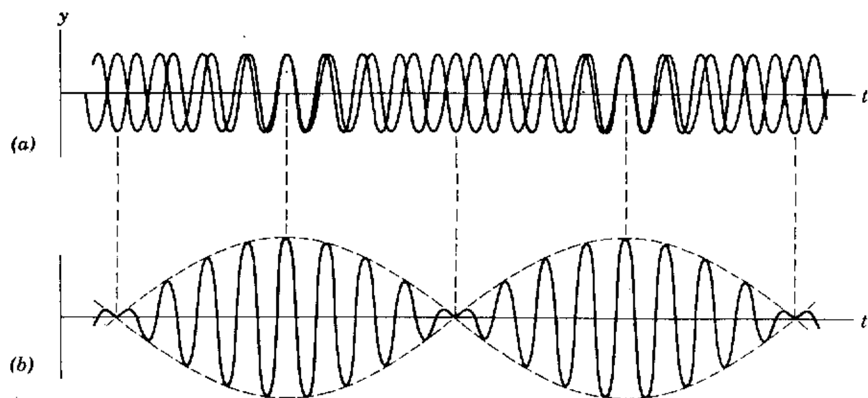


figura 20-9
O fenômeno dos batimentos. Duas ondas, de freqüências pouco diferentes, representadas em (*a*), superpõem-se em (*b*), resultando em uma onda cuja amplitude (linha interrompida) varia periodicamente com o tempo. Compare esta figura com a 19-14, que representa o mesmo fenômeno como função da distância.

Consideremos um ponto do espaço pelo qual as ondas estão passando. Na Fig. 20-9*a* mostramos os gráficos dos deslocamentos produzidos separadamente neste ponto pelas duas ondas, como funções do tempo. Por simplicidade, admitimos que as duas ondas têm a mesma amplitude, mas isto não é necessário. A vibração resultante do ponto considerado, em função do tempo, será a soma das vibrações individuais e o seu gráfico está mostrado na Fig. 20-9*b*. Vemos que a *amplitude* da onda resultante, naquele ponto, não é constante mas *varia com o tempo*. No caso de ondas sonoras, a variação na amplitude origina variações na intensidade que se denominam *batimentos*. Duas cordas podem ser afinadas com a mesma freqüência esticando-se uma delas, enquanto ambas são tocadas simultaneamente, até que os batimentos desapareçam.

Representemos o deslocamento no ponto, produzido por uma das ondas, da seguinte maneira

$$y_1 = y_m \cos 2\pi\nu_1 t,$$

e o deslocamento, no mesmo ponto, produzido pela outra onda, de mesma amplitude, por

$$y_2 = y_m \cos 2\pi\nu_2 t.$$

Pelo princípio de superposição o deslocamento resultante será

$$y = y_1 + y_2 = y_m(\cos 2\pi\nu_1 t + \cos 2\pi\nu_2 t),$$

e como $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, podemos escrever

$$y = \left[2y_m \cos 2\pi\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right)t\right]\cos 2\pi\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)t. \qquad (20\text{-}8)$$

A vibração resultante pode, então, ser considerada como tendo a freqüência

$$\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

que é a média das freqüências das duas ondas, e amplitude dada pela expressão entre colchetes. Portanto, a amplitude varia no tempo com a freqüência

$$\nu_{amp} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2}.$$

Se ν_1 e ν_2 são aproximadamente iguais, este termo será pequeno e a amplitude variará lentamente. Este fenômeno é uma forma de modulação de amplitude, que tem uma contrapartida (bandas laterais) nos receptores de rádio AM.

Um batimento, isto é, um máximo na amplitude, ocorrerá sempre que

$$\cos 2\pi \left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right) t$$

for igual a 1 ou −1. Como *cada um* destes valores ocorre uma vez em cada ciclo (veja a Fig. 19-14), o número de batimentos por segundo será o *dobro* da freqüência ν_{amp} ou $\nu_1 - \nu_2$. Assim, o número de batimentos por segundo é igual à diferença entre as freqüências das ondas componentes. Os batimentos entre dois sons podem ser detectados pelo ouvido até a freqüência de aproximadamente sete batimentos por segundo. Com freqüências maiores, os batimentos não podem ser percebidos no som produzido.

20-7 *O EFEITO DOPPLER*

Quando um ouvinte se aproxima de uma fonte sonora estacionária, a altura (freqüência) do som que ele percebe é maior do que quando ele está em repouso. Se o ouvinte se afasta da fonte estacionária, ele escuta um som mais grave do que se estivesse parado. Obtemos resultados semelhantes quando a fonte se movimenta aproximando-se ou afastando-se de um ouvinte estacionário. O timbre do apito de uma locomotiva é mais agudo quando ela está se aproximando do ouvinte e mais grave após a fonte ter passado e estar se afastando.

Um austríaco, Christian Johann Doppler (1803-1853), em um artigo datado de 1842, chamou a atenção para o fato de que a cor de um corpo luminoso, do mesmo modo que a altura do som de uma fonte sonora, deve mudar em virtude do movimento relativo do corpo e do observador. Este *efeito Doppler*, como é denominado, aplica-se às ondas em geral. O próprio Doppler menciona a aplicação de seu princípio a ondas sonoras. Um teste experimental foi feito na Holanda em 1845 por Buys Ballot, "... usando uma locomotiva puxando um carro aberto com vários trombeteiros."

Nós agora consideraremos a aplicação do efeito Doppler a ondas sonoras e consideraremos apenas o caso especial em que a fonte e o observador movem-se ao longo da reta que os liga. Consideremos um referencial em repouso no meio em que o som se

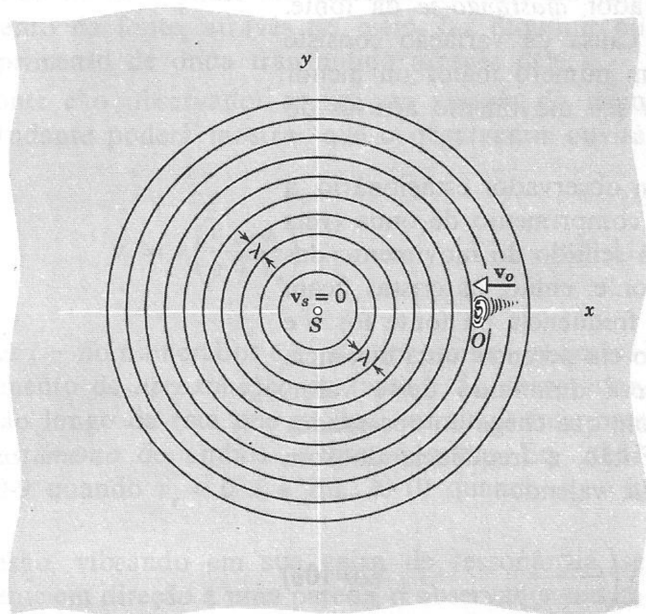


figura 20-10
Efeito Doppler devido ao movimento do observador (ouvido). A fonte encontra-se em repouso.

propaga. A Fig. 20-10 mostra uma fonte sonora, *S*, em repouso neste referencial e um observador *O* (note o ouvido) aproximando-se da fonte com velocidade v_o. As circunferências representam as frentes de onda, distanciadas de um comprimento de onda e propagando-se através do meio. Se o observador estivesse em repouso em relação ao meio, ele receberia vt/λ ondas durante o tempo t, sendo v a velocidade do som no meio e λ o seu comprimento de onda. Em virtude de seu movimento em direção à fonte, ele recebe $v_o t/\lambda$ ondas *adicionais* durante o mesmo tempo t. A freqüência, ν', que ele ouve é o número de ondas recebido por unidade de tempo, ou seja,

$$\nu' = \frac{vt/\lambda + v_o t/\lambda}{t} = \frac{v + v_o}{\lambda} = \frac{v + v_o}{v/\nu}.$$

Então

$$\nu' = \nu\,\frac{v + v_o}{v} = \nu\left(1 + \frac{v_o}{v}\right). \qquad (20\text{-}9a)$$

A freqüência, ν', ouvida pelo observador é igual à freqüência, ν, ouvida em repouso, mais o acréscimo $\nu(v_o/v)$ que se origina no movimento do observador. Quando o observador se afasta da fonte estacionária há uma *diminuição* $\nu(v_o/v)$ na freqüência, correspondendo às ondas que não chegam ao observador, por unidade de tempo, em virtude de seu movimento de afastamento. Então

$$\nu' = \nu\left(\frac{v - v_o}{v}\right) = \nu\left(1 - \frac{v_o}{v}\right). \qquad (20\text{-}9b)$$

Portanto, a relação geral, válida no caso de *a fonte estar em repouso* em relação ao meio e *o observador estar em movimento* através do meio, é

$$\nu' = \nu\left(\frac{v \pm v_o}{v}\right), \qquad (20\text{-}9)$$

O sinal *positivo* se refere ao observador aproximando-se da fonte e o sinal *negativo* refere-se ao observador *afastando-se* da fonte. Deve-se observar que, nestes casos, a causa da variação consiste no fato de o observador interceptar um número maior ou menor de ondas, em cada segundo, devido ao seu movimento através do meio.

Quando a *fonte* se *aproxima* de um observador estacionário, a conseqüência será uma diminuição do comprimento de onda (veja a Fig. 20-11), pois a fonte desloca-se no sentido do movimento das ondas que se aproximam do observador e, então, as cristas ficam mais próximas umas das outras. Se a freqüência da fonte for ν e sua velocidade v_s, durante cada vibração ela percorre uma distância v_s/ν e cada comprimento de onda será diminuído deste valor. Portanto, o comprimento de onda do som que chega ao observador não é $\lambda = v/\nu$ mas $\lambda' = v/\nu - v_s/\nu$. Então, a freqüência do som ouvido pelo observador será *aumentada*, valendo

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_s)/\nu} = \nu\left(\frac{v}{v - v_s}\right). \qquad (20\text{-}10a)$$

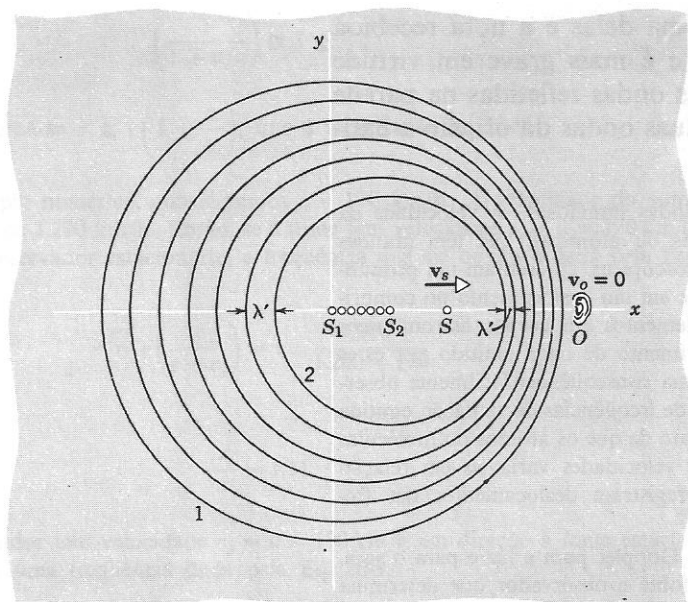


figura 20-11
Efeito Doppler devido ao movimento da fonte, estando o observador em repouso. A frente de onda 1 foi emitida pela fonte quando esta encontrava-se em S_1: a fonte 2 foi emitida quando a fonte estava em S_2 etc. No instante em que foi tomado o "instantâneo", a fonte encontrava-se em S.

Se a fonte *afastar-se* do observador, o comprimento de onda emitido será v_s/v maior do que λ, de modo que o observador ouvirá uma freqüência *menor*, dada por

$$\nu' = \frac{v}{(v + v_s)/\nu} = \nu\left(\frac{v}{v + v_s}\right) \qquad (20\text{-}10b)$$

Portanto, a relação geral, válida quando *o observador está em repouso* em relação ao meio mas *a fonte se move* através dele é

$$\nu' = \nu\left(\frac{v}{v \mp v_s}\right); \qquad (20\text{-}10)$$

o sinal *negativo* refere-se à fonte *aproximando-se* do observador e o sinal *positivo* refere-se à fonte *afastando-se* do observador. Deve-se observar que, nestes casos, a causa da variação consiste no fato de que o movimento da fonte, através do meio, faz diminuir ou aumentar o comprimento de onda transmitido através dele.

Quando a fonte e o observador se movem através do meio transmissor, o estudante poderá mostrar que o observador ouvirá uma freqüência

$$\nu' = \nu\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right) \qquad (20\text{-}11)$$

os sinais superiores (+ no numerador e — no denominador) correspondem ao movimento de *aproximação* da fonte e do observador, que se deslocam ao longo da reta que os liga; os sinais inferiores referem-se ao *afastamento* de ambos. Observe que a Eq. 20-11 reduz-se à Eq. 20-9 quando $v_s = 0$ e à Eq. 20-10 quando $v_o = 0$, como deve ser.

Se um diapasão, vibrando em sua caixa de ressonância, se deslocar rapidamente em direção a uma parede, o observador ouvirá

duas notas de freqüências diferentes. Uma delas é a nota recebida diretamente do diapasão que se afasta e é mais grave em virtude do movimento. A outra nota é devida às ondas refletidas na parede e é mais aguda. A superposição destas duas ondas dá origem a batimentos.

O efeito Doppler é importante no caso de ondas luminosas. A velocidade da luz é tão grande que apenas fontes astronômicas ou atômicas, que têm grandes velocidades comparadas com fontes terrestres macroscópicas, apresentam um pronunciado efeito Doppler. O efeito astronômico consiste em um deslocamento no comprimento de onda observado na luz emitida por elementos em corpos astronômicos em movimento, quando comparado com o comprimento de onda emitido por estes mesmos elementos na Terra. (Veja o Cap. 42.) Uma conseqüência facilmente observável do efeito Doppler é o alargamento na banda de freqüências de radiação emitida por gases aquecidos. Este alargamento resulta do fato de que os átomos ou moléculas emissores movem-se em todas as direções e com velocidades variáveis em relação aos aparelhos de observação, de modo que se registram deslocamentos nas freqüências.

Contudo, há diferenças nas fórmulas do efeito Doppler para a luz e para o som. No som, não é apenas o movimento relativo da fonte e observador que determina a variação na freqüência. De fato, conforme vimos, mesmo quando o movimento relativo é o mesmo (v_o, na Eq. 20-9*a*, é igual a v_s, na Eq. 20-10*a*), obtemos resultados quantitativamente diferentes, conforme seja a fonte ou o observador que está em movimento. Esta diferença existe porque v_o e v_s são medidas em relação ao meio no qual as ondas sonoras se propagam e porque este meio determina a velocidade da onda. A luz, entretanto, não necessita de um meio material para sua transmissão e sua velocidade, em relação à fonte ou ao observador, tem sempre o mesmo valor c, independentemente do movimento relativo destes corpos. Este é um postulado básico da teoria da relatividade restrita (veja o Tópico Suplementar V). Então, para a luz, apenas o movimento relativo da fonte e observador pode conduzir a mudanças físicas, não existindo um meio material que possa ser usado como referencial. Apesar de a fórmula do efeito Doppler para a luz (Cap. 42) ser diferente da fórmula para o som, os efeitos são qualitativamente os mesmos. Podemos aplicar a Eq. 20-10 para a luz, como boa aproximação, se v_s for considerada como a velocidade *relativa* da fonte e do observador e se v_s for muito pequena em comparação com a velocidade da luz.

EXEMPLO 3

Mostrar que as Eqs. 20-9 e 20-10 tornam-se praticamente idênticas quando a velocidade da fonte e do observador são pequenas em comparação com a velocidade do som no meio.

Seja $v_o = v_s = u$, isto é, representemos por u a velocidade do observador *ou* a da fonte. Portanto, a Eq. 20-9 se escreve

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{u}{v}\right).$$

Devemos, então, mostrar que a Eq. 20-10,

$$\nu' = \nu\left(\frac{v}{v \mp u}\right),$$

reduz-se à forma anterior quando $u/v << 1$.

Podemos reescrever a Eq. 20-10 da seguinte maneira

$$\nu' = \nu\left(\frac{1}{1 \mp u/v}\right).$$

De acordo com o desenvolvimento do binômio temos

$$\left(\frac{1}{1 \mp u/v}\right) = \left(1 \mp \frac{u}{v}\right)^{-1} = 1 \pm \frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \pm \ldots\ldots$$

Mas se u/v é suficientemente pequeno em comparação com a unidade, podemos desprezar $(u/v)^2$ e os termos de potências mais altas, obtendo

$$\left(\frac{1}{1 \mp u/v}\right) \cong 1 \pm \frac{u}{v},$$

e a Eq. 20-10 torna-se $\nu' \cong \nu\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$, que é idêntica à Eq. 20-9.

Como exemplo numérico, consideremos $u = 120$ km/h. A velocidade do som, no ar, vale cerca de 1.200 km/h. Então, se a fonte tem velocidade $v_s = u = 120$ km/h em direção ao observador estacionário, a freqüência que ele ouvirá é dada pela Eq. 20-10,

$$\nu' = \nu\left(\frac{v}{v - v_s}\right) = \nu \cdot \frac{1.200}{1.200 - 120}$$

ou

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1{,}11.$$

Se o observador tem velocidade $v_o = u = 120$ km/h em direção à fonte estacionária, ele ouvirá uma freqüência dada pela Eq. 20-9,

$$\nu' = \nu\left(\frac{v + v_o}{v}\right) = \nu \cdot \frac{1.200 + 120}{1.200}$$

ou

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1{,}10.$$

Portanto, quando $u/v = 120/1.200 = 1/10$, a diferença percentual entre a freqüência ouvida quando o observador se move e a freqüência ouvida quando a fonte se move é de apenas 1%, sendo o movimento relativo o mesmo em ambos os casos.

Quando os valores de v_o e v_s tornam-se comparáveis a v, as fórmulas apresentadas para o efeito Doppler devem ser modificadas. A modificação é necessária porque a relação linear entre a força restauradora e a deformação, admitida como válida até este ponto, não é mais verificada no meio. A velocidade de propagação de uma onda não é mais a velocidade de fase comum e a forma da onda varia com o tempo. As componentes do movimento perpendiculares à linha que une a fonte ao observador também contribuem para o efeito Doppler, no caso de altas velocidades. Quando v_o ou v_s tornam-se maiores do que v, a fórmula do efeito Doppler, evidentemente, deixa de ter significado.

Há muitos casos em que a fonte se move através do meio com uma velocidade maior do que a velocidade de fase da onda naquele meio. Em tais casos, a frente de onda adquire a forma de um cone, estando o corpo em movimento localizado no seu vértice. Exemplos deste caso são a onda formada pela proa de uma lancha na água e a "onda de choque" de um avião ou de um projétil que se movem no ar com uma velocidade maior do que a velocidade do som neste meio (velocidades supersônicas). A radiação de Cerenkov consiste de ondas luminosas emitidas por partículas carregadas, que se movem em um meio com uma velocidade maior do que a velocidade de fase da luz neste meio.[5]

Na Fig. 20-12 mostram-se as posições presentes das ondas esféricas que se originaram em várias posições da fonte durante o seu movimento. O raio de cada esfera, neste instante, é igual ao produto da velocidade de onda, v, pelo tempo, t, que decorreu desde o instante em que a fonte se encontrava em seu centro. A envoltória destas ondas é um cone, cuja superfície forma um ângulo θ com a direção do movimento da fonte. Observando a figura obtemos o resultado

$$\text{sen}\ \theta = \frac{v}{v_s}.$$

---

[5] Ver "Cerenkov Radiation: its Origin, Properties and Applications", por J. V. Jelley, em *Contemporary Physics*, outubro de 1961.

Para o caso de ondas na água, o cone reduz-se a um par de retas concorrentes. Em aerodinâmica o quociente v_s/v é denominado número de Mach.

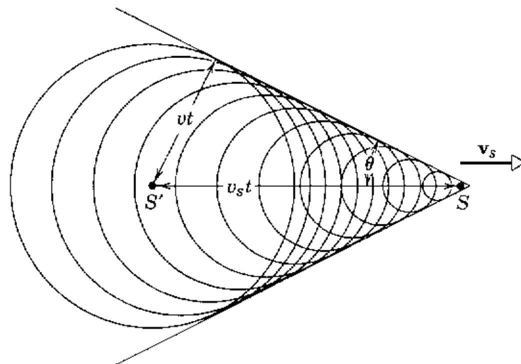
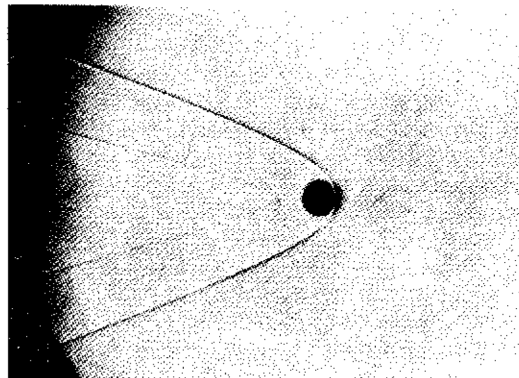


figura 20-12
Vemos ao lado um grupo de frentes de ondas associados com um projétil que se move com a velocidade supersônica. As frentes de ondas são esferas e sua envoltória é uma superfície cônica. O estudante deve procurar relacionar esta figura com a precedente. Abaixo e à esquerda, fotografia de um projétil que tem esse movimento. (Fotografia da Marinha dos EUA.)



questões

1. Relacione algumas fontes de infra-som e de ultra-som.
2. O ultra-som pode ser usado para revelar estruturas internas do corpo. Pode, por exemplo, distinguir, bem melhor do que os raios X, entre tecidos humanos líquidos ou macios. Discuta.
3. Que evidência experimental leva-nos em admitir que a velocidade do som deve ser a mesma para todos os comprimentos de onda?
4. Dê uma explicação qualitativa de por que a velocidade do som no chumbo é menor que no cobre.
5. No caso de ondas transversais em uma corda, qual a grandeza, se é que existe, correspondente à amplitude de pressão nas ondas longitudinais em um tubo?
6. Uma campainha toca em uma escola durante um pequeno intervalo de tempo. Um instante após, o som emitido não é mais audível. Descreva a propagação das ondas sonoras e da energia transferida por elas desde o instante da emissão até que não sejam mais audíveis.
7. Como podemos localizar, experimentalmente, as posições de nodos e antinodos de uma corda? De uma coluna de ar? De uma superfície vibrante?
8. Que propriedades físicas de uma onda sonora correspondem à sensação humana de afinação, de altura e de timbre?
9. Qual é a diferença que nos permite distinguir entre uma nota de violino e a mesma nota cantada por uma pessoa?
10. Habitualmente, o som dos sinos é muito menos agradável que o dos pianos e violinos. Por quê?
11. Sua voz soa realmente melhor no banheiro? Em caso afirmativo, existem explicações físicas para isto?
12. Discuta os fatores que determinam o intervalo de freqüências e o timbre de sua voz.
13. Explique a origem do som quando se assobia.

14. Qual é a finalidade das válvulas da corneta e da parte móvel do trombone?[6]
15. O clarim não tem válvulas. Como, então, podemos fazer soar notas diferentes com ele? A que notas ele se limita? Por que?[6]
16. A altura do som nos instrumentos de sopro cresce e nos de corda diminui, quando uma orquestra está "afinando". Explique.[6]
17. Uma corda de violino percutida oscilaria por um tempo maior ou menor se o violino não tivesse uma caixa de ressonância? Explique.[6]
18. Explique como o arco do violino faz a corda vibrar.[6]
19. Explique por que o som é produzido ao se roçar um dedo molhado à borda de um copo de vinho.
20. Explique como se "afina" um instrumento de corda.[6]
21. Um tubo pode funcionar como filtro acústico, descriminando freqüências que não coincidem com suas freqüências naturais. O silencioso de um automóvel é um exemplo. (*a*) Explique como este filtro funciona. (*b*) Como podemos determinar a freqüência de corte abaixo da qual som não é transmitido?
22. Dois navios, com apitos a vapor de mesma freqüência, apitam no porto. Você esperaria que isto originasse uma configuração de interferência, com regiões de grande e pequena intensidade?
23. As ondas sonoras emitidas por um *único* diapasão pode interferir? Como você explica o fato de o diapasão ser muito menos audível em certas direções que em outras?
24. Dois diapasões idênticos emitem notas da mesma freqüência. Explique como você poderia ouvir batimentos entre eles.
25. Suponha que, no efeito Doppler para o som, a fonte e o receptor estejam em repouso em um certo referencial mas que o meio transmissor se mova em relação a este referencial. Haverá alguma variação no comprimento de onda ou na freqüência recebidos?
26. Haverá efeito Doppler para o som quando o observador ou a fonte se movem perpendicularmente à linha que os liga? Como, então, podemos determinar o efeito Doppler quando o movimento tiver uma componente perpendicular a esta linha?
27. Um satélite emite ondas de rádio de freqüência constante. Estas ondas são captadas em terra e produzem batimentos com uma certa freqüência padrão. A freqüência dos batimentos é então enviada a um alto-falante e podem "ouvir-se" os sinais do satélite. Descreva como varia o som enquanto o satélite se aproxima do detector em terra, passa sobre ele e afasta-se em seguida.
28. Discutir os fatores que melhoram a acústica em salões para concertos.[7]
29. Um relâmpago dissipa uma quantidade enorme de energia e é essencialmente instantâneo. Como esta energia é transformada nas ondas sonoras do trovão e por que este é, em geral, uma seqüência de ruídos separados?[8]
30. Ondas transversais em uma corda podem ser polarizadas (veja, por exemplo, a Questão 18 do Capítulo 19). Ondas sonoras podem ser polarizadas?
31. Morcegos podem examinar características de um objeto, tais como seu tamanho, forma, distância, direção, movimento, sentindo a maneira pela qual sons de alta freqüência por eles emitidos são refletidos pelos objetos. Discuta cada um destes aspectos. (Veja "Information Content of Bat Sonar Echoes", por J. A. Simmons, D. J. Howell e N. Suga em *American Scientist*, março-abril, 1975.)

problemas

SEÇÃO 20-1

1. Uma onda ultra-sônica possui freqüência de 30 kHz. Esta onda quando se propaga num determinado meio, possui comprimento de onda igual a 2 dm; ao passar para outro meio, o comprimento de onda torna-se igual a 3dm. Calcule a velocidade de propagação desta onda ultra-sônica: (*a*) no meio onde $\lambda = 2$ dm, (*b*) no meio onde $\lambda = 3$ dm.

---

[6] Veja os seguintes artigos para discussões da física de instrumentos musicais: "Acoustics of the Flute", de John W. Coltman, em *Physics Today*, novembro, 1968. "The Physics of Wood Winds", de Arthur H. Benade, em *Scientific American*, outubro, 1960. "The Physics of Brasses", de Arthur H. Benade, em *Scientific American*, julho, 1973. "The Physics of the Piano", de E. Dornell Blackham, em *Scientific American*, dezembro, 1965. "The Physics of Violins", de Carleen M. Hutchins, em *Scientific American*, novembro, 1962. "The Electronic Music Synthesizer and the Physics of Music", de W. M. Hartman, em *American Journal of Physics*, setembro, 1975.

[7] Veja "The Development of Architectural Acoustics", de Robert S. Shankland em *American Journal of Physics*, setembro, 1975.

[8] Veja "Thunder", de Arthur A. Few, em *Scientific American*, julho, 1975.

2. O som mais grave perceptível pelo ouvido humano possui freqüência aproximadamente igual a 20 Hz, ao passo que o som mais agudo que o ouvido humano pode detetar vale 20 kHz. Determine os limites de comprimento de onda, no ar, para o intervalo de sensibilidade do ouvido humano. *Resposta:* 17 m; 1,7 cm.

3. Os morcegos emitem ondas ultra-sônicas. O comprimento de onda mínimo, no ar, da onda emitida por um morcego é aproximadamente igual a 0,33 m. Calcule a freqüência máxima que pode ser emitida por um morcego.

SEÇÃO 20-2

4. (*a*) Obtenha uma expressão para relacionar o *módulo de elasticidade* ou *módulo volumétrico B* com a variação de pressão Δp e com a variação de volume ΔV. (*b*) Usando a resposta do item anterior, obtenha uma relação geral para B, fazendo a passagem ao limite quando ΔV tende a zero.
Resposta: (*a*) $B = -V(\Delta p/\Delta V)$. (*b*) $B = -V(\partial p/\partial V)$.

5. (*a*) Ache a dimensão do módulo volumétrico B. (*b*) Verifique a consistência dimensional da relação (20-1).

6. Calcule o módulo de elasticidade B de um gás, sabendo que a velocidade de propagação do som neste gás vale 300 m/s e que a massa específica do gás vale 2,4 mg/cm^3.
Resposta: $B = 2{,}16 \times 10^5$ N/m^2.

7. Ondas de ultra-som de alta intensidade e de freqüência 10 MHz são usadas para modificar ou destruir tumores em tecidos delicados. (*a*) Qual é o comprimento destas ondas no ar? (*b*) Se a velocidade do som no tecido é de 1.500 m/s, qual é o comprimento de onda no tecido?

8. Uma onda sonora tem uma freqüência de 440 Hz. Qual é o comprimento de onda desta onda sonora (*a*) no ar? (*b*) na água? *Resposta:* (*a*) 75 cm; (*b*) 3,3 m.

9. Use os dados da Tab. 20-1 e calcule: (*a*) o comprimento de onda de uma onda sonora de 1 kHz se propagando no alumínio a 20°C, (*b*) a freqüência de uma onda sonora que se propaga no chumbo (a 20°C) e que possui um comprimento de onda igual a 3 m.

10. Calcule o valor do módulo volumétrico da água a 15°C.
Resposta: $B = 2{,}1 \times 10^9$ N/m^2.

11. O módulo de elasticidade de um tipo de aço vale $2{,}4 \times 10^{11}$ N/m^2. A massa específica deste aço vale 7,8 g/cm^3. Calcule a velocidade de propagação do som neste material.

12. A velocidade do som em um determinado metal é V. Uma das extremidades de um tubo longo desse metal, de comprimento l, recebe um golpe forte. Uma pessoa, na outra extremidade, ouve dois sons, um oriundo da onda que se propagou através do tubo e o outro, da onda que se propagou no ar. (*a*) Se v é a velocidade do som no ar, qual o intervalo do tempo t que decorre entre os dois sons? (*b*) Suponha $t = 1{,}0$s e que o metal seja ferro. Determine o comprimento l. *Resposta:* (*a*) $l(V - v)/Vv$; (*b*) 350 m.

13. Um método de determinar a distância entre um observador e um relâmpago consiste em contar os segundos que decorrem desde o instante em que ele vê o relâmpago até o instante em que ouve o trovão e, em seguida, dividir esta contagem por 3. O resultado deve fornecer a distância em quilômetros. Justifique o uso desta regra e determine o seu erro percentual em condições normais.

14. Um sonar colocado na parte externa de um submarino recebe as ondas sonoras refletidas pelo casco de um navio 4 s após a emissão das ondas. Ache a distância aproximada entre o navio e o submarino, desprezando a velocidade relativa entre o submarino e o navio. A velocidade de propagação do som na água do mar é aproximadamente igual a 1.450 m/s. *Resposta:* 2.900 m.

15. Um som é emitido no ar com uma freqüência de 500 Hz. Para um observador que se encontra no fundo do mar, calcule: (*a*) a freqüência, (*b*) o comprimento de onda.

16. Uma pedra é largada, sem velocidade inicial, do alto de um edifício. O observador que largou a pedra ouve o barulho do impacto da pedra com o solo 2,5 s após o instante em que a pedra foi largada. Calcule a altura do edifício.
Resposta: 28,5 m.

17. No caso particular de um sólido homogêneo, o módulo de elasticidade B é numericamente igual ao *módulo de Young Y*. (*a*) Escreva a expressão da velocidade de propagação do som numa barra sólida em função do *módulo de Young* do material. (*b*) O módulo de Young do alumínio é dado aproximadamente por: $Y = 6{,}9 \times 10^{10}$ N/m^2; calcule a velocidade de propagação do som numa barra de alumínio. Supor $\rho = 2{,}6$ g/cm^3.

SEÇÃO 20-3

18. O *número de onda k* para a propagação de uma onda sonora na água vale 2 m^{-1}. Seja y_m a amplitude da onda de uma partícula no interior da água. Escreva a expressão do deslocamento y para esta onda.
Resposta: $y = y_m \cos(2x - \omega t)$, onde $\omega = 2.900$ rad/s, x é dado em m e t é dado em segundos.

19. Verifique a homogeneidade dimensional das relações (20-3) e (20-6).

20. A amplitude do deslocamento de uma onda sonora que se propaga na água vale 10^{-9} m. Considere uma freqüência de 1 kHz. Calcule o valor da *amplitude de pressão* desta onda. *Resposta:* $P = 9{,}1$ N/m^2.

21. A pressão de uma onda sonora que se propaga no ar é dada pela equação

$$p = 1{,}5 \text{ sen } \pi(x - 330\ t)$$

onde x está expresso em metros, t em segundos e p em pascals. Determine (*a*) a amplitude da pressão, (*b*) a freqüência, (*c*) o comprimento de onda e (*d*) a velocidade da onda.

22. Duas ondas produzem variações na pressão, em um certo ponto do espaço, dadas por

$$p_1 = P \text{ sen } 2\pi\nu t,$$

$$p_2 = P \text{ sen } 2\pi(\nu t - \phi).$$

Qual a amplitude da onda resultante neste ponto, para os casos $\phi = 0$, $\Phi = \frac{1}{6}$ e $\phi = \frac{1}{8}$? Os valores de ϕ são dados em radianos. *Resposta:* 2,00 P. 1,73 P; 1,85 P.

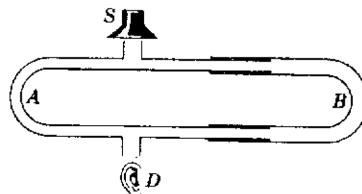


figura 20-13

23. Na Fig. 20-13 mostramos um interferômetro acústico, usado para demonstrar a interferência de ondas sonoras. S é um diafragma que vibra sob a influência de um eletroímã. D é um detector de som como, por exemplo, um ouvido ou um microfone. O comprimento do caminho SBD pode ser variado, mas a trajetória SAD é fixa.

O interferômetro contém ar e verifica-se que a intensidade do som apresenta um valor mínimo de 100 unidades para certa posição de B e cresce continuamente até o valor máximo de 900 unidades para uma segunda posição, a 1,65 cm da primeira. Calcule (*a*) a freqüência do som emitido pela fonte e (*b*) a relação entre as amplitudes das ondas que chegam ao detector, para cada posição de B. (*c*) Como é possível que estas ondas tenham amplitudes diferentes, se foram produzidas pela mesma fonte?

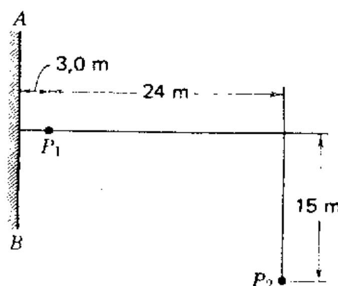


figura 20-14

24. Uma fonte sonora esférica é colocada em P_1, próxima a uma parede refletora AB, e um microfone é colocado no ponto P_2, como mostra a Fig. 20-14. A freqüência da fonte P_1 é variável. Encontre duas freqüências diferentes para as quais a intensidade sonora em P_2 será máxima. A velocidade do som no ar é 330 m/s. Considere as direções, das ondas que interferem, como paralelas. *Resposta:* 32 Hz e 95 Hz.

25. Mostre que a intensidade de uma onda sonora (*a*) quando expressa em função da amplitude de pressão, P, é dada por

$$I = \frac{P^2}{2\rho_0 v},$$

onde v é a velocidade da onda e ρ_0 é a densidade do ar em condições normais e (*b*) quando expressa em função da amplitude de deslocamento, y_m, é dada por

$$I = 2\pi^2\ \rho_0 v y_m{}^2 \nu^2,$$

(*c*) Admitindo agora que duas ondas sonoras, uma no ar e a outra na água, têm a mesma intensidade, qual é a razão entre as amplitudes de pressão da onda na água e da onda no ar? (*d*) Se, em vez disso, fossem iguais as amplitudes de pressão, qual seria a razão entre as intensidades das duas ondas?

26. Uma onda sonora de 1,5 kHz possui uma amplitude de pressão igual a 20 N/m^2, quando ela se propaga no ar. Suponha que a velocidade de propagação seja igual a 340 m/s. Encontre: (*a*) o comprimento de onda, (*b*) a amplitude do deslocamento de uma partícula, (*c*) a velocidade máxima da partícula.
Resposta: (*a*) 22,7 cm. (*b*) 5 μm. (*c*) 4,7 cm/s.

27. Uma nota cuja freqüência é de 400 Hz possui uma intensidade igual a 1,5 μW/m^2. Estime a amplitude das vibrações do ar, causadas por este som.

28. A *intensidade* de uma onda sonora normalmente é representada através de uma *razão* entre a *intensidade medida I* e a *intensidade mínima* I_0 perceptível pelo ouvido humano. Toma-se o logaritmo na base 10 desta razão e multiplica-se o resultado por 10. A unidade de intensidade definida deste modo denomina-se *decibel* (símbolo: db). (*a*) Escreva a expressão da intensidade relativa I_r de uma onda sonora de intensidade I, em decibéis. (*b*) A menor intensidade sonora audível é dada aproximadamente por: $I_0 = 10^{-16}$ W/cm^2. A intensidade máxima do som que o ouvido humano pode suportar (sem que ocorra sensação dolorosa no ouvido) é da ordem de 10^{-4} W/cm^2. Obtenha o valor desta intensidade máxima em decibéis. *Resposta:* (*a*) $I_r = 10 \log_{10} (I/I_0)$. (*b*) 120 db.

29. Duas fontes de som estão separadas por uma distância $d = 8$ m. Ambas emitem sons com a mesma amplitude e com a mesma freqüência (de 400 Hz) mas estas ondas possuem uma diferença de fase de 180°. Considere a reta mediatriz perpendicular ao segmento que une as duas fontes. Determine os pontos ao longo desta reta para os quais a intensidade do som terá valores mínimos por causa da interferência destrutiva.

30. Um certo alto-falante produz um som com uma freqüência de 2.000 Hz e uma intensidade de $9{,}6 \times 10^{-4}$ W/m^2 a uma distância de 6,1 m. Admita que não haja reflexões e que

o alto-falante emite igualmente em todas as direções. (*a*) Qual seria a intensidade a 30 m? (*b*) Qual é a amplitude de deslocamento a 6,1 m? (*c*) Qual é a amplitude de pressão a 6,1 m? *Resposta:* (*a*) 4,0 × 10^{-5} W/m². (*b*) 1,7 × 10^{-7} m. (*c*) 0,88 Pa.

31. Dois alto-falantes, S_1 e S_2, emitem som de freqüência 200 Hz uniformemente em todas as direções (ondas tridimensionais). S_1 tem uma potência emissora de 1,2 × 10^{-3} W e S_2, de 1,8 × 10^{-3} W. Os alto-falantes estão distanciados 7,0 m. Considere um ponto *P* que está a 4,0 m de S_1 e 3,0 m de S_2. (*a*) Qual é a diferença de fase entre as duas ondas que chegam a *P*? Qual é a intensidade de som em *P* (*b*) se S_2 for desligado (S_1 ligado), (*c*) se S_1 for desligado (S_2 ligado) e (*d*) com S_1 e S_2 ligados?

32. A seção de violinos, em algumas orquestras sinfônicas, está dividida em duas partes, colocadas de cada lado do regente. Considere dois violinistas separados por 8,0 m, simetricamente colocados em relação ao regente e distando dele 5,0 m. Se a potência de saída de cada violino é de 1,0 × 10^{-4} W, quais são (*a*) a intensidade ouvida pelo regente e produzida por cada um, tocando sozinho e (*b*) a intensidade ouvida pelo regente e produzida por ambos tocando juntos (a mesma nota)?
Resposta: (*a*) 3,2 × 10^{-7} W/m². (*b*) 4,6 × 10^{-7} W/m².

SEÇÃO 20-5

33. Na Fig. 20-15, uma haste *R* está fixada pelo centro; um disco *D* preso à extremidade da haste penetra em um tubo de vidro, onde foi espalhado pó de cortiça. Na outra extremidade do tubo existe um pistão móvel. Provocam-se vibrações longitudinais na haste e o pistão é deslocado até que o pó de cortiça forme um conjunto de nodos e antinodos (o pó forma montículos bem definidos nas posições dos antinodos). Conhecida a freqüência ν das vibrações longitudinais da haste, a medida da distância média *d* entre antinodos sucessivos, determina a velocidade do som do gás contido no tubo. Mostrar que

$$v = 2\nu d.$$

Este procedimento constitui o método de Kundt para determinar a velocidade do som em gases.

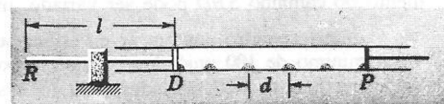


figura 20-15

34. Um tubo de órgão aberto tem freqüência fundamental de 300 Hz. O primeiro sobretom de um tubo fechado tem a mesma freqüência que o primeiro sobretom de um tubo aberto. Determinar o comprimento de cada tubo. *Resposta:* 55 cm e 41 cm.

35. Uma corda de 2,5 m vibra em seu modo fundamental enquanto está sujeita a forças de 8 N em cada uma das suas extremidades. A massa da corda vale 700 g; encontre o período da oscilação.

36. O comprimento de uma certa corda de violino é de 50 cm; ela está fixada pelos extremos e sua massa é de 2,0 g. A corda emite a nota lá (440 Hz) quando não se exerce pressão dos dedos sobre ela. Onde deve ser colocado o dedo, para que a nota emitida seja o dó (528 Hz)? *Resposta:* 8,3 cm da extremidade.

37. As cordas de um violoncelo têm comprimento *L*. (*a*) De que comprimento *l* elas devem ser encurtadas pelos dedos a fim de modificar a altura do som por uma razão de freqüência *r*? (*b*) Determinar *l* se *L* = 0,80 m e *r* = 6/5, 5/4, 4/3 e 3/2.

38. O nível de água, em um tubo vertical de vidro de 1,0 m de comprimento, pode ser ajustado em qualquer posição. Um diapasão cuja freqüência é de 660 Hz é mantido pouco acima da extremidade aberta do tubo. Para que posições do nível de água haverá ressonância? *Resposta:* Nível da água na altura de 7/8, 5/8, 3/8 ou 1/8 m.

39. Na Fig. 20-16, *S* é um pequeno alto-falante, excitado por um oscilador de áudio-freqüência e um amplificador, de freqüência ajustável entre 1.000 e 2.000 Hz apenas. *D* é um tubo metálico cilíndrico de 45 cm de comprimento. (*a*) A velocidade do som no ar é de 333 m/s à temperatura do ambiente. Para que freqüência haverá ressonância quando a freqüência emitida pelo alto-falante varia naquele intervalo? (*b*) Esquematizar os nodos de deslocamento para cada uma. Despreze os efeitos das extremidades.

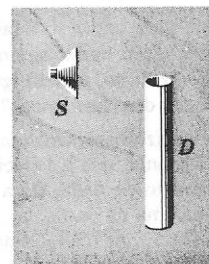


figura 20-16

40. Um poço com paredes verticais e água no fundo ressoa para uma freqüência de 8,0 Hz e em nenhuma outra freqüência menor do que esta. O ar no poço possui as seguintes características: massa específica igual a 1,2 kg/m³, pressão igual a 9,9 × 10^4 Pa e a razão entre os calores específicos igual a 1,4. Calcule a profundidade da superfície livre da água. *Resposta:* 10,6 m.

41. Uma corda de violino de 31,6 cm, cuja densidade linear é de 0,65 g/m está colocada junto a um alto-falante que é alimentado por um oscilador de áudio de freqüência variável. Verifica-se que quando a freqüência do oscilador varia continuamente na faixa de 500 a 1.500 Hz, a corda oscila apenas nas freqüências de 880 e 1.320 Hz. Qual é a tensão na corda?

42. Um tubo de 1,0 m de comprimento é fechado em um dos extremos. Um arame esticado é colocado junto à extremidade aberta. O comprimento do arame é de 0,30 m e sua massa é de 0,010 kg. Está fixado por ambas as pontas e vibra em seu modo fundamental. Ele faz com que a coluna de ar no tubo vibre na sua freqüência fundamental, por ressonância. Ache (*a*) a freqüência de oscilação da coluna de ar e (*b*) a tração no arame.
Resposta: (*a*) 83 Hz. (*b*) 82 N.

SEÇÃO 20-6

43. Um diapasão de freqüência desconhecida produz três batimentos por segundo com outro diapasão cuja freqüência é de 384 Hz. A freqüência dos batimentos decresce quando um pequeno pedaço de cera é colocado na ponta de uma das hastes do primeiro diapasão. Qual a freqüência deste?

44. Duas cordas de piano idênticas têm freqüência fundamental de 600 Hz quando mantidas à mesma tensão. Que aumento relativo de tensão de uma das cordas provocará a ocorrência de seis batimentos por segundo quando as cordas vibrarem simultaneamente? *Resposta:* 2%.

SEÇÃO 20-7

45. Calcular a velocidade do projétil ilustrado na Fig. 20-12. Suponha que a velocidade do som no meio em que se move o projétil seja de 380 m/s.

46. Uma bala é atirada à velocidade de 660 m/s. Determinar o ângulo formado pela onda de choque com a linha de movimento do projétil. *Resposta:* 30°.

47. Um avião a jato passa à altura de 5.000 metros, à velocidade Mach 1,5 (ou 1,5 vezes a velocidade do som no ar). (*a*) Determinar o ângulo formado pela onda de choque com a linha de movimento do avião. (*b*) Quanto tempo após a passagem do avião diretamente acima da cabeça a onda de choque alcançará o solo?

48. De acordo com a definição de índice de refração n, sabemos que: $n = c/v$, onde v é a velocidade da luz no meio de índice de refração n e c é a velocidade da luz no vácuo. Quando um elétron se move num meio com uma velocidade u maior do que a velocidade v da luz no meio considerado, ocorre uma emissão de luz (*radiação Cerenkov*). Quando um feixe de elétrons emite este tipo de radiação na água, a frente de onda forma um cone cujo ângulo é igual a 60°. O índice de refração da água é dado por: $n = 4/3$. Determine a velocidade dos elétrons na água. *Resposta:* $2,6 \times 10^8$ m/s.

49. Um observador se encontra em repouso. Uma fonte emite ondas sonoras com freqüência f_0 e se *aproxima* do observador. (*a*) Determine a freqüência medida pelo observador, supondo que a velocidade de aproximação u seja paralela à reta que une o observador com a fonte. (*b*) Calcule a freqüência medida pelo observador, supondo que a velocidade faça um ângulo θ com a reta que une o observador com a fonte.

50. Um morcego voa dentro de uma caverna, orientando-se mediante a utilização de "bips" ultra-sônicos (emissões curtas com duração de um milissegundo ou menos e repetidas várias vezes por segundo). Suponha que a freqüência da emissão do som do morcego seja de 39.000 Hz. Durante uma arremetida veloz diretamente contra a superfície plana de uma parede, o morcego desloca-se a 1/40 da velocidade do som no ar. Qual a freqüência da onda, refletida na parede, que ele ouve? *Resposta:* 41.000 Hz.

51. A freqüência do som emitido por uma fonte sonora é de 1.080 Hz; a fonte se move para a direita com velocidade de 33 m/s em relação ao solo. À sua direita está uma superfície refletora que se move para a esquerda com velocidade de 66 m/s, também em relação ao solo. Considere a velocidade do som no ar como 330 m/s e determine: (*a*) o comprimento de onda do som emitido no ar pela fonte, (*b*) o número de ondas que chegam por segundo à superfície refletora, (*c*) a velocidade e (*d*) o comprimento de onda das ondas refletidas.

52. Uma sirena emite som de 1.000 Hz e move-se de você para um rochedo, à velocidade de 10 m/s. (*a*) Qual a freqüência do som que você ouve, proveniente diretamente da sirena? (*b*) Qual a freqüência do som que você ouve, proveniente diretamente do rochedo? (*c*) Você pode ouvir a freqüência dos batimentos? Considere a velocidade do som no ar como 330 m/s. *Resposta:* (*a*) 970 Hz; (*b*) 1.030 Hz; (*c*) Não. É muito alta.

53. Um avião reflete as microondas emitidas por uma fonte distante, da qual ele se aproxima; a velocidade de propagação das microondas é a mesma da luz. Quando as ondas refletidas se superpõem às ondas emitidas pela fonte, produzem-se batimentos cuja freqüência é de 990 Hz. Determinar a velocidade com a qual o avião se aproxima da fonte, sabendo que o comprimento das microondas é de 0,10 m.

54. Uma fonte em repouso emite som com uma freqüência ν_0. Um observador se move com velocidade u na direção da reta que une a fonte ao observador. Calcule a variação percentual da freqüência medida pelo observador em relação à freqüência ν_0. Suponha que: (*a*) o observador se *aproxime* da fonte, (*b*) o observador se *afaste* da fonte. *Resposta:* (*a*) $\Delta\nu/\nu_0 = u/v$; $\Delta\nu/\nu_0 = -u/v$; onde v é a velocidade do som no meio.

55. As medições de um radar em situações de perseguição são relativamente imprecisas comparadas àquelas em repouso. (*a*) Considere uma unidade de radar em repouso e mostre que a diferença $d\nu$ entre a freqüência refletida por um carro que se move com velocidade V e a freqüência ν transmitida, é dada, aproximadamente, por $d\nu/\nu = 2\ V/c$. (*b*) Considere, em seguida, que a unidade de radar esteja em um veículo em perseguição, movendo-se à velocidade v e mostre que $d\,\nu/\nu = 2\,(v - V)/c$. Discuta vários casos e justifique a primeira frase do problema: em particular, considere (*c*) o caso em que o perseguidor (polícia) desloca-se à mesma velocidade que o infrator. Qual é o deslocamento Doppler observado neste caso?

56. Uma fonte sonora se desloca com velocidade u da direita para a esquerda. Um observador, que se move com velocidade u' da esquerda para a direita, deteta uma freqüência ν (em vez da freqüência ν_0 da fonte). O meio se desloca da esquerda para a direita com velocidade v_m. Ache a razão ν/ν_0.

Resposta: $$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{v + v_m - u'}{v + v_m + u}$$

57. Uma mulher parada, no solo, ao lado de uma rodovia assopra um apito (altura do som 800 Hz) para alertar três colegas que se encontram a 200 m de distância, uma ao norte, outra ao leste e a outra, ao sul. Uma quarta mulher dirige-se para o oeste a 40 m/s. Um vento constante, a 4,0 m/s, sopra do sul para o norte. Qual a freqüência do som do apito ouvido por cada uma das quatro mulheres?

21
temperatura

21-1 *DESCRIÇÕES MACROSCÓPICA E MICROSCÓPICA*

Ao analisarmos uma situação física, usualmente focalizamos nossa atenção em uma porção de matéria que separamos, mentalmente, do meio externo a ela. Uma tal porção se denomina *sistema*. Tudo aquilo que não pertence ao sistema e que exerce influência direta em seu comportamento denomina-se a *vizinhança*. Procuramos, então, determinar o comportamento do sistema, determinando de que maneira ele interage com a vizinhança. Uma bola, por exemplo, poderá ser o sistema e a vizinhança poderá ser o ar e a Terra. Na queda livre, procuramos descobrir como o ar e a Terra afetam o movimento da bola. Também o gás em um recipiente poderá ser o sistema e um pistão móvel e um bico de Bunsen poderão constituir a vizinhança; procuramos descobrir como o comportamento do gás é afetado pela ação do pistão e do bico de Bunsen. Em todos estes casos, devemos escolher, adequadamente, grandezas observáveis para descrever o comportamento do sistema. Estas grandezas, que são propriedades do sistema como um todo, medidas em operações de laboratório, denominam-se *grandezas macroscópicas*. Nos processos em que há troca de calor, as leis que relacionam as grandezas macroscópicas apropriadas (que incluem, entre outras, a pressão, o volume, a temperatura, a energia interna e a entropia) constituem a base da ciência da *Termodinâmica*. Muitas das grandezas macroscópicas (pressão, volume e temperatura, por exemplo), são diretamente associadas com nossas percepções sensoriais. Podemos também adotar um ponto de vista *microscópico*. Neste caso, consideramos grandezas que descrevem os átomos e moléculas que constituem o sistema, suas velocidades, energias, massas, momentos

angulares, comportamento durante colisões etc. Estas grandezas, ou formulações matemáticas nelas baseadas, constituem a base da ciência da *Mecânica Estatística*. As propriedades microscópicas não estão associadas diretamente com nossas percepções sensoriais.

Em qualquer sistema, as grandezas macroscópicas e microscópicas devem estar relacionadas, porque elas são, simplesmente, maneiras diferentes de descrever a mesma situação. Em particular, deve ser possível expressar as primeiras em termos das segundas. A pressão de um gás, sob o ponto de vista macroscópico, é medida, operacionalmente, com um manômetro (Fig. 17-10). Sob o ponto de vista microscópico, ela se relaciona com a taxa média, por unidade de área, com a qual as moléculas do gás transferem quantidade de movimento ao fluido do manômetro, enquanto colidem contra sua superfície. Na Seç. 23-4, tornaremos quantitativa esta definição microscópica da pressão. De modo análogo (Seç. 23-5), a temperatura de um gás pode ser relacionada com a energia cinética média de translação das moléculas.

Se as grandezas macroscópicas podem ser expressas em função das grandezas microscópicas, deveria ser possível expressar as leis da Termodinâmica, quantitativamente, na linguagem da Mecânica Estatística. De fato, isto pode ser feito. Nas palavras de R. C. Tolman:

> A explicação de toda a ciência da Termodinâmica, em termos da ciência mais abstrata da Mecânica Estatística, é uma das maiores conquistas dos físicos. Além disso, o caráter mais fundamental das considerações da Mecânica Estatística torna possível suplementar grandemente os princípios comuns da Termodinâmica.

Iniciaremos o nosso estudo dos fenômenos térmicos, neste capítulo, com o estudo de temperatura. À medida que progredirmos, tentaremos adquirir um entendimento mais profundo destes fenômenos, entrelaçando as descrições microscópica e macroscópica — Mecânica Estatística e Termodinâmica. O entrelaçamento dos pontos de vista microscópico e macroscópico é uma característica da Física Moderna.

21-2 *EQUILÍBRIO TÉRMICO — A LEI ZERO DA TERMODINÂMICA*

O sentido do tato constitui a maneira mais simples de distinguir entre corpos quentes e frios. Por meio do tato, podemos dispor os corpos em ordem de aquecimento, decidindo se A está mais quente do que B, se B está mais quente do que C etc. Nós nos referimos a isto como sendo o nosso sentido de *temperatura*. Este é um procedimento bastante subjetivo para determinar a temperatura de um corpo e, certamente, não é muito útil para propósitos científicos. Uma experiência simples, sugerida em 1690 por John Locke, demonstra a irrealidade deste método. Suponha que uma pessoa mergulha uma de suas mãos em água quente e a outra em água fria. Em seguida, suponha que ele coloque ambas as mãos em um recipiente com água a uma temperatura intermediária. Esta água lhe parecerá mais fria na primeira mão e mais quente na segunda. Nossa avaliação de temperatura pode ser bastante enganosa. Além disso, o intervalo de nosso sentido de temperatura é limitado. O que necessitamos é uma medida objetiva e numérica de temperatura.

Para começar, devemos tentar entender o significado da temperatura. Suponha que um objeto A, que parece frio em contato com nossa mão, e um objeto idêntico, B, que parece quente, sejam colocados em contato um com o outro. Após um intervalo de tempo suficiente, A e B darão origem à mesma sensação de temperatura.

Dizemos, então, que A e B estão em *equilíbrio térmico* um com o outro. Podemos generalizar esta expressão "dois corpos estão em equilíbrio térmico" para significar que os dois corpos estão em estados tais que, se os dois *fossem* colocados em contato, os sistemas combinados estariam em equilíbrio térmico. A comprovação lógica e operacional do equilíbrio térmico consiste em usar um terceiro corpo, ou corpo de prova, tal como um termômetro. Isto é resumido em um postulado, freqüentemente denominado *lei zero da Termodinâmica*: *Se A e B estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo C (o "termômetro"), então A e B estão em equilíbrio térmico entre si.*

Esta discussão exprime a idéia de que a temperatura de um sistema é uma propriedade que, eventualmente, atinge o mesmo valor que o de outros sistemas, quando todos eles são colocados em contato. Este conceito concorda com nossa idéia diária de temperatura como sendo uma medida do estado de aquecimento ou de frieza de um sistema porque, tanto quanto podemos confiar em nosso sentido de temperatura, o estado de aquecimento de todos os objetos torna-se o mesmo após se manterem em contato por um tempo suficiente. A idéia contida na lei zero, ainda que simples, não é óbvia. Por exemplo, João e José conhecem Mário, mas eles poderão ou não conhecer um ao outro. Dois pedaços de ferro atraem um ímã, mas poderão ou não atrair-se mutuamente.

Uma maneira mais formal, mas talvez mais fundamental, de expressar a lei zero é a seguinte: *Existe uma grandeza escalar, denominada* temperatura, *que é uma propriedade de todos os sistemas termodinâmicos (em estado de equilíbrio), tal que a igualdade de temperatura é uma condição necessária e suficiente para o equilíbrio térmico.* Esta afirmação[1] justifica o uso da temperatura como variável termodinâmica; a formulação apresentada acima é um corolário desta nova afirmativa. Falando sem restrições, a essência da lei zero é: *existe uma grandeza muito útil denominada "temperatura"*.

21-3 *MEDIDA DA TEMPERATURA*

Existem diversas grandezas físicas mensuráveis que variam quando varia a nossa percepção fisiológica de temperatura. Entre estas estão o volume de um líquido, o comprimento de uma barra, a resistência elétrica de um fio, a pressão de um gás mantido a volume constante, o volume de um gás mantido a pressão constante e a cor do filamento de uma lâmpada. Qualquer destas grandezas pode ser usada para construir um termômetro — isto é, para estabelecer uma determinada escala termométrica. Uma tal escala termométrica é estabelecida pela escolha de uma determinada substância termométrica e de uma determinada propriedade termométrica desta substância. Em seguida, definimos a escala termométrica, *admitindo* uma relação monotônica contínua entre a propriedade termométrica escolhida da nossa substância e a temperatura medida em nossa escala. Por exemplo, a substância termométrica poderá ser um líquido em um tubo de vidro capilar e a propriedade termométrica poderá ser o comprimento da coluna líquida; ou a substância termométrica poderá ser um gás, mantido em um recipiente a volume constante, e a propriedade termométrica poderá ser a pressão do gás, e assim por diante. *Deve-se entender que cada escolha de uma substância e propriedade termométricas, juntamente com a relação admitida entre a propriedade e a temperatura, conduz a uma escala*

[1] Veja J. S. Thomsen, "A Restatement of the Zeroth Law of Thermodynamics", *American Journal of Physics*, 30, 294, 1962.

termométrica específica, cujas medidas não devem coincidir necessariamente com as medidas realizadas em outra escala termométrica qualquer, definida de maneira independente.

Este caos aparente na definição de temperatura é removido por acordo universal, dentro da comunidade científica, sobre o uso de uma determinada substância termométrica, de uma determinada propriedade termométrica e de uma certa relação funcional entre as medidas daquela propriedade e uma escala termométrica adotada universalmente. Uma escala termométrica particular, definida de outra maneira qualquer, poderá, então, sempre ser calibrada com a escala universal. Descreveremos uma tal escala universal na Seç. 21-5 e uma outra, equivalente, na Seç. 25-6.

Suponha que tenhamos escolhido uma substância termométrica. Representemos por X a propriedade termométrica que desejamos usar para estabelecer uma escala termométrica. Escolhemos, arbitrariamente, a seguinte função linear da propriedade X como sendo a temperatura, T, do termômetro apropriado e de qualquer sistema em equilíbrio térmico com ele:

$$T(X) = aX. \tag{21-1}$$

Nesta expressão, a é uma constante que ainda devemos calcular. Ao escolhermos esta forma linear para $T(X)$, estabelecemos que *iguais variações de temperatura*, ou intervalos de temperatura, *correspondem a variações iguais em X*. Isto significa, por exemplo, que, toda vez que a coluna de mercúrio no termômetro de mercúrio-em-vidro sofrer uma variação unitária de comprimento, a temperatura sofrerá uma variação fixa e bem definida, não importando qual seja a temperatura inicial. Concluímos, também, que duas temperaturas, medidas com o mesmo termômetro, estão entre si na mesma razão que os X's correspondentes, isto é,

$$\frac{T(X_1)}{T(X_2)} = \frac{X_1}{X_2}.$$

Para determinar a constante a e, portanto, calibrar o termômetro, especificamos um *ponto fixo padrão*, no qual todos os termômetros devem fornecer o mesmo valor da temperatura T. Este ponto fixo é escolhido como sendo aquele em que o gelo, a água líquida e o vapor d'água coexistem em equilíbrio e se denomina *ponto triplo da água*. Esta situação só pode ser conseguida com uma pressão única e bem determinada (Fig. 21-1). A pressão de vapor da água, no ponto triplo, vale 4,58 mm de Hg. A temperatura deste ponto fixo padrão foi estabelecida arbitrariamente como 273,16 graus Kelvin e abreviada como 273,16°K. Mais tarde,[2] o nome graus Kelvin (símbolo °K) foi simplificado para Kelvin (símbolo K) e a unidade de temperatura termodinâmica foi definida da seguinte forma: *O Kelvin, unidade de temperatura termodinâmica, é a fração* 1/273,16 *da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água.*[3]

Se indicarmos os valores referentes ao ponto triplo pelo índice tr, teremos, então, para qualquer termômetro,

[2] Adotado em 1954, na Décima Conferência Geral de Pesos e Medidas, em Paris.

[3] O ponto triplo da água foi escolhido no lugar do ponto de congelamento, que era usado anteriormente, por ser mais reprodutível, por um fator de 10.

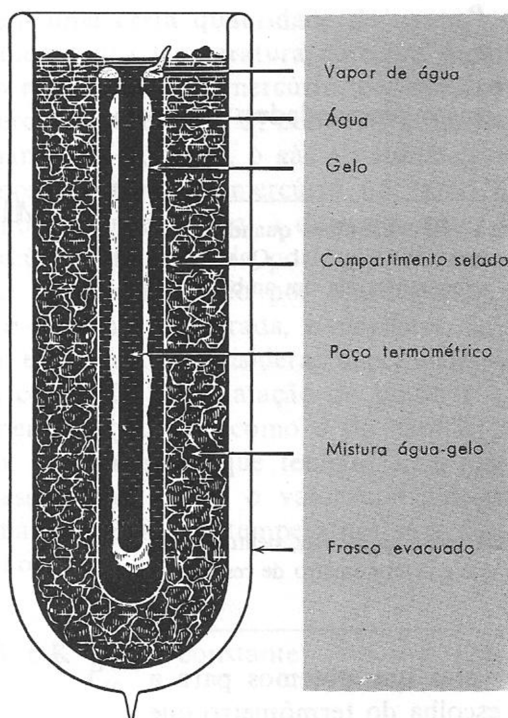


figura 21-1
O padrão do ponto triplo da Repartição Nacional de Padrões dos EUA. Ele contém água pura e é selado após a remoção de todo o ar, sendo então imergido em um banho de água e gelo. O sistema encontra-se no ponto triplo quando o gelo, a água e o vapor estão presentes e em equilíbrio no interior da célula. O termômetro a ser calibrado é introduzido no poço central.

$$\frac{T(X)}{T(X_{tr})} = \frac{X}{X_{tr}},$$

onde, para *todos* os termômetros

$$T(X_{tr}) = 273{,}16\ \text{K},$$

de modo que

$$T(X) = 273{,}16\ \text{K}\,\frac{X}{X_{tr}}. \qquad (21\text{-}2)$$

Portanto, quando a propriedade termométrica tem o valor X, a temperatura T, na escala particular escolhida, será dada, em K, por $T(X)$, se os valores de X e X_{tr} forem levados ao segundo membro desta equação.

Podemos, agora, aplicar a Eq. 21-2 a vários termômetros. Para um termômetro de líquido-em-vidro, X é o comprimento L da coluna líquida e a Eq. 21-2 fornece-nos

$$T(L) = 273{,}16\ \text{K}\,\frac{L}{L_{tr}}.$$

Para um gás a pressão constante, X é o volume V do gás e

$$T(V) = 273{,}16\ \text{K}\,\frac{V}{V_{tr}}\ \ (P\ \text{constante}).$$

Para um gás a volume constante, X é a pressão P do gás e

$$T(P) = 273{,}16\ \text{K}\,\frac{P}{P_{tr}}\ \ (V\ \text{constante}).$$

Para um termômetro de resistência de platina, X é a resistência elétrica R e

$$T(R) = 273{,}16\ \text{K}\,\frac{R}{R_{tr}},$$

e de modo idêntico para outras substâncias e propriedades termométricas.

EXEMPLO 1

A resistência R de certo termômetro de platina vale 90,35 ohms quando o seu bulbo é colocado em uma célula de ponto triplo, como a da Fig. 21-1. Qual será o valor da temperatura, definida pela Eq. 21-2, se o bulbo estiver em um ambiente tal que sua resistência seja de 96,28 ohms?

Da Eq. 21-2,

$$T(X) = 273{,}16\ \text{K}\,\frac{X}{X_{tr}}$$

$$= 273{,}16\ \text{K} \times \frac{96{,}28}{90{,}35} = 291{,}1\ \text{K}.$$

Deve-se observar que esta é a temperatura em uma escala particular, definida pela aplicação da Eq. 21-2 a um dispositivo particular, que é o termômetro de resistência de platina.

Surge, agora, a indagação de se o valor que obtemos para a temperatura de um sistema depende da escolha do termômetro que usamos para medi-la. Temos certeza, por definição, que todas as espécies de termômetros darão a mesma indicação no ponto fixo padrão, mas o que acontecerá em outros pontos? Podemos imaginar uma série de testes nos quais a temperatura de um dado sistema seja medida simultaneamente com vários termômetros diferentes. Os resultados destes testes mostram que todos os termômetros dão indicações diferentes. Mesmo quando usamos diferentes termômetros da mesma espécie, como termômetros de gás a volume constante usando gases diferentes, obtemos indicações diferentes para a temperatura de um dado sistema em um dado estado.

Portanto, para obtermos uma escala termométrica bem definida, devemos escolher um determinado tipo de termômetro como padrão. A escolha será feita não com base em conveniências experimentais, mas indagando se a escala termométrica, definida por um termômetro particular, será de utilidade na formulação das leis físicas. As menores variações são encontradas nas indicações de termômetros de gases diferentes, a volume constante, o que sugere que devemos escolher um gás como substância termométrica padrão. Verifica-se que, à medida que a quantidade de gás usada nesse termômetro é reduzida, e, portanto, é reduzida a sua pressão, as diferenças nas indicações entre termômetros de gás, usando gases diferentes, tornam-se menores também. Conseqüentemente, parece haver alguma coisa fundamental no comportamento de um termômetro a volume constante, contendo um gás a baixa pressão.

21-4 *O TERMÔMETRO DE GÁS A VOLUME CONSTANTE*

Se o volume de um gás é mantido constante, sua pressão dependerá da temperatura e aumentará continuamente com o aumento dela. O termômetro de gás a volume constante faz uso da pressão, a volume constante, como propriedade termométrica.

O termômetro está mostrado, esquematicamente, na Fig. 21-2. Ele consiste de um bulbo de vidro, porcelana, quartzo, platina ou platina iridiada (dependendo do intervalo de temperatura em que será usado), ligado por um tubo capilar a um manômetro de mer-

cúrio. O bulbo, que contém uma certa quantidade de um gás, é colocado no banho ou ambiente cuja temperatura deseja-se medir; levantando ou abaixando o reservatório de mercúrio, pode-se fazer o mercúrio, no ramo esquerdo do tubo em U, coincidir com uma marca de referência fixa, mantendo-se, assim, o gás a volume constante. Em seguida, medimos a altura do mercúrio no ramo da direita. A pressão do gás no bulbo será igual à diferença entre as alturas das colunas de mercúrio (multiplicada por ρg), adicionada à pressão atmosférica, cujo valor é indicado por um barômetro. Na prática, a montagem é bastante elaborada, e devemos fazer várias correções como, por exemplo, (1) considerar a pequena variação de volume devida à contração ou dilatação do bulbo e (2) considerar o fato de que nem todo o gás (como o do capilar) se encontra imerso no banho. Suponhamos que tenham sido feitas todas as correções e representemos por P o valor corrigido da pressão à temperatura do banho. Então, a temperatura será dada, provisoriamente (veja abaixo), por

$$T(P) = 273{,}16\ \mathrm{K}\ \frac{P}{P_{tr}}\ (V\ \text{constante}). \qquad (21\text{-}3)$$

O termômetro a volume constante, usado como se descreve a seguir, é o termômetro empregado para estabelecer a escala termométrica atualmente usada universalmente em trabalhos científicos.

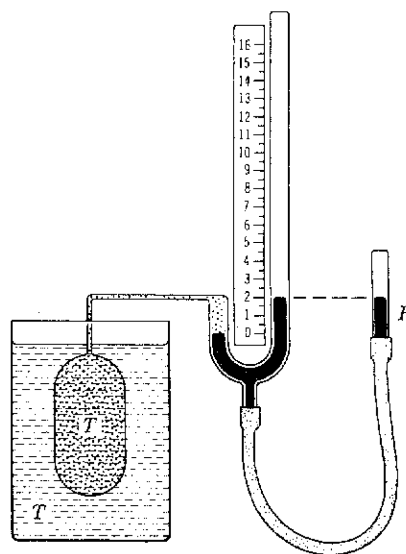


figura 21-2
Representação de um termômetro de ar de volume constante. Enquanto a posição do mercúrio no tubo manométrico esquerdo permanecer na mesma posição da escala (zero), o volume do ar confinado será constante. O menisco poderá sempre voltar à posição zero elevando ou baixando o reservatório *R*.

21-5 *ESCALA TERMOMÉTRICA DE UM GÁS IDEAL*

Suponha que uma certa quantidade de gás seja colocada no bulbo de um termômetro de gás a volume constante, de modo que, quando o bulbo está envolvido por água no ponto triplo, a pressão P_{tr} seja igual a um valor determinado, digamos, 80 cm de Hg. Em seguida, envolvemos o bulbo com vapor em condensação, à pressão de 1 atm e, com o volume mantido constante em seu valor anterior, medimos a pressão, P_s, do gás, isto é, a pressão no ponto de vapor, em nosso caso, P_{s80}. Então, calculamos provisoriamente a temperatura com a relação $T(P_{s80}) = 273{,}16\ \mathrm{K}\ (P_{s80}/80\ \text{cm-Hg})$. A seguir, retiramos certa quantidade do gás, de modo que P_{tr} passa a ter um valor menor, digamos 40 cm-Hg. Então, medimos o novo valor de P_s e calculamos outra temperatura provisória usando a relação $T(P_{s40}) = 273{,}16\ \mathrm{K}\ (P_{s40}/40\ \text{cm-Hg})$. Continuamos com este procedimento, reduzindo novamente a quantidade de gás no bulbo e, nesta pressão P_{tr} ainda menor, calculamos a temperatura $T(P_s)$ do ponto de vapor. Se lançarmos em um gráfico os valores de $T(P_s)$ em função de P_{tr} e se tivermos dados suficientes, poderemos extrapolar a curva obtida até a interseção com o eixo, onde temos $P_{tr} = 0$.

Na Fig. 21-3, mostramos os gráficos obtidos com este procedimento, em termômetros a volume constante, usando alguns gases diferentes. Estes gráficos nos mostram que as indicações de temperatura de um termômetro de gás a volume constante dependem do gás usado, para valores habituais da pressão de referência. Entretanto, à medida que a pressão de referência é diminuída, as indicações de temperatura dos termômetros de gás a volume constante que usem gases diferentes tendem para o mesmo valor. Portanto, *o valor extrapolado da temperatura depende apenas das propriedades gerais dos gases mas não depende de um determinado gás.* Definimos, então, uma *escala termométrica de gás ideal* pela relação

$$T = 273{,}16\ \mathrm{K} \lim_{P_{tr} \to 0} \left(\frac{P}{P_{tr}} \right) (V \text{ constante}). \qquad (21\text{-}4)$$

Nosso termômetro padrão é escolhido, portanto, como sendo o termômetro de gás a volume constante que usa uma escala termométrica definida pela Eq. 21-4.

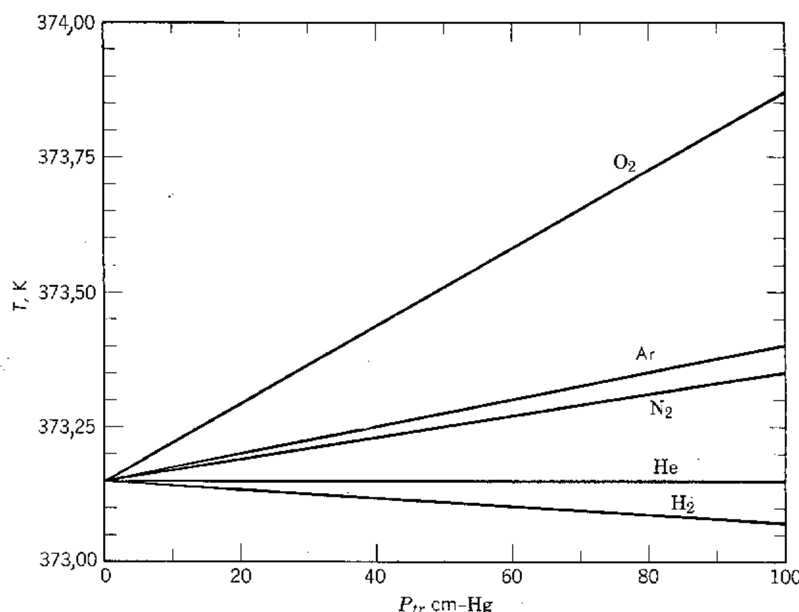


figura 21-3
Medidas de um termômetro de gás a volume constante para a temperatura T de vapor em condensação, como função de P_{tr}: foram utilizados diferentes gases. Reduzindo a quantidade de gás do termômetro, também se reduz sua pressão P_{tr} no ponto triplo. Observe que, para uma dada pressão P_{tr} são diferentes os valores de T obtidos com termômetros de gases diferentes. A discrepância é pequena mas mensurável, cerca de 0,2% nos casos extremos apresentados (O_2 e H_2 a 100 cm-Hg). O hélio fornece praticamente a mesma temperatura T a todas as pressões (a curva é quase horizontal), por isso seu comportamento é o que mais se aproxima do comportamento de um gás ideal no intervalo indicado.

Ainda que nossa escala termométrica seja independente das propriedades de um gás particular, ela dependerá das propriedades dos gases em geral (isto é, das propriedades de um gás ideal). Portanto, para medir uma temperatura, deve-se usar um gás àquela temperatura. A temperatura mais baixa que pode ser medida com qualquer termômetro de gás é de cerca de 1 K. Para obtermos esta temperatura, devemos usar hélio a baixa pressão, pois a temperatura de condensação do hélio é menor do que a de qualquer outro gás. Assim, não podemos atribuir significado esperimental a temperaturas inferiores a 1 K, se for usado um termômetro de gás.

Seria desejável definir uma escala termométrica de tal modo que ela fosse *independente das propriedades de qualquer substância.* Mostraremos, na Seç. 25-6, que a *escala termométrica termodinâmica absoluta*, denominada escala Kelvin, satisfaz a esta condição. Mostraremos, também que a *escala do gás ideal e a escala Kelvin são idênticas, no intervalo de temperatura em que um termômetro de gás pode ser usado.* Por este motivo, podemos escrever o símbolo K após o valor de uma temperatura na escala de um gás ideal, como temos feito até agora.

Mostraremos ainda, na Seç. 25-6, que a escala Kelvin tem um *zero absoluto* de 0 K e que não existem temperaturas inferiores a esta. O zero absoluto de temperatura tem desafiado todas as tentativas experimentais de alcançá-lo, ainda que seja possível aproximarmos dele indefinidamente.[4] A existência do zero absoluto é inferida

[4] É possível obter sistemas que têm *temperaturas Kelvin negativas.* Surpreendentemente, tais temperaturas não são atingidas passando-se por 0 K, mas por meio de temperaturas infinitas. Isto é, temperaturas negativas não são "mais frias" do que zero absoluto mas, ao contrário, são "mais quentes" do que temperaturas infinitas. Veja *Science by Degrees*, por Castle, Emmerich, Heikes, Miller e Rayne, publicado por Walker and Company, New York, 1965. O zero absoluto continua experimentalmente inatingível.

por extrapolação. O estudante não deve pensar no zero absoluto como um estado de energia nula e de nenhum movimento. A idéia de que todo movimento molecular cessaria, no zero absoluto, é errônea. Esta noção supõe que o conceito puramente macroscópico de temperatura esteja intimamente ligado ao conceito microscópico de movimento molecular. Quando tentamos estabelecer esta ligação, verificamos que, de fato, à medida que nos aproximamos do zero absoluto, a energia cinética das moléculas tende para um valor finito, que é denominado energia do ponto zero. A energia molecular é mínima, mas não é nula, no zero absoluto.

Na Tab. 21-1 relacionamos as temperaturas, na escala Kelvin, de vários corpos e de vários fenômenos.

Tabela 21-1
Algumas temperaturas[a] (K)

Reação termonuclear do carbono	5×10^8
Reação termonuclear do hélio	10^8
Interior do Sol	10^7
Coroa do Sol	10^6
Onda de choque no ar, a Mach 20	$2,5 \times 10^4$
Nebulosas luminosas	10^4
Superfície do Sol	6×10^3
Fusão do Tungstênio	$3,6 \times 10^3$
Fusão do Chumbo	$6,0 \times 10^2$
Congelamento da água	$2,7 \times 10^2$
Ebulição do oxigênio (1 atm)	$9,0 \times 10^1$
Ebulição do hidrogênio (1 atm)	$2,0 \times 10^1$
Ebulição do hélio (He^4, 1 atm)	4,2
Ebulição do hélio[3] à pressão mais baixa atingível	$3,0 \times 10^{-1}$
Desmagnetização adiabática de sais paramagnéticos	10^{-3}
Desmagnetização adiabática dos núcleos	10^{-6}

[a] Vide *Scientific American*, setembro de 1954, edição especial sobre calor.

21-6 *AS ESCALAS CELSIUS E FAHRENHEIT*

Duas escalas termométricas usuais são a escala Celsius[5] e a escala Fahrenheit. Elas são definidas em função da escala Kelvin, que é a escala termométrica fundamental em ciência.

A escala termométrica Celsius emprega um grau (a unidade de temperatura) de mesmo valor que o grau da escala Kelvin. Representando por t a temperatura Celsius, então a equação

$$t = T - 273,15° \qquad (21\text{-}5)$$

relaciona a temperatura Celsius t(°C) e a temperatura Kelvin T(K). Vemos que o ponto triplo da água (= 273,16 K, por definição) corresponde a 0,01°C. Experimentalmente, verifica-se que a temperatura na qual o gelo e a água saturada com ar estão em equilíbrio, à pressão atmosférica — denominado ponto de fusão do gelo — é de 0,00°C e a temperatura na qual o vapor d'água e água líquida estão em equilíbrio, à pressão de 1 atm — denominado ponto de vapor — é de 100,00°C.

A escala Fahrenheit, comumente usada em países de língua inglesa (com exceção da própria Inglaterra, que adotou a escala

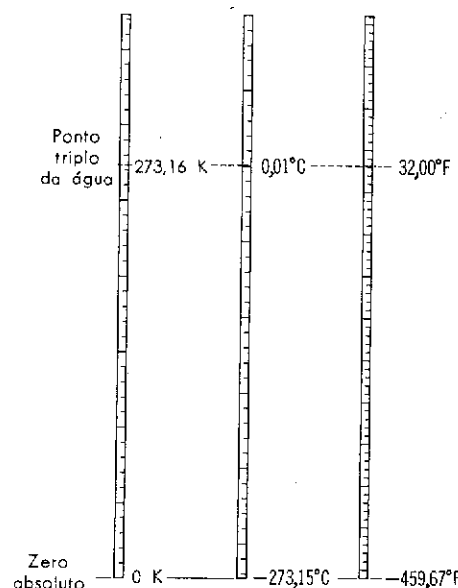


figura 21-4
As escalas de temperatura Kelvin, Celsius e Fahrenheit.

[5] Esta escala, baseada em uma escala inventada em 1742 por um sueco chamado Celsius, foi denominada escala "centigrada" até 1948, quando a Nona Conferência Geral de Pesos e Medidas decidiu que o nome devia ser modificado.

Celsius para uso comercial e civil em 1964) não é usada em trabalhos científicos. A relação entre as escalas Fahrenheit e Celsius é

$$T_F = 32°\mathrm{F} + \frac{9}{5}T_C.$$

Desta relação, podemos concluir que a fusão do gelo (0,00°C) é igual a 32,0°F, que o ponto de vapor (100,00°C) é igual a 212,0°F e que um grau Fahrenheit vale, exatamente, 5/9 do grau Celsius. Na Fig. 21-4 é feita uma comparação entre as escalas Kelvin, Celsius e Fahrenheit.

21-7 *A ESCALA TERMOMÉTRICA PRÁTICA INTERNACIONAL*

Façamos, agora, um resumo das idéias das últimas seções. O ponto fixo padrão, em termometria, é o ponto triplo da água, ao qual se atribui, arbitrariamente, o valor de 273,16 K. O termômetro de gás a volume constante é o termômetro padrão. A escala de um gás, extrapolada, é usada para definir a escala termométrica de um gás ideal, a partir de $T = 273{,}16\,\mathrm{K} \lim_{P_{tr}\to 0} (P/P_{tr})$. Esta escala é idêntica à escala (termodinâmica absoluta) Kelvin no intervalo em que um termômetro de gás pode ser usado.

Usando o termômetro padrão desta maneira, podemos determinar, experimentalmente, outros pontos de referência para medidas de temperatura, denominados pontos fixos. Relacionamos, na Tab. 21-2, os pontos fixos básicos que são usados para referência experimental. As temperaturas podem ser expressas na escala Celsius, por meio da Eq. 21-5, desde que seja dada a temperatura Kelvin.

Tabela 21-2

Pontos fixos da escala termométrica prática internacional[a]

Substância	Estado	Temperatura	
		K	°C
Hidrogênio	Ponto triplo	13,81	−259,34
Hidrogênio	Ponto de ebulição[b]	17,042	−256,108
Hidrogênio	Ponto de ebulição	20,28	−252,87
Neônio	Ponto de ebulição	27,102	−246,048
Oxigênio	Ponto triplo	54,361	−218,789
Oxigênio	Ponto de ebulição	90,188	−182,962
Água[c]	Ponto triplo	273,16	0,01
Água[c]	Ponto de ebulição	375,15	100
Zinco	Ponto de congelamento	692,73	419,58
Prata	Ponto de congelamento	1 235,08	961,93
Ouro	Ponto de congelamento	1 337,58	1 064,43

[a] A chamada ETPI 68 adotada em 1968 pelo Comitê Internacional de Pesos e Medidas.

[b] Este ponto de ebulição refere-se a pressão de 25/76 atm. Todos os demais pontos de ebulição (e pontos de congelamento) são para pressão de 1 atm.

[c] Após usada deve ter a composição isotópica da água do mar.

Determinar temperaturas na escala de um gás ideal é um trabalho laborioso. Não faria sentido usar este procedimento para determinar temperaturas em qualquer trabalho. Portanto, uma

Escala Termométrica Prática Internacional (ETPI) foi adotada em 1927 (revista em 1948 e, novamente, em 1960) estabelecendo-se uma escala de fácil uso para finalidades práticas, tal como na calibração de aparelhagem industrial ou científica. Esta escala consiste de um conjunto de fórmulas que fornecem, na prática, as melhores aproximações possíveis da escala Kelvin. Adota-se um conjunto de pontos fixos, os pontos básicos da Tab. 21-2, e especifica-se um conjunto de aparelhos que devem ser usados para interpolar entre estes pontos fixos e para extrapolar além do ponto fixo de maior valor. A ETPI-68 não concorda com a escala Kelvin em temperaturas situadas entre os pontos fixos, mas as diferenças são em geral desprezíveis. A ETPI-68 se transformou no padrão legal em praticamente todos os paises.

21-8 *DILATAÇÃO TÉRMICA*

As conseqüências habituais de variações na temperatura são variações no tamanho dos objetos e mudanças de fase de substâncias. Consideremos as dilatações que ocorrem sem mudanças de fase. Imaginemos um modelo simples de um sólido cristalino. Os átomos são mantidos juntos, em uma disposição regular, por forças de origem elétrica. As forças entre os átomos são semelhantes às que seriam exercidas por um conjunto de molas que ligassem os átomos, de modo que podemos visualizar o sólido como um colchão de molas microscópico (Fig. 21-5). Estas "molas" são bastante duras (Probl. 9, Cap. 15) e existem cerca de 10^{22} delas por centímetro cúbico. Em qualquer temperatura, os átomos do sólido estão em vibração, cuja amplitude vale cerca de 10^{-9} cm e a freqüência é de aproximadamente 10^{13} Hz.

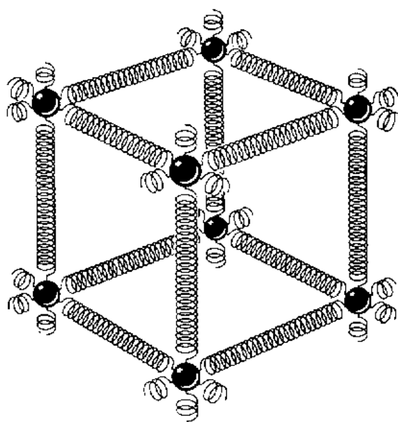


figura 21-5
Um sólido comporta-se sob muitos aspectos como se fosse um "colchão de molas", em que as moléculas são ligadas entre si por forças elásticas.

Quando se eleva a temperatura, a distância média entre os átomos também aumenta. Isto acarreta uma dilatação do corpo sólido, como um todo, em virtude do aumento na temperatura. A variação de *qualquer* dimensão linear do sólido, como o comprimento, largura ou espessura, denomina-se dilatação linear. Se o valor desta dimensão linear for l, a variação deste valor causada por uma variação ΔT de temperatura será Δl. Verifica-se experimentalmente que, se ΔT for suficientemente pequeno, esta variação Δl será proporcional à variação de temperatura, ΔT, e ao valor inicial l. Portanto, podemos escrever

$$\Delta l = \alpha l \Delta T, \tag{21-6}$$

onde α, denominado *coeficiente de dilatação linear*, tem valores diferentes para materiais diferentes. Reescrevendo esta fórmula, obtemos

$$\alpha = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{T},$$

de modo que α pode ser interpretado como sendo a variação percentual no comprimento, por grau de variação na temperatura.

Na realidade, o valor de α depende da temperatura e também da temperatura de referência escolhida para determinar l (veja o Probl. 13). Contudo, suas variações são, em geral, desprezíveis comparadas com a precisão com que devem ser feitas as medidas em engenharia. Podemos, com segurança, considerá-lo como constante e independente da temperatura, para um dado material. Na Tab. 21-3 relacionamos os valores experimentais dos coeficientes de

Tabela 21-3

Alguns Valores[a] de α

Substância	$\bar{\alpha}$ (por °C)	Substância	$\bar{\alpha}$ (por °C)
Alumínio	23×10^{-6}	Borracha dura	80×10^{-6}
Latão	19×10^{-6}	Gelo	51×10^{-6}
Cobre	17×10^{-6}	Invar	$0{,}7 \times 10^{-6}$
Vidro (comum)	9×10^{-6}	Chumbo	29×10^{-6}
Vidro (pyrex)	$3{,}2 \times 10^{-6}$	Aço	11×10^{-6}

[a] Para o intervalo de 0°C a 100°C: exceto para o gelo, que é de − 10°C a 0°C.

dilatação linear médios de vários sólidos comuns. Para todas as substâncias relacionadas, a variação de tamanho consiste de .uma dilatação quando a temperatura aumenta, pois α é positivo. A ordem de grandeza da dilatação é de 1 milímetro por metro de comprimento, por 100 graus Celsius.[6]

EXEMPLO 2

Uma régua de aço deve ser calibrada de modo que as divisões de milímetros apresentem um erro máximo de, aproximadamente, 5×10^{-5} mm, em uma certa temperatura. Qual é a máxima variação de temperatura permissível durante a calibração?

Da Eq. 21-6,

$$\Delta l = \alpha l \Delta T,$$

temos

$$5 \times 10^{-5}\,\text{mm} = 11 \times 10^{-6}/°\text{C} \times 1{,}0\,\text{mm} \times \Delta T$$

onde usamos $\bar{\alpha}$ para o aço, obtido da Tab. 21-3. Obtemos $\Delta T \cong 5°$C. A temperatura mantida durante o processo de calibração deve ser mantida quando a escala está sendo usada e ela não poderá sofrer variações maiores do que 5°C.

Deve observar-se (veja a Tab. 21-3) que, se fosse usada a liga invar em vez do aço, para a mesma tolerância exigida, seria permissível uma variação de cerca de 75°C na temperatura; ou, para a mesma variação de temperatura ($\Delta T = 5°$C) a tolerância alcançada seria melhorada em mais do que uma ordem de grandeza.

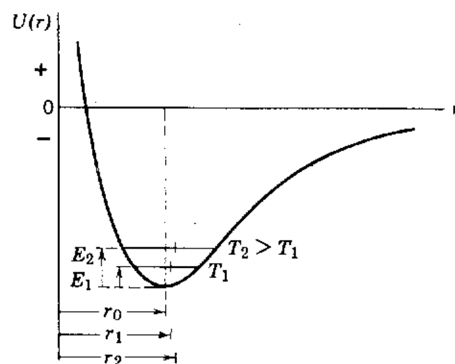
Em nível microscópico, a dilatação térmica de um sólido sugere um aumento na separação média entre os átomos do sólido. O gráfico da energia potencial de dois átomos adjacentes, em um sólido cristalino, em função da sua distância internuclear, é uma curva assimétrica, como a da Fig. 21-6. Quando os átomos se aproximam, diminuindo sua separação para um valor menor do que o valor de equilíbrio, r_0 aparecem forças repulsivas de grande valor e a curva de energia potencial cresce rapidamente ($F = -dU/dr$); quando os átomos se afastam, a distância entre eles tornando-se maior do que o valor de equilíbrio, aparecem forças atrativas mais fracas e a curva de energia potencial mostra um crescimento mais suave. Para uma dada energia de vibração, a separação entre os átomos varia periodicamente entre um valor mínimo e um valor máximo, sendo a separação média maior do que a separação de equilíbrio, em virtude da natureza assimétrica da curva de energia potencial. Com uma energia de vibração mais elevada, a separação média será maior ainda. O efeito é realçado pelo fato de que, ao determinar uma média do movimento ao tempo deve-se levar em consideração o maior intervalo de tempo em que o corpo permanece nos extremos da distância (menores velocidades de vibração). Como a energia de vibração aumenta com a temperatura, a separação média entre os átomos também aumenta com a temperatura e o sólido se dilata como um todo.

[6] Um grau Celsius (1°C) é um *intervalo* de temperatura ΔT_C) de uma unidade da escala Celsius. A temperatura de um grau Celsius (1°C) é uma indicação específica de temperatura (T_C) naquela escala.

Observe que, se a curva de energia potencial fosse simétrica em relação a distância de equilíbrio, a distância média corresponderia à de equilíbrio, independentemente do valor da amplitude da vibração. Portanto, a dilatação térmica é uma conseqüência direta da falta de simetria (isto é, da assimetria) da curva de energia potencial característica dos sólidos.

Alguns sólidos cristalinos, em certas regiões de temperatura, podem contrair-se quando a temperatura aumenta. A análise anterior continua válida se admitimos que apenas estão presentes modos de vibração de compressão (i. e., longitudinais) ou que predominam estes modos. Entretanto, os sólidos podem vibrar também em modos transversais (de cisalhamento), e estes nodos de vibração permitirão que o sólido se contraia quando a temperatura aumenta, diminuindo a separação média entre os planos de átomos. Para certos tipos de estrutura cristalina e em certas regiões de temperatura, estes modos transversais de vibração podem predominar sobre os modos longitudinais, acarretando um coeficiente de dilatação térmica global de valor negativo.

Deve-se realçar que os modelos microscópicos apresentados aqui constituem uma grande simplificação de um fenômeno complexo que pode ser tratado com maior cuidado por meio da termodinâmica e da teoria quântica.



figuras 21-6
Curva de energia potencial para dois átomos adjacentes de um sólido cristalino, como função da distância internuclear. A distância de equilíbrio é r_0. Como a curva é assimétrica, a distância média (r_1, r_2) aumenta com a temperatura (T_1, T_2) e por isso aumenta a energia de vibração (E_1, E_2).

Para muitos sólidos, denominados *isotrópicos*, a variação percentual no comprimento, para uma dada variação de temperatura. é igual para todas as direções do sólido. A dilatação é muito semelhante a uma ampliação fotográfica, com a exceção de que o sólido é tridimensional. Assim, em uma placa plana, onde exista um orifício, $\Delta l/l (= \alpha \Delta T)$, para um dado ΔT, terá o mesmo valor para o comprimento, a espessura, a diagonal da face, a diagonal do corpo e o diâmetro do orifício. Cada linha, seja reta ou curva, aumenta na razão α para cada grau de aumento da temperatura. Se você riscar o seu nome na placa, a linha que o representar terá a mesma variação percentual em comprimento que qualquer outra linha. A analogia com uma ampliação fotográfica está mostrada na Fig. 21-7.

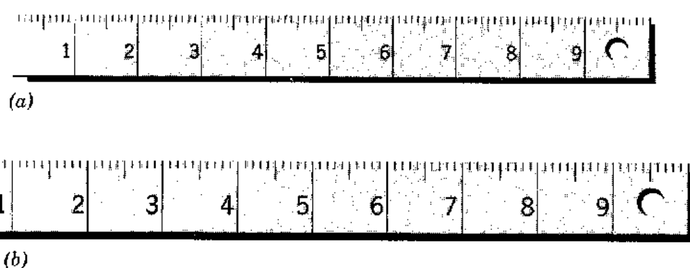


figura 21-7
A mesma régua de aço em duas temperaturas diferentes. Quando há dilatação, cada dimensão é aumentada na mesma proporção: a escala, os números, o orifício e a espessura aumentam todos pelo mesmo fator. (A dilatação representada de *a* para *b* está naturalmente aumentada, pois corresponderia a um aumento imaginário de temperatura de uns 100.000°C.)

Com estas idéias em mente, o estudante poderá mostrar (veja os Probls. 18 e 25) que, com alto grau de precisão, para um sólido isotrópico a variação percentual na área A, por grau de variação na temperatura vale 2α, isto é,

$$\Delta A = 2\alpha\, A\, \Delta T,$$

e que a variação percentual no volume V, por grau de variação na temperatura, vale 3α, isto é,

$$\Delta V = 3\alpha V \Delta T.$$

Em virtude de não ser definida a forma de um fluido, apenas tem interesse a variação de seu volume com a temperatura. Os gases respondem acentuadamente a variações de temperatura ou de pressão, enquanto que é muito pequena a variação no volume dos líquidos causada por variações de temperatura ou de pressão. Se representarmos por β o coeficiente de dilatação volumétrica de um líquido, isto é,

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T},$$

verificamos que β é praticamente independente da temperatura. Os líquidos, em geral, dilatam-se com o aumento de temperatura, sendo os seus coeficientes de dilatação volumétrica cerca de dez vezes maiores do que os dos sólidos.

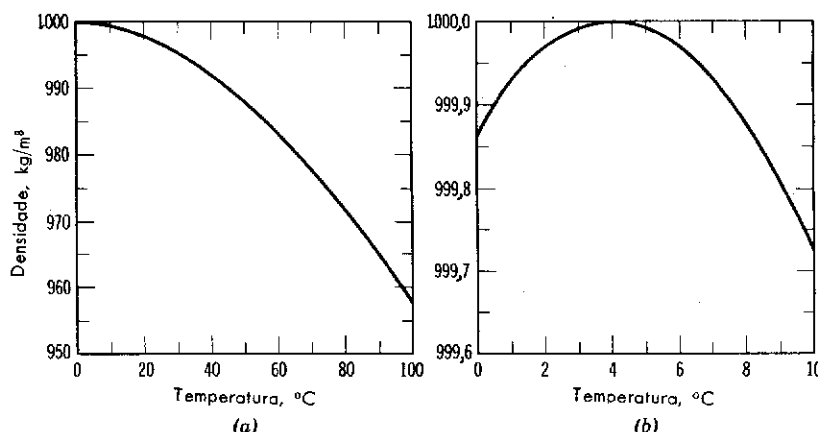


figura 21-8
(*a*) Variação com a temperatura da massa específica da água sob pressão atmosférica. (*b*) A variação entre 0 e 10°C mais detalhada.

Entretanto, o líquido mais comum, a água, não se comporta como os demais. Na Fig. 21-8 mostramos a curva de dilatação para a água. Observe que, acima de 4°C, a água se dilata com o aumento de temperatura, ainda que não o faça linearmente. Quando a temperatura é diminuída de 4 para 0°C, a água se dilata em vez de contrair-se. Esta dilatação com a diminuição de temperatura não é observada em nenhum outro líquido comum; ela ocorre em substâncias semelhantes à borracha e em certos sólidos cristalinos em determinados intervalos de temperatura. A massa específica da água é máxima a 4°C, quando o seu valor[7] é de 1.000 kg/m³ ou 1.000 g/cm³. Em qualquer outra temperatura, a sua massa específica é menor. É em virtude deste comportamento da água que os lagos congelam-se primeiro em suas superfícies.

questões

1. A Temperatura é um conceito microscópico ou macroscópico?
2. Existem outras quantidades físicas, que como a temperatura, tendem a se equalizar quando dois sistemas são postos em contato?
3. Dê uma explicação razoável para o seguinte fato: a temperatura de um termômetro decresce durante algum tempo se ele for suspenso juntamente com um pedaço de gelo, de tal maneira que não fiquem em contato, dentro de um recipiente isolado termicamente e onde foi feito o vácuo.

---

[7] É a este valor *unitário* de máxima densidade da água que se supunha correspondessem, originalmente, os valores relativos do quilograma e do metro. Medidas cuidadosas mostram, entretanto, que os padrões internacionais de massa e comprimento não correspondem exatamente a este valor. A densidade máxima da água vale, realmente, 999,973 kg/m³ a 3,98°C.

4. Pode ser atribuída uma temperatura, ao vácuo?
5. Nosso tato associa intuitivamente um sentido à sensação de temperatura? Em outros termos: mais quente significa necessariamente temperatura superior ou trata-se apenas de uma convenção arbitrária? A respeito: Celsius originalmente atribuiu o valor 0°C ao ponto de ebulição e 100°C ao ponto de congelamento.
6. A Fig. 21-1 mostra um aparelho para a obtenção do ponto triplo da água. Como você o modificaria se desejasse o obter o ponto de congelamento da água?
7. Sugira como medir a temperatura dos seguintes corpos: (*a*) Sol, (*b*) atmosfera superior da Terra, (*c*) um inseto, (*d*) Lua, (*e*) fundo do mar, (*f*) hélio líquido.
8. Um gás é melhor do que outro, sob qualquer aspecto, para utilização em um termômetro de gás de volume constante? Para esse objetivo, que propriedades são desejáveis para um gás?
9. Enuncie algumas objeções à utilização da água-em-vidro como termômetro. O mercúrio-em-vidro constitui um aperfeiçoamento?
10. Ao aquecer na chama um termômetro de mercúrio-em-vidro, a coluna de mercúrio inicialmente contrai-se e só depois se expande. Como se explica este comportamento?
11. O que existe em comum nas convenções das escalas Celsius e Fahrenheit?
12. Considere as escalas Celsius, Fahrenheit e Kelvin. Alguma delas pode ser considerada uma "escala da natureza"? Discuta.
13. Indicar as dimensões do coeficiente de dilatação linear α. O valor de α depende da unidade de comprimento escolhida? Se usarmos °F ao invés de °C para medir as temperaturas isto afetará o valor de α? Em caso afirmativo, como?
14. Uma esfera metálica pode atravessar um anel metálico. Aquecendo a esfera, todavia, ela não conseguirá mais atravessar o anel, onde ficaria presa. Que aconteceria se aquecêssemos o anel e não a esfera?
15. Uma lâmina bimetálica consiste de duas tiras metálicas rebitadas e é utilizada como elemento de controle em um termostato comum. Explique como ela funciona.
16. Duas faixas metálicas, uma de ferro e outra de zinco são rebitadas juntas, lado a lado, para formar uma barra reta que se curva quando aquecida. Por que o ferro fica na parte interna da curva?
17. Explique como o período de um relógio de pêndulo pode permanecer constante em relação à temperatura, ligando-se tubos de mercúrio à parte inferior do pêndulo (vide Probl. 41).
18. Explique por que algumas substâncias semelhantes à borracha contraem-se ao elevar-se a temperatura (vide Questão 25, Cap. 25).
19. Explique por que a dilatação aparente de um líquido em um bulbo não fornece a dilatação verdadeira do líquido.
20. Por que, em geral, os líquidos têm um coeficiente de dilatação muito maior do que os sólidos?
21. A variação no volume de um corpo, quando sua temperatura se eleva, depende de haver cavidades nele, tudo o mais sendo o mesmo? Considere uma esfera maciça e uma oca, por exemplo.
22. Que dificuldades surgiriam se a temperatura fosse definida em função da densidade da água?
23. Explique por que a superfície de um lago congela-se primeiro.
24. Por que garrafas de refrigerante arrebentam quando colocadas em congeladores durante muito tempo?
25. O que você pode concluir, a respeito da dependência do ponto de fusão do gelo com a pressão, do fato que o gelo flutua sobre a água.

problemas

SEÇÃO 21-3

1. Em vez de definir a temperatura t como uma função linear de uma certa propriedade física X, podemos definir a temperatura t' como uma função logarítmica da forma:

$$t' = a \log X + b$$

onde a e b são constantes e $\log X$ é o logaritmo neperiano da propriedade X. Suponha $t' = 0°$ no ponto do gelo e $t' = 100°$ no ponto vapor. Mostre como se calcula a temperatura t' para $t' = 50°C$.

2. No Probl. 1 seja X o comprimento da coluna líquida de um termômetro de mercúrio. Tomemos como pontos de referência $X_i = 5$ cm e $t_i' = 0°$, $X_f = 25$ cm e $t_f' = 100°$.

Ache as distâncias em centímetros entre os pontos $t' = 0°$ e $t' = 10°$ e entre os pontos $t' = 90°$ e $t' = 100°$.

Resposta: Entre 0° e 10° a distância vale 0,9 cm, aproximadamente. Entre 90° e 100°, a distância é aproximadamente igual a 3,6 cm.

3. No ***termômetro de resistência***, a propriedade usada para a medida da temperatura é a resistência elétrica de um condutor. As temperaturas medidas por este termômetro (em graus Kelvin ou em graus Celsius) podem ser diretamente relacionadas com a resistência R, medida em ohms. Um certo termômetro de resistência possui uma resistência $R = 90{,}35$ ohms, quando o seu bulbo é colocado em água, na temperatura do ponto triplo (273,16 K). Encontre a temperatura indicada pelo termômetro quando seu bulbo for colocado num meio tal que sua resistência se torne igual a 105 ohms.

4. Considere um termômetro constituído por uma ***resistência elétrica de platina***. A temperatura Celsius da escala deste termômetro é denominada *temperatura da platina*, t_{Pt}, e é definida do seguinte modo:

$$t_{Pt} = 100\frac{R - R_i}{R_f - R_i}$$

onde R_i é a resistência do termômetro no ponto do gelo, R_f é a resistência do termômetro, no ponto do vapor e R é a resistência do termômetro na temperatura que queremos medir. A resistência de um termômetro deste tipo é de 10 000 ohms no ponto do gelo, 13 860 ohms no ponto do vapor e 26 270 ohms no ponto do enxofre (onde $t = 444{,}6°C$). Calcule a temperatura da platina no ponto do enxofre.

Resposta: $t_{Pt} = 421{,}4$ graus Celsius.

5. É fato de observação diária que os objetos quentes e frios esfriam ou esquentam, respectivamente, até atingir a temperatura dos corpos vizinhos. Se não for grande a diferença de temperatura ΔT entre um objeto e sua vizinhança, a taxa de esfriamento ou de aquecimento é aproximadamente proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e a vizinhança:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -k\Delta T,$$

sendo k uma constante. Aparece o sinal negativo porque ΔT *diminui* com o tempo se ΔT for positivo, e vice-versa. Esta relação é conhecida como *Lei do Esfriamento de Newton.* (*a*) De que fatores depende k? Quais são suas dimensões? (*b*) Sendo ΔT_0 a diferença de temperatura em certo instante, demonstre que

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-kt}$$

após o intervalo de tempo t.

SEÇÃO 21-5

6. Um gás ideal possui pressão p_0 e temperatura T_0, em graus Kelvin. O gás é mantido no interior de um recipiente rígido e indeformável. Em virtude do aquecimento do recipiente a pressão do gás cresce (isocoricamente) até atingir um valor p; obtenha a expressão da temperatura T do gás, em graus Kelvin, para esta pressão.

Resposta: $T = T_0 p/p_0$.

7. Um gás possui uma pressão p_0 muito menor do que 1 atm; a temperatura do gás vale $T_0 = 280\ K$. O gás sofre um aquecimento isovolumétrico e sua pressão passa para $2p_0$. Calcule a temperatura do gás.

SEÇÃO 21-6

8. A temperatura na superfície do Sol é aproximadamente igual a 6.000 K; expresse esta temperatura em °C e em °F. *Resposta:* 5.727°C; 10.340,6°F.

9. (*a*) Exprimir em °F a temperatura média do corpo humano (36°C). (*b*) Exprimir em °F a temperatura normal de ebulição do oxigênio (−183°C).

10. Transforme para °C as seguintes temperaturas: (*a*) 223 K, (*b*) − 20°F, (*c*) 523 K, (*d*) 235°F. *Resposta:* (*a*) −50°C. (*b*) −28,89°C. (*c*) 250°C. (*d*) 112,78°C.

11. Transforme para graus Kelvin as seguintes temperaturas: (*a*) 27°C, (*b*) −23°C, (*c*) −200°C, (*d*) 20°F, (*e*) 120°F, (*f*) −200°F.

12. A que temperatura os seguintes pares de escalas fornecem a mesma leitura? (*a*) Fahrenheit e Celsius; (*b*) Fahrenheit e Kelvin; (*c*) Celsius e Kelvin.

Resposta: (*a*) −40°. (*b*) 575°. (*c*) Para nenhum valor.

SEÇÃO 21-7

13. No intervalo de 0 a 660°C usa-se, para interpolar temperaturas na Escala Internacional Prática, um termômetro de resistência de platina, de características especificadas. A tem-

peratura t é calculada por uma equação que exprime a variação da resistência com a temperatura,

$$R = R_0\,(1 + At + Bt^2),$$

sendo R_0, A e B constantes determinadas no ponto de congelação, no ponto de ebulição e no ponto de fusão do enxofre. (*a*) Se $R =$ 10.000 ohms no ponto de congelação, $R =$ 13.946 ohms no de ebulição e 24.817 ohms no do enxofre, determinar R_0, A e B. (*b*) Represente graficamente R como função de t, entre 0 e 660ºC.

SEÇÃO 21-8

14. Partindo da relação (21-6), obtenha uma expressão para o *coeficiente de dilatação linear* em função da taxa de variação do comprimento com a temperatura (dl/dT). *Resposta:* $\alpha = (1/l)\,(dl/dT)$.
15. Seja α' o *coeficiente de dilatação superficial*. Por analogia com o problema anterior, mostre que: $\alpha' = (1/S)\,(dS/dT)$, onde S é a área da seção reta do material.
16. Seja r o raio de um círculo. Obtenha uma expressão para a taxa de variação do raio com a temperatura (dr/dT) em função do coeficiente de dilatação linear e em função do coeficiente de dilatação superficial. *Resposta:* $dr/dT = r\,\alpha$; $dr/dT = r\,\alpha'/2$.
17. Mostre que, se α for considerado variável e dependente da temperatura T, então

$$L = L_0\left[1 + \int_{T_0}^{T} \alpha(T)dT\right],$$

sendo L_0 o comprimento à temperatura de referência T_0.

18. A área de uma placa retangular é ab e seu coeficiente de dilatação linear é α. Após o acréscimo de temperatura ΔT, o lado a aumenta de Δa e o lado b de Δb. Provar que, desprezando a pequena área $\Delta a \cdot \Delta b$, hachurada na Fig. 21.9, tem-se $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$.

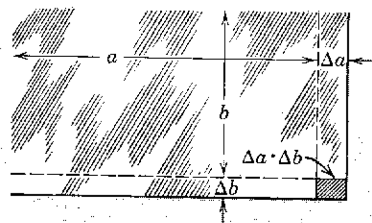


figura 21-9

19. Um orifício circular numa lâmina de alumínio possui diâmetro de 1,000 cm a 0ºC. Calcule o diâmetro deste orifício quando a temperatura da lâmina atinge o valor de 200ºC.
20. O espelho do telescópio do observatório da Serra da Piedade, em Minas Gerais, tem diâmetro de 60,0 cm e seu coeficiente de dilatação linear é de aproximadamente 3×10^{-6}/ºC. A temperatura na Serra da Piedade varia entre +3ºC e +30ºC. Determinar a variação máxima do diâmetro do espelho. *Resposta:* 0,06 cm.
21. Uma barra de aço possui um diâmetro igual a 3,000 cm a 20ºC. Um anel de latão possui raio interno de 2,994 cm a 20°C. Calcule a temperatura mínima do anel de latão para que a barra possa ser introduzida no anel.
22. Trilhos de aço para uma estrada são colocados quando a temperatura é 0ºC. Uma seção padrão tem comprimento igual a 12,0 m. Qual o intervalo que deve existir entre as seções de forma que não haja compressão quando a temperatura alcançar 42ºC. *Resposta:* 0,55 cm.
23. Mostre que o *coeficiente de dilatação volumétrica* pode ser escrito em função da taxa de variação do volume com a temperatura do seguinte modo:

$$\beta = (1/V)\,(dV/dT)$$

24. Um cubo homogêneo e isotrópico possui lado L. Obtenha uma relação entre os coeficientes β e α. *Resposta:* $\beta = 3\,\alpha$.
25. Seja V_0 o volume inicial de um sólido homogêneo. Supondo que o coeficiente de dilatação linear permaneça constante, mostre que a variação de volume do sólido é dada por: $\Delta V = 3\alpha\, V_0\, \Delta T$.
26. Determinar a variação de volume de uma esfera de alumínio, cujo raio é de 10,0 cm, quando aquecida de 0,00ºC a 100ºC. *Resposta:* 29 cm³.
27. Quando a temperatura de uma moeda se eleva de 100ºC, seu diâmetro aumenta de 0,18%. Obtenha, com dois algarismos significativos, o acréscimo correspondente: (*a*) na área de uma das faces, (*b*) na espessura, (*c*) no volume e (*d*) na massa da moeda. (*e*) Qual é seu coeficiente de dilatação linear?
28. Seja ρ a *massa específica* de um material homogêneo. Como o volume varia com a temperatura, concluímos que a massa específica também varia com a temperatura. (*a*) Obtenha uma expressão para o coeficiente β em função da taxa de variação $d\rho/dT$. (*b*) Determine $\Delta\rho$ para pequenas variações de temperatura. *Resposta:* (*a*) $\beta = -\,(1/\rho)\,(d\rho/dT)$. (*b*) $\Delta\rho = -\,\beta\rho\Delta T$.
29. Mostre que quando a temperatura de um líquido em um barômetro muda por ΔT sendo a pressão constante, a altura h varia de $\Delta h = \beta h \Delta T$ onde β é o coeficiente de dilatação volumétrica.

30. (*a*) Provar que, se os comprimentos de duas barras de sólidos diferentes forem inversamente proporcionais aos respectivos coeficientes de dilatação linear, em certa temperatura inicial, a diferença de comprimento entre elas será constante em todas as temperaturas. (*b*) Quais seriam os comprimentos de uma barra de aço e outra de latão, a 0ºC, para que a diferença entre eles se mantivesse igual a 0,30 m a todas as temperaturas? *Resposta:* (*b*) Aço, 71 cm; latão, 41 cm.

31. Consideremos um termômetro de mercúrio-em-vidro. Suponhamos que a seção transversal do capilar seja constante, A_0, e que V_0 seja o volume do tubo do termômetro a 0,00ºC. Se o mercúrio for exatamente suficiente para encher o tubo a 0,00ºC, provar que o comprimento da coluna de mercúrio no capilar, à temperatura t, será:

$$l = \frac{V_0}{A_0}(\beta - 3\alpha)\,t,$$

ou seja, é proporcional à temperatura; β é o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio e α o de dilatação linear do vidro.

32. Imagine um copo de alumínio, cuja capacidade seja de 0,1 litro cheio com mercúrio a 12ºC. Se a temperatura aumentar para 18ºC, qual a quantidade de mercúrio que transbordará? *Resposta:* 70 mm³.

33. Um relógio de pêndulo de invar tem período de 0,500s a 20ºC. Se o relógio for usado em um clima onde a temperatura média é de 30ºC, aproximadamente que correção deverá ser feita, no fim de 30 dias, no valor do tempo medido pelo relógio?

34. (*a*) Provar que a variação, com a temperatura, no momento de inércia I de um corpo sólido é $\Delta I = 2\alpha I \Delta T$. (*b*) Provar que a variação no período, t, de um pêndulo físico com a temperatura é $\Delta t = \frac{1}{2}\,\alpha\, t\, \Delta T$.

35. Considere um cilindro maciço e uniforme de latão, de massa $M = 0{,}50$ kg e raio $R = 0{,}030$ m. O cilindro é colocado sobre mancais sem atrito e posto a girar em torno de seu eixo, com velocidade angular $\omega = 60$ rad/s. (*a*) Qual o momento angular do cilindro e que trabalho é necessário para alcançar essa velocidade de rotação, partindo do repouso? (*b*) Depois de ter alcançado o estado de rotação acima descrito, o cilindro é aquecido, sem contato mecânico, desde a temperatura ambiente (20ºC) até 100ºC. Tome $\bar{\alpha} = 2{,}0 \times 10^{-5}$/ºC para o latão. Determinar as variações relativas, se houver, (*c*) da velocidade angular, (*d*) do momento angular e (*e*) da energia cinética de rotação do cilindro.

36. Um tubo vertical de comprimento igual a 1,0 m, está cheio até sua metade com um líquido a 20ºC. De quanto a altura do líquido variará quando o tubo é aquecido até 30ºC? Considere $\bar{\alpha}_{vidro} = 1{,}0 \times 10^{-5}$/ºC e $\bar{\beta}_{líquido} = 4 \times 10^{-5}$/ºC. *Resposta:* Crescerá em 0,10 mm.

37. Um cilindro maciço de alumínio é suspenso por meio de uma cinta de aço flexível presa nas extremidades em dois pontos situados no mesmo nível, conforme indicado na Fig. 21-10. Desejamos que o eixo C do cilindro não sofra nenhum deslocamento com as contrações ou expansões térmicas do cilindro e da cinta. O ângulo $\theta = 50º$ praticamente não é afetado por variações de temperatura. Calcule o raio R do cilindro quando $T = 290$ K, sendo $L = 2{,}5$ m a esta temperatura. Despreze o peso da cinta.

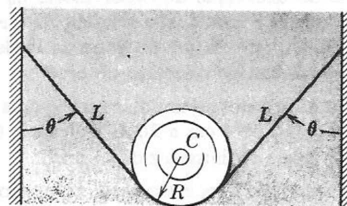


figura 21-10

38. Dois tubos verticais de vidro contêm um líquido e estão ligados, pelas extremidades inferiores, por um tubo capilar horizontal. Um dos tubos verticais encontra-se em um banho que contém gelo e água em equilíbrio (0,0ºC) e o outro está em um banho de água quente (t). A diferença entre as alturas das colunas líquidas nos dois tubos é Δh; h_0 é a altura da coluna a 0,0ºC. (*a*) Mostrar como este aparelho (Fig. 21-11) usado originalmente por Doulong e Petit em 1816, pode ser utilizado para medir o verdadeiro coeficiente de dilatação β de um líquido (e não a dilatação diferencial entre ele o vidro). (*b*) Determinar β sabendo que, a $t = 16{,}0$ºC, tem-se $h_0 = 126$ cm e $\Delta h = 1{,}50$ cm. *Resposta:* (*b*) $7{,}44 \times 10^{-4}$/ºC.

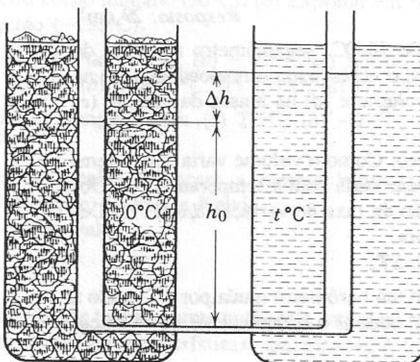


figura 21-11

39. Um cubo de alumínio, com aresta igual a 20 cm flutua em mercúrio. De quanto o bloco imergirá quando a temperatura aumentar a 270 K para 370 K? (O coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é $1{,}8 \times 10^{-4}$/°C).

40. O volume de um sistema é dado em função da temperatura pela fórmula:

$$V = V_0 \exp(3 \times 10^{-3} T)$$

Determine o coeficiente de dilatação volumétrica deste sistema.
Resposta: $\beta = 3 \times 10^{-3}\ K^{-1}$.

41. Um tubo de vidro quase completamente cheio de mercúrio é ligado à extremidade inferior da haste de ferro de um pêndulo, de 100 cm de comprimento. Que altura deve ter a coluna de mercúrio, no tubo de vidro, para que o centro de massa desse pêndulo não suba nem desça com as variações de temperatura? As áreas das seções transversas da haste de ferro e do tubo são iguais. Despreze a massa do vidro. O ferro tem densidade igual a $7{,}87 \times 10^3$ kg/m^3 e seu coeficiente de dilatação volumétrica é igual a 12×10^{-6}/°C. O coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é igual a 18×10^{-5}/°C. A densidade do mercúrio é igual a 13,6 g/cm^3 e o coeficiente de dilatação linear do vidro é igual a $1{,}0 \times 10^{-5}$/°C.

22
calor e primeira lei da termodinâmica

22-1 *CALOR, UMA FORMA DE ENERGIA*

Quando dois sistemas a temperaturas diferentes são colocados em contato, a temperatura atingida por ambos está compreendida entre as temperaturas iniciais. Estes fenômenos são observados freqüentemente e o homem, há muito tempo, tem procurado entendê-los de maneira profunda. Até o início do século XIX, estes fenômenos eram explicados afirmando-se que todos os corpos possuíam uma substância material chamada *calórico*. Acreditava-se que um corpo a uma temperatura mais alta possuía mais calórico do que outro a uma temperatura mais baixa. Quando os dois corpos eram colocados em contato, o corpo rico em calórico cedia parte desta substância ao outro, até que ambos atingissem a mesma temperatura. A teoria do calórico foi capaz de descrever de maneira satisfatória muitos processos, tais como a condução de calor ou a mistura de substâncias em um calorímetro. Entretanto, o conceito de calor como *substância*, cuja quantidade total permanecia constante, não sobreviveu aos fatos experimentais. No entanto, ainda descrevemos muitas das variações comuns de temperatura como a transferência de "algo" de um corpo a uma temperatura mais alta para outro a uma temperatura mais baixa, e a este "algo" damos o nome de calor. Uma definição útil, mas não-operacional é a seguinte: *calor é o que é transferido entre um sistema e sua vizinhança, como conseqüência apenas da diferença de temperatura.*

Finalmente, ficou estabelecido que, de um modo geral, o calor é uma forma de energia ao invés de uma substância. A primeira evidência conclusiva de que o calor não poderia ser uma substância foi apresentada por Benjamin Thompson (1753-1814), americano

que, posteriormente, tornou-se o Conde Rumford da Baviera. Em 1798, ele apresentou um trabalho à Sociedade Real[1] onde se lê:

Eu... estou convencido de que o hábito de manter os olhos abertos a tudo que se passa no curso dos acontecimentos cotidianos tem freqüentemente levado, por acaso ou através das divagações caprichosas da imaginação... a dúvidas úteis e consideráveis esquemas de investigação e aprimoramento, mais do que todas as mais intensas meditações dos filósofos, nas horas estritamente reservadas para o estudo. Foi por acaso que fui levado a realizar as experiências que relatarei.

Rumford realizou sua descoberta quando supervisionava as operações de vazamento de tubos de canhões para o governo bávaro. Para evitar o aquecimento excessivo, o orifício do canhão era mantido cheio de água, a qual era reabastecida à medida que se evaporava durante o processo de perfuração. Aceitava-se que tinha de ser fornecido calórico à água para fervê-la. A produção contínua de calórico era explicada considerando que, quando uma substância era finamente subdividida, como ocorria no processo da perfuração, sua capacidade de reter calórico tornava-se menor e, portanto, o calórico liberado desse modo fazia a água ferver. Rumford observou experimentalmente, no entanto, que a água fervia mesmo depois que as ferramentas tinham perdido o corte e não eram mais capazes de perfurar ou subdividir o metal do canhão.

Após excluir, através de experiências, todas as possíveis interpretações baseadas no calórico, ele relatou:

... raciocinando sobre este assunto, não devemos esquecer de considerar a mais notável das circunstâncias, isto é, o fato de que a fonte de Calor gerado pelo atrito nessas experiências parecia ser, de maneira evidente, inexaurível... parece-me extremamente difícil, se não quase que impossível, formar uma idéia clara de alguma coisa capaz de ser excitada e transmitida como havia acontecido com o Calor nessas experiências, exceto se fosse movimento.

Aqui temos o germe da idéia de que o trabalho mecânico realizado no processo de perfuração era o responsável pela criação do calor. Esta idéia só ficou claramente estabelecida por outros, muito mais tarde. Ao invés de pensar no desaparecimento da energia mecânica e na contínua criação de calor, sem que nenhum deles obedeça a qualquer princípio de conservação, consideram-se atualmente estes processos como uma transformação de uma forma de energia em outra, sendo a energia total conservada.

Embora o conceito de energia e sua conservação nos pareçam evidentes hoje, somente por volta de 1850 é que surge como idéia nova, tendo passado despercebida a Galileu e Newton. Através da subseqüente história da Física, encontramos novas descobertas baseadas na idéia de conservação e o início desta história é notável sob diversos aspectos. Vários pensadores chegaram a este importante princípio quase ao mesmo tempo, mas, inicialmente, todos eles foram recebidos com frieza ou ignorados. O princípio da conservação da energia foi independentemente estabelecido por Julius von Mayer (1814-1878) na Alemanha, James Joule (1818-1889) na Inglaterra, Hermann von Helmholtz (1821-1894) na Alemanha, e L. A. Colding (1815-1888) na Dinamarca.[2]

[1] Rumford (americano) foi o fundador da Instituição Real de Londres. Por outro lado, a Instituição Smithsoniana de Washington deve sua origem a um inglês, James Smithson (1765-1829).

[2] A publicação póstuma das *Reflexões sobre a Potência Motriz do Fogo*, (1872) do engenheiro francês Sadi Carnot (1796-1832) revelou claramente que ele havia chegado ao princípio da conservação da energia antes de todos os outros. Talvez seja interessante para o aluno saber que os cinco homens que primeiramente estabeleceram o princípio de conservação da energia eram todos jovens e profissionais que não trabalhavam em Física, quando realizaram suas contribuições. Mayer era médico e tinha 28 anos; Helmholtz era fisiologista, 32 anos; Colding, engenheiro, 27 anos; Joule, industrial, 25 anos e Carnot, engenheiro, 34 anos. Comparativamente, Rumford era velho, 45 anos.

Joule mostrou experimentalmente que, na conversão de energia mecânica em calor, à mesma quantidade de energia mecânica correspondia sempre a mesma quantidade de calor. Assim, estabeleceu-se definitivamente a equivalência entre trabalho mecânico e calor como duas formas de energia.

Helmholtz foi quem primeiro tornou clara a idéia de que não só o calor e a energia mecânica, mas todas as formas de energia são equivalentes, e que uma delas não pode desaparecer sem que a mesma quantidade apareça sob alguma outra forma.

22-2 *QUANTIDADE DE CALOR E CALOR ESPECÍFICO*

Define-se[3] quantitativamente a unidade de calor Q em termos de variação de uma das grandezas de um corpo durante um processo específico. Por exemplo, se, ao aquecermos um quilograma de água, sua temperatura varia de 14,5°C para 15,5°C, dizemos que o sistema recebeu uma *quilocaloria* (kcal) de calor. Usa-se também a unidade de *caloria* ($= 10^{-3}$ kcal). (Observe-se, de passagem, que a *caloria* usada para medir a energia contida nos alimentos é realmente igual à unidade quilocaloria.) No sistema inglês de unidades, o calor é medido na *unidade térmica britânica* (Btu), a qual é definida como o calor necessário para elevar a temperatura de uma libra-massa de água de 63°F para 64°F.

Especificamos as temperaturas de referência porque, proximo à temperatura ambiente, a quantidade de calor necessária para elevar de um grau a temperatura de um corpo depende ligeiramente do intervalo escolhido. Para fins práticos não consideraremos estas pequenas variações. As unidades de calor relacionam-se como segue:

$$1{,}000 \text{ kcal} = 1.000 \text{ cal} = 3{,}968 \text{ Btu}.$$

Para uma dada massa, a quantidade de calor necessária para produzir um determinado acréscimo de temperatura depende da substância. Chama-se *capacidade térmica*, C, de um corpo o quociente entre a quantidade de calor, dQ, fornecida ao corpo e o correspondente acréscimo de temperatura, dT:

$$C = \text{capacidade térmica} = \frac{dQ}{dT}.$$

A palavra "capacidade" não deve ser interpretada como "a quantidade de calor que um corpo pode reter", uma vez que ela significa, simplesmente, o calor fornecido a um corpo para elevar de uma unidade sua temperatura.

A capacidade térmica por unidade de massa de um corpo, denominada *calor específico*, depende da natureza da substância da qual ele é feito e é definido como o quociente entre sua capacidade térmica e sua massa:

$$c = \frac{\text{capacidade térmica}}{\text{massa}} = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}. \tag{22-1}$$

[3] Veremos na Seç. 22-5 como é definida atualmente a caloria.

Pode-se falar, apropriadamente, por um lado, da capacidade térmica de uma moeda de cobre e, por outro lado, do calor específico do cobre.

Nem a capacidade térmica de um corpo nem o calor específico de um material são constantes. Eles dependem do intervalo de temperatura considerado. As equações anteriores dão somente os valores médios para estas grandezas no intervalo de temperatura ΔT. No limite, quando $\Delta T \to 0$, podemos falar de calor específico a uma determinada temperatura T.

O calor que deve ser transferido a um corpo de massa m, cujo material tem um calor específico c, para elevar sua temperatura desde T_i até T_f é, supondo que $\Delta T << T_f - T_i$,

$$Q = \sum_{T_i}^{T_f} mc\Delta T. \tag{22-2}$$

No limite temos

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c\,dT \tag{22-3}$$

onde c é uma função da temperatura. Para temperaturas usuais e para intervalos de temperatura usuais, os calores específicos podem ser considerados como constantes. A Fig. 22-1 mostra a variação no calor específico da água com a temperatura. Informação deste tipo é obtida pela utilização de uma bobina de aquecimento elétrico para fornecer calor a uma taxa que pode ser determinada precisamente. Observamos do gráfico que o calor específico da água varia menos que 1% de seu valor de 1,000 cal/g°C a 15°C.

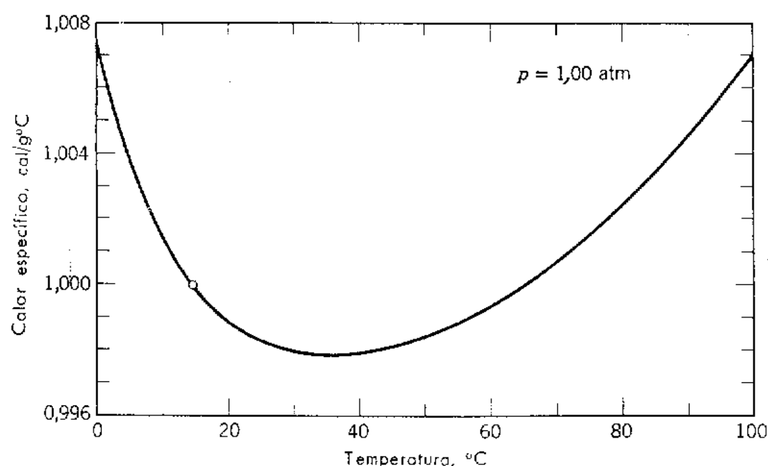


figura 22-1
Variação, com a temperatura, do calor específico da água à pressão constante de 1,00 atm. O círculo correspondente a 15°C sugere a definição da unidade caloria.

A Eq. 22-1 não define calor específico completamente. Devemos especificar as condições segundo as quais o calor ΔQ é transferido para o sistema. Temos usado implicitamente a condição e que o sistema permaneça na pressão atmosférica normal (constante) enquanto se transfere o calor. Esta é uma condição usual, porém outras possibilidades existem, cada uma delas, conduzindo, em geral, a um valor diferente de c. Para se obter um valor único

para c devemos especificar as condições, tais como calor específico a pressão constante c_p, calor específico a volume constante c_v, etc.

Tabela 22-1

Valores para c_p para alguns sólidos (a temperatura ambiente e para $p = 1{,}0$ atm)

Substância	Calor Específico cal/g°C	Calor Específico J/g°C	Peso Molecular g/mol	Capacidade Térmica molar cal/mol°C	Capacidade Térmica molar J/mol°C
Alumínio	0,215	0,900	27,0	5,82	24,4
Carbono	0,121	0,507	12,0	1,46	6,11
Cobre	0,0923	0,386	63,5	5,85	24,5
Chumbo	0,0305	0,128	207	6,32	26,5
Prata	0,0564	0,236	108	6,09	25,5
Tungstênio	0,0321	0,134	184	5,92	24,8

A Tab. 22-1 (segunda e terceira colunas) mostra os calores específicos a pressão constante de alguns elementos sólidos; discutiremos mais tarde os calores específicos dos gases. Você deve concluir do modo como a caloria e o Btu foram definidos que 1 cal/g°C = = 1 kcal/kg°C = 1 Btu/lb°F, exatamente. Notar que o calor específica da água, igual a 1,00 cal/g°C é grande comparado com o da maior parte das substâncias.

EXEMPLO 1

Um bloco de cobre, tendo 75 g de massa, é tirado de um forno e mergulhado num recipiente de 300 g de massa que contém 200 g de água. A temperatura da água varia de 12°C para 27°C. Qual é a temperatura do forno?

Este é um exemplo de dois sistemas que originalmente estão a temperaturas diferentes e atingem o equilíbrio térmico após entrarem em contato; nenhuma energia mecânica é envolvida, havendo apenas troca de calor.

Portanto, calor cedido pelo cobre = calor recebido por (recipiente + água),

$$m_C C_C (T_C - T_e) = (m_r C_r + m_A C_A)(T_e - T_A).$$

Os índices C, r e A caracterizam respectivamente, o cobre, o recipiente e a água. T_C é a temperatura inicial do cobre, T_A é a temperatura inicial do recipiente e da água, T_e é a temperatura final de equilíbrio. Substituindo os dados numéricos $C_C = 0{,}093$ cal/g°C, $C_r = 0{,}12$ cal/g°C e $C_A = 1{,}0$ cal/g°C, temos

$$75\,\text{g} \times 0{,}093\,\text{cal/g°C} \times (T_C - 27°\text{C}) =$$
$$300\,\text{g} \times 0{,}12\,\text{cal/g°C} + 200\,\text{g} \times 1{,}0\,\text{cal/g°C} \times (27°\text{C} - 12°\text{C});$$

resolvendo para T_C, $T_C = 530$°C.

Que aproximações, experimentais e teóricas, foram implicitamente usadas na solução do problema?

22-3 *CAPACIDADE TÉRMICA MOLAR DOS SÓLIDOS*

O calor específico dos sólidos varia grandemente de uma substância para outra, como ilustra, por exemplo, a 2.ª coluna da Tab. 22-1. Entretanto, uma situação completamente diferente ocorre se compararmos amostras de substâncias que contêm o mesmo número de moléculas em vez de amostras de mesma massa. Para isto, é usual expressar o calor específico em cal/mol°C ao invés de cal/g°C e, neste caso, a grandeza passa a ser denominada *capacidade térmica*

molar[4] ou *calor específico molar*. Em 1819 Dulong e Petit mostraram que a capacidade térmica molar de todas as substâncias, com algumas exceções (veja o carbono na Tab. 22-1), tem valor próximo de 6 cal/mol°C. A capacidade térmica molar, apresentada na 5.ª e 6.ª colunas da Tab. 22-1 é calculada multiplicando o calor específico (2.ª e 3.ª colunas) pelo peso molecular (4.ª coluna). Observa-se que a quantidade de calor *por molécula*, necessária para produzir determinada variação da temperatura de um sólido, parece ser aproximadamente a mesma para quase a totalidade das substâncias. Isto é uma evidência importante para a teoria molecular da matéria.

Realmente, a capacidade térmica molar varia com a temperatura, tendendo para zero quando $T \to 0\,K$ e aproxima-se do valor de Dulong e Petit quando $T \to \infty$. Desde que o mais importante na determinação do calor necessário para produzir determinada variação na temperatura de um corpo é o número e não o tipo de moléculas, é de esperar que a capacidade térmica molar das diferentes substâncias deve variar com a temperatura do mesmo modo. A Fig. 22-2 mostra que as capacidades térmicas molares de várias substâncias situam-se na mesma curva, se ajustarmos empiricamente a escala de temperatura. No eixo horizontal dessa figura estão representados os valores do quociente T/T_D, onde T é a temperatura na escala Kelvin, e T_D é uma temperatura característica, chamada *Temperatura de Debye*, que tem um valor particular constante para cada substância. Experimentalmente, sabe-se que $T_D = 88\,K$ para o chumbo e $T_D = 1.860\,K$ para o carbono. Para $T/T_D = 0{,}600$ obtém-se $T = 53\,K$ para o chumbo e $T = 1.120\,K$ para o carbono. Por outro lado, à temperatura ambiente (300 K), corresponde $T/T_D = 3{,}4$ para o chumbo e $T/T_D = 0{,}16$ para o carbono. Os valores de T/T_D para o chumbo e o carbono e a Fig. 22-2 permitem compreender por que, na época em que eram conhecidos apenas os valores da capacidade térmica molar à temperatura ambiente, o chumbo obedecia à regra de Dulong e Petit e o carbono parecia ser uma exceção.

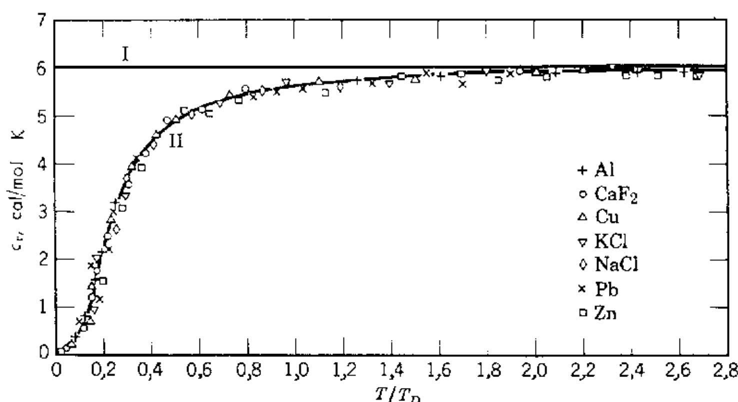


figura 22-2
Capacidades térmicas molares (C_v); mostram-se apenas alguns pontos selecionados. A reta I representa a regra de Dulong e Petit e a curva II representa a teoria de Debye.

A reta I da Fig. 22-2 corresponde ao valor obtido por Dulong e Petit em 1819, o qual concorda com os resultados experimentais para altas temperaturas, mas falha para as baixas. Isto está de acordo com a hipótese de que cada átomo de um sólido vibra independentemente como um oscilador clássico. A curva II é conseqüência da teoria de Debye (1912), em que a temperatura característica T_D está diretamente relacionada com uma freqüência de vibração característica da substância, e pode pode ser obtida independentemente das experiências de calor especifico. Podem ser usados os princípios quânticos para analisar as vibrações acopladas dos átomos de um sólido e obter uma expressão para o calor específico, a qual, em termos do

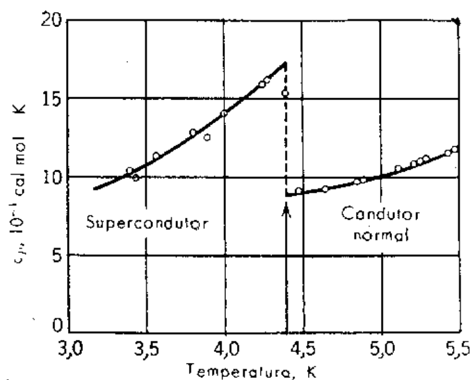


figura 22-3
Capacidade térmica molar do tântalo, nas vizinhanças de sua temperatura de transição para a supercondutividade.

[4] Um *mol* de qualquer substância é a massa da referida substância que contém um número determinado de moléculas, ou seja $6{,}02252 \times 10^{23}$, chamado *número de Avogadro*. Este número é uma conseqüência da definição de que um mol de carbono (isótopo C^{12}) deve ter exatamente 12 gramas. A *massa molecular M* de uma substância é uma grandeza sem dimensão e fornece o número de gramas por mol da substância. Assim, a massa molecular do oxigênio é 32,0 g/mol. Embora o mol seja uma unidade de massa, não podemos transformá-lo em outras unidades de massa, em gramas por exemplo, a menos que conheçamos de que entidade elementar se trata, podendo ser átomos, moléculas, íons, elétrons, outras partículas, ou grupos específicos de partículas.

quociente T/T_D, é a mesma para todas as substâncias. O excelente acordo entre esta expressão e os resultados experimentais (curva II) constitui um dos triunfos da Física quântica.[5]

As substâncias mencionadas na Fig. 22-2 são chamadas "normais", no sentido de que, na região de temperaturas considerada, elas não se fundem, vaporizam, mudam sua estrutura cristalina etc. A medida do calor específico nos informa como os sólidos absorvem energia ao serem aquecidos e proporciona um método sensível de detectar os rearranjos moleculares, atômicos ou eletrônicos. Por exemplo, a Fig. 22-3 ilustra o comportamento da capacidade térmica molar do tântalo, nas vizinhanças de 4,39 K. Abaixo desta temperatura de transição o tântalo perde sua resistência elétrica e torna-se supercondutor. Acima de 4,39 K o tântalo apresenta a mesma resistência elétrica dos metais normais.

22-4 *CONDUÇÃO DO CALOR*

Chama-se *condução do calor* a transferência de energia entre partes adjacentes de um corpo, em conseqüência da diferença entre suas temperaturas. Consideremos uma lâmina de certa substância, cuja seção reta tem área A. Seja Δx a sua espessura; suponhamos que as faces da lâmina sejam mantidas a temperaturas diferentes e que desejamos medir a quantidade de calor ΔQ que se transmite perpendicularmente às faces, durante o intervalo de tempo Δt. Os resultados experimentais mostram que ΔQ é diretamente proporcional a Δt e A, para uma dada diferença de temperatura ΔT. A experiência também mostra que, se ΔT e Δx forem pequenos, então ΔQ será diretamente proporcional a $\Delta T/\Delta x$ para Δt e A constantes. Portanto,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \propto A\frac{\Delta T}{\Delta x} \text{ aproximadamente.} \qquad (22\text{-}4a)$$

No limite, se a lâmina tiver espessura infinitesimal dx, através da qual existe uma diferença de temperatura dT, temos a lei fundamental da condução de calor

$$H = -kA\frac{dT}{dx}. \qquad (22\text{-}4b)$$

Nesta expressão, H (medido, digamos um cal/s, ver Eq. 22-4*a*) é a taxa de transferência de calor com o tempo, através da área A; dT/dx é denominado *gradiente de temperatura* e k é uma constante de proporcionalidade chamada *condutividade térmica*. O sentido de transmissão do calor é escolhido como o sentido positivo de Ox; o sinal negativo na Eq. 22-4 foi introduzido tendo em vista o fato de que o calor se transmite da temperatura mais alta para a mais baixa. Em outras palavras, desejamos que H seja positivo quando dT/dx é negativo.

Uma substância com grande condutividade térmica k é bom condutor de calor; outra cuja condutividade térmica seja pequena é um mau condutor de calor ou bom isolante térmico. Os valores de k dependem da temperatura considerada e aumentam ligeiramente quando a temperatura aumenta. No entanto, k pode ser considerado constante para as substâncias cujas partes apresentam pequena diferença de temperatura. A Tab. 22-2 fornece os valores de k para várias substâncias. Note-se que o grupo dos metais é melhor condutor do que o dos não-metais e que os gases são maus condutores de calor.

---

[5] Na Fig. 22-2 usaram-se valores de c_v e na Tab. 22-1 valores de c_p. Os primeiros são mais fáceis de calcular teoricamente, porque a dilatação térmica não precisa ser levada em conta. Por outro lado, c_v é mais fácil de medir (para os sólidos). Ambos estão relacionados pela expressão termodinâmica

$$c_p = v_v + T\beta^2/\kappa\rho;$$

β é o coeficiente de expansão volumétrica, $\kappa\,(= -\Delta V/V\Delta p)$, é a compressibilidade (isotérmica) e ρ é a densidade: à temperatura ambiente, c_p e c_v diferem, para sólidos típicos, de aproximadamente 50%.

Tabela 22-2

Condutividades Térmicas, kcal/s. m.°C (gases 0°C, demais à temperatura ambiente)

Metais		Hidrogênio	$3{,}3 \times 10^{-5}$
Alumínio	$4{,}9 \times 10^{-2}$	Oxigênio	$5{,}6 \times 10^{-6}$
Latão	$2{,}6 \times 10^{-2}$	Outros	
Cobre	$9{,}2 \times 10^{-2}$	Amianto	2×10^{-5}
Chumbo	$8{,}3 \times 10^{-3}$	Concreto	2×10^{-4}
Prata	$9{,}9 \times 10^{-2}$	Cortiça	4×10^{-5}
Aço	$1{,}1 \times 10^{-2}$	Vidro	2×10^{-4}
Gases		Gelo	4×10^{-4}
Ar	$5{,}7 \times 10^{-6}$	Madeira	2×10^{-5}

Analisemos a Eq. 22-4*b* no caso de uma barra de comprimento L e seção reta constante, cuja área seja A, após ela ter atingido o estado estacionário (Fig. 22-4), que se caracteriza pelo fato de que em cada ponto da barra a temperatura não varia com o tempo. Portanto, H é sempre o mesmo para todas as seções retas. (Por quê?) Como $H = -kA\,dT/dx$, segue-se que dT/dx é o mesmo em todas as seções retas, para k e A constantes. Assim, T decresce linearmente ao longo da barra e $-dT/dx = (T_2 - T_1)/L$. Portanto, o calor ΔQ transferido no intervalo de tempo Δt será dado por:

$$H = kA \cdot \frac{T_2 - T_1}{L}. \qquad (22\text{-}5)$$

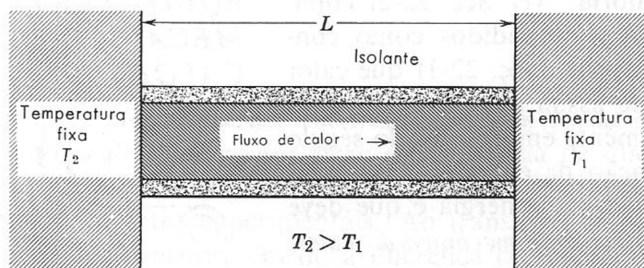


figura 22-4
Condução do calor através de uma barra condutora isolada.

O fenômeno da condução de calor ilustra nitidamente que os conceitos de calor e temperatura são diferentes. Por exemplo, barras diferentes podem conduzir quantidades de calor inteiramente diferentes no mesmo intervalo de tempo, não obstante apresentarem a mesma diferença de temperatura nos seus extremos.

EXEMPLO 2

Consideremos uma lâmina formada de duas substâncias, de espessuras L_1 e L_2 e condutividades térmicas k_1 e k_2, respectivamente. Se as temperaturas das faces externas são T_2 e T_1, determinar a taxa com que o calor é transmitido através da lâmina composta (Fig. 22-5), em regime estacionário.

Seja T_x a temperatura na superfície de separação das suas substâncias. Então,

$$H_2 = k_2 \frac{A(T_2 - T_x)}{L_2}$$

e

$$H_1 = k_1 \frac{A(T_x - T_1)}{L_1}$$

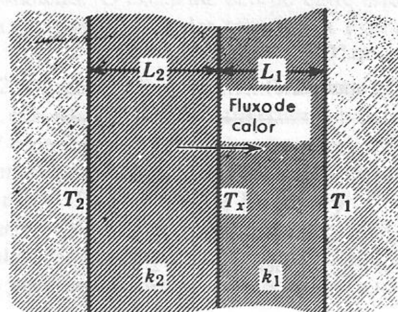


figura 22-5
Exemplo 2. Condução de calor através de duas camadas de condutividades diferentes.

No regime estacionário, $H_2 = H_1 = H$ e temos:

$$k_2 A \frac{(T_2 - T_x)}{L_2} = k_1 A \frac{(T_x - T_1)}{L_1}.$$

Resolvendo para T_x e substituindo em uma das equações encontramos

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)}$$

A extensão para uma série de N camadas adjacentes é, obviamente, dada por

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\sum_{i=1}^{N} (L_i/k_i)}.$$

22-5 *EQUIVALENTE MECÂNICO DO CALOR*

Vimos que Joule (Seç. 7-2) foi desenvolvido como uma unidade de trabalho e kcal (juntamente com a caloria; ver Seç. 22-2) como unidade de calor. Calor e trabalho foram entendidos como conceitos distintos até Rumford, em 1798, sugerir (Seç. 22-1) que calor tinha uma conotação mecânica, propondo assim uma conexão entre eles. Esta conexão foi estabelecida firmemente em meados do século dezenove como o princípio de conservação de energia. Este princípio estabelece calor e trabalho são formas de energia e que deve haver uma relação definida, chamada *equivalente mecânico do calor*, entre elas. Foi Joule em 1850 quem primeiro determinou experimentalmente quantos joules de trabalho são equivalentes a uma caloria de calor.

Joule usou uma montagem experimental na qual pesos em queda faziam com que um conjunto de pás girasse num recipiente isolado contendo água (Fig. 22-6). Em um ciclo de operação dos pesos em queda há a realização de um trabalho conhecido sobre a água, de massa m, e notamos que a temperatura se eleva de ΔT. Poderíamos agora transferir energia sob a forma de calor Q para o sistema e ocasionar a mesma elevação de temperatura. Isto valeria

$$Q = mc\,\Delta T.$$

Portanto, medimos W, observamos ΔT, e calculamos Q. Os resultados[6] são

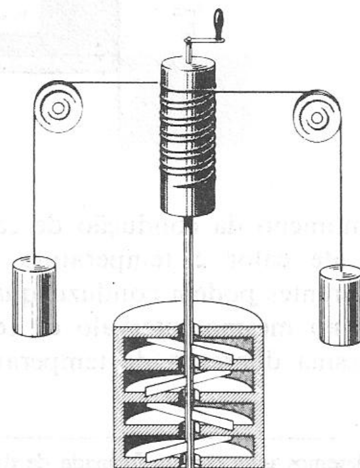


figura 22-6
Montagem de Joule para medir o equivalente mecânico do calor. Os corpos que caem giram as paletas, as quais agitam a água do recipiente, causando a elevação da temperatura.

---

[6] Em 1879, Henry A. Rowland realizou uma cuidadosa determinação do equivalente mecânico do calor, a qual, até hoje, constitui um modelo de cuidadosa experimentação. Seus resultados diferem dos valores atualmente aceitos de apenas 1 parte em 2.000. Em 1870, Rowland graduou-se pelo Instituto Politécnico Rensselaer e, em 1876 tornou-se o primeiro professor de Física na então recentemente fundada Universidade Johns Hopkins, onde realizou suas experiências. Vide "The Education of an American Scientist, Henry A. Rowland", por Samuel Rezneck, *American Journal of Physics*, fevereiro de 1960 e "Rowland's Physics" por John D. Miller, *Physics Today*, julho, 1976.

$$1 \text{ kcal} = 1.000 \text{ cal} = 4.186 \text{ joules},$$

isto é, 4.186 joules de trabalho mecânico, quando inteiramente convertidos em energia calorífica, geração 1 kcal; isto é, aumentarão a temperatura de um quilograma de água de 14,5°C para 15,5°C. Em unidades do sistema técnico inglês temos

$$1 \text{ Btu} = 252 \text{ cal} = 777{,}9 \text{ pés-libras.}$$

A unidade SI de energia conveniente é o Joule ($= 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$). Em prática moderna de laboratório a caloria não é mais usada ou necessária. Está, todavia, profundamente difundida na literatura científica. A fim de permitir o uso continuado desta unidade familiar — mas reconhecendo a importância prática do Joule — uma nova caloria, a *caloria termoquímica*, é definida como

$$1 \text{ caloria (termoquímica)} = 4{,}184 \text{ joules (exatamente).}$$

Na prática usual de laboratório esta caloria não difere significantemente da anteriormente definida.

Joule ainda fez outras experiências (agitando mercúrio, forçando água através de tubos estreitos, atritando anéis de ferro num banho de mercúrio, etc.). Suas conclusões são dignas de nota pela (1) habilidade e ingenuidade que ele mostrou, (2) pela precisão de seus resultados finais, que somente diferem de cerca de 1 % dos valores atuais e (3) a influência que elas tinham em convencer os cientistas da correção do conceito de que calor, como trabalho, é uma forma de energia.

22-6 *CALOR E TRABALHO*

Mencionamos que *calor é energia em trânsito de um corpo a outro, devido a diferença de temperatura entre eles.* A idéia de que calor é algo que existe *num* corpo, como considerava a teoria do calórico, contraria muitos fatos experimentais. Ao transmitir-se de um corpo a outro, exclusivamente, devido à diferença de temperaturas entre eles, é que a energia recebe a denominação de energia térmica. Se o calor fosse uma substância, ou um tipo de energia que mantivesse sua identidade enquanto fosse contida no sistema, não seria possível retirar calor indefinidamente deste, sem alterá-lo. No entanto, Rumford mostrou que isso era possível. De fato, realizando continuamente trabalho mecânico com o aparelho de Joule, podemos retirar da água uma quantidade indefinida de calor, por exemplo, ligando-a a um sistema mais frio, sem alterar as condições dela.

Analogamente, o trabalho não é algo que um sistema contenha em quantidade definida; pode-se fornecer uma quantidade indefinida de trabalho a um sistema, como ilustra o aparelho de Joule. O trabalho, como o calor, implica em transferência de energia. Em mecânica, o trabalho está relacionado com transferências de energia em que a temperatura não esteja envolvida. Se o calor é energia transferida como conseqüência da diferença de temperaturas, podemos distinguir entre calor e trabalho definido este último como *a energia que é transferida de um sistema para outro de modo tal que a diferença de temperaturas não esteja diretamente envolvida.* Esta definição é consistente com a que foi introduzida anteriormente,

isto é, $dW = F\ dx$, na qual a força F pode ser de natureza elétrica, magnética, gravitacional etc. O termo trabalho inclui todos os processos que envolvem transferência de energia, mas exclui especificamente aqueles em que a transferência de energia seja devida a diferença de temperatura.

Consideremos um outro exemplo simples: duas superfícies são atritadas entre si. Não há limite para a quantidade de calor que pode ser removida deste sistema ou ao trabalho que pode ser fornecido a ele; assim sendo, não têm sentido afirmações tais como "o calor no sistema" ou "o trabalho no sistema". As grandezas Q e W não são características do *estado* (de equilíbrio) do sistema, mas sim dos *processos termodinâmicos* (ou *transformações* termodinâmicas) pelos quais o sistema passa de um estado de equilíbrio para outro, quando interage com sua vizinhança. Somente durante tais processos é que os conceitos de calor e trabalho têm significado; pode-se então identificar Q com o calor transferido para um sistema, ou retirado dele, e W com o trabalho realizado sobre o sistema ou pelo sistema. O estudo de tais processos e das variações de energia envolvidas na realização de trabalho e na transmissão de calor constituem objeto da *Termodinâmica*.

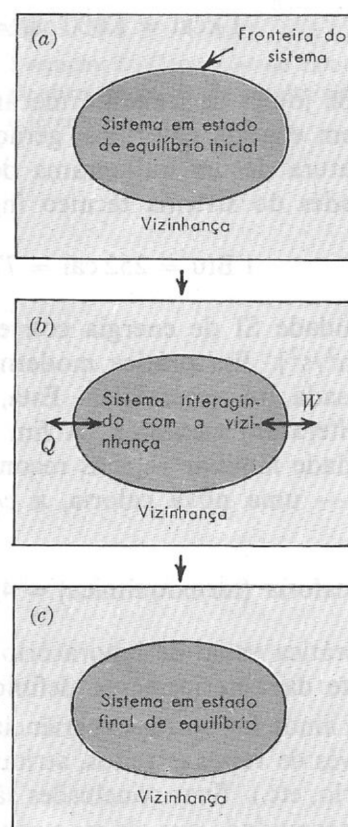


figura 22-7
(*a*) Sistema num estado inicial, em equilíbrio com sua vizinhança.
(*b*) Processo termodinâmico durante o qual o sistema pode trocar calor Q ou trabalho W com sua vizinhança.
(*c*) Estado final de equilíbrio atingido como conseqüência do processo.

A Fig. 22-7 ilustra um processo termodinâmico geral. Devemos inicialmente caracterizar de maneira clara o sistema e a vizinhança. A superfície fechada da figura define o sistema, separando-o da vizinhança. Em (*a*) o sistema acha-se no *estado inicial*, em equilíbrio com a vizinhança externa a ele. Em (*b*) o sistema interage com sua vizinhança, através de algum *processo termodinâmico* específico, durante o qual a energia, na forma de calor e (ou) trabalho, pode entrar no sistema ou sair dele. As setas que atravessam a curva que delimita o sistema representam o trabalho e (ou) o calor cedido ao sistema ou dele retirados. Em (*c*) o sistema atingiu seu *estado final*, novamente em equilíbrio com a vizinhança externa a ele.

A Fig. 22-8 ilustra um corpo em queda que move um gerador; este, por sua vez, estabelece uma corrente elétrica através de um resistor imerso em um recipiente com água. Consideremos como sistema o gerador, o circuito elétrico a ele ligado, a água e seu recipiente. A vizinhança será portanto o corpo e a Terra, que atrai o corpo. O processo consiste na queda do corpo de uma altura h, sob a ação do campo gravitacional terrestre. Durante este processo a vizinhança, por intermédio das cordas, realiza um trabalho sobre o sistema, e, desde que não há diferença de temperatura entre o sistema e a vizinhança, $Q = 0$.

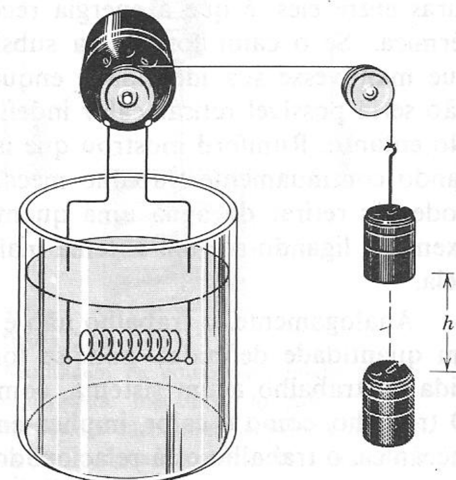


figura 22-8
Calor e Trabalho. Um corpo em queda realiza trabalho sobre um gerador elétrico, que produz uma corrente através do resistor e aquece a água onde ele se acha imerso.

A escolha do sistema nos problemas de termodinâmica é arbitrária. Consideremos como sistema apenas a água e seu recipiente (Fig. 22-8). Neste caso a vizinhança será o gerador, o circuito elétrico a ele ligado, o corpo e a Terra. Para esta escolha, agora existe uma diferença de temperatura entre o sistema (água) e a vizinhança (resistor) e o calor se transmitirá para o sistema durante o processo. Por outro lado, como nenhuma das forças que atuam no sistema é capaz de provocar deslocamento, $W = 0$. Este exemplo mostra a importância de definir claramente o que é sistema e o que é vizinhança, antes de decidir se a mudança do estado do sistema é devida à transferência de calor ou à realização de trabalho, ou a ambos. Haverá troca de calor entre um sistema e sua vizinhança apenas quando existir diferença de temperatura através da superfície que

define o sistema; caso contrário, a energia trocada implicará na realização de trabalho.

Calculemos agora Q e W para um processo termodinâmico específico. Consideremos um gás contido em um recipiente cilíndrico provido de um êmbolo móvel. Inicialmente, o sistema (gás) está em equilíbrio com sua vizinhança (composto de fonte térmica e êmbolo) e tem pressão p_i e volume V_i. Podemos considerar as paredes do recipiente como sendo as fronteiras do sistema. O calor pode entrar no sistema ou sair dele, através da base do cilindro e o trabalho pode ser realizado sobre o sistema ou por ele, comprimindo-se o gás ou permitindo que ele se dilate, respectivamente, através do êmbolo. Consideremos um processo pelo qual o sistema interage com sua vizinhança e alcança um estado final de equilíbrio caracterizado pela pressão p_f e pelo volume V_f.

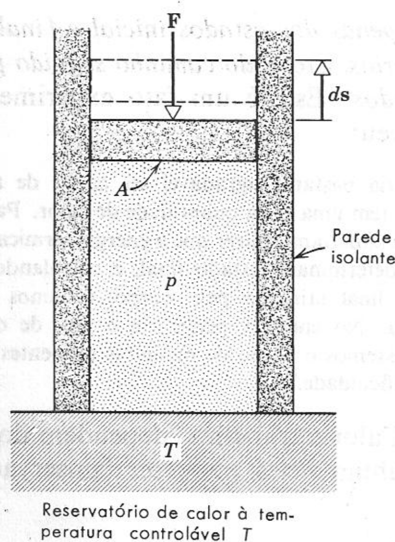


figura 22-9
O gás que se expande à pressão p realiza trabalho contra o êmbolo. O sistema, apoiado no reservatório térmico, pode ganhar ou perder calor.

A Fig. 22-9 ilustra o gás em expansão. Para este processo, o trabalho realizado pelo gás durante um deslocamento infinitesimal ds do êmbolo é

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = pA\,ds = pdV,$$

onde dV é a variação diferencial do volume do gás. Em geral, a pressão não permanece constante durante o deslocamento e, portanto, para calcular o trabalho realizado pelo gás em um deslocamento finito, devemos saber como p varia com o deslocamento e calcular a integral

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV,$$

estendida a todo o volume do gás. Esta integral pode ser calculada graficamente como a área abaixo da curva representada no diagrama p–V, como no caso particular ilustrado na Fig. 22-10.

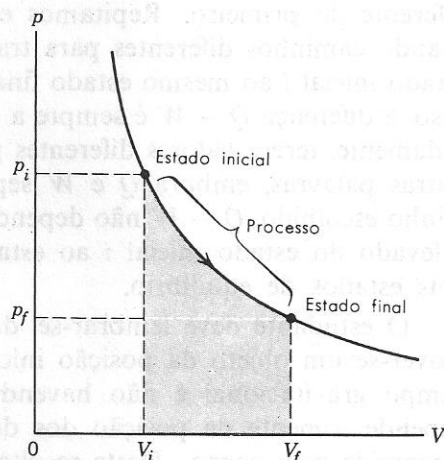


figura 22-10
O trabalho realizado pelo gás é igual à área sob a curva p-V.

Existem vários processos pelos quais um sistema pode ser levado de um estado inicial i para outro final f. Por exemplo (Fig. 22-11), o sistema foi levado de i até a sob pressão constante e de a até f a volume constante. Portanto, o trabalho realizado durante a expansão do gás é igual à área abaixo do segmento de reta ia. Outra possibilidade é ilustrada pela curva ibf e, neste caso, o trabalho realizado pelo gás é igual à área sob a curva bf. A curva if ilustra um outro processo possível, no qual o trabalho realizado pelo gás é diferente dos dois previamente mencionados. Podemos concluir portanto, que *o trabalho realizado por um sistema depende não apenas dos estados inicial e final, mas também dos estados intermediários, isto é, do caminho seguido pelo sistema durante os processos ocorridos.*

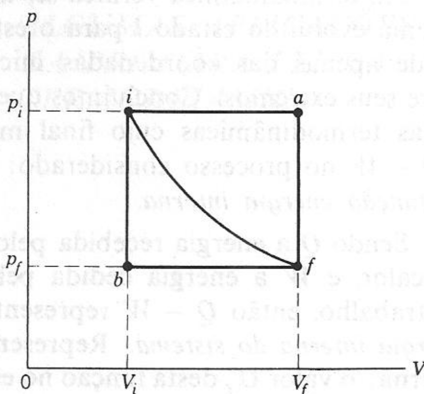


figura 22-11
O trabalho realizado pelo sistema depende não apenas dos estados inicial (i) e final (f) mas também do caminho intermediário.

Um resultado análogo é obtido ao calcular a troca de calor durante os processos. Seja T_i e T_f as respectivas temperaturas características dos estados i e f. O calor transferido ao sistema, por exemplo, depende de como o sistema é aquecido. Podemos aquecê-lo, digamos, a pressão constante, até atingir a temperatura T_f e, então variar a pressão, mantendo a temperatura constante, até atingir o valor final p_f. Ou podemos inicialmente reduzir a pressão para p_f e então aquecer o gás, a pressão constante, até a temperatura final T_f. Outras possibilidades ainda existem e cada uma delas leva a um resultado diferente para o calor transferido ao sistema. Assim, *o calor fornecido a um sistema, ou recebido dele, depende*

não apenas dos estados inicial e final, mas também dos estados intermediários, isto é, do caminho seguido pelo sistema durante os processos ocorridos. Este é um fato experimental. A propósito, J. C. Slater escreveu:

"...Seria bastante agradável ser capaz de afirmar que um sistema, em um dado estado, tem uma certa quantidade de calor. Partindo da temperatura de zero absoluto, em que poderíamos dizer que a energia térmica é nula, aqueceríamos o corpo levando-o a um determinado estado final, e calculando-se $\int dQ$, desde o zero absoluto até o estado final atingido pelo corpo, teríamos encontrado o que chamamos energia térmica. No entanto, persistiria o fato de que obteríamos diferentes resultados se aquecêssemos o corpo de maneiras diferentes... E nada pode ser feito para resolver esta dificuldade."

Calor e trabalho "dependem do caminho" seguido pelo sistema e nenhum deles pode ser conservado separadamente.

22-7 *PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA*

Todas as idéias previamente discutidas sobre Q e W serão agora reunidas. Consideremos um sistema que seja levado do estado inicial i a um estado final f, através de um dado processo. Calculemos a diferença $Q - W$, onde Q é o calor absorvido pelo sistema e W o trabalho realizado por ele. A seguir levemos o sistema novamente do estado inicial ao final f mas, desta vez, por um caminho diferente do primeiro. Repitamos este procedimento várias vezes, usando caminhos diferentes para transformar o sistema do mesmo estado inicial i ao mesmo estado final f. Verifica-se que, para cada caso, a diferença $Q - W$ é sempre a mesma, apesar de Q e W, separadamente, terem valores diferentes para cada caminho usado. Em outras palavras, embora Q e W separadamente dependam do caminho escolhido, $Q - W$ não depende do modo pelo qual o sistema é levado do estado inicial i ao estado final f, mas apenas destes dois estados de equilíbrio.

O estudante deve lembrar-se, do estudo da mecânica, que, ao mover-se um objeto da posição inicial i à posição final f, em um campo gravitacional e não havendo atrito, o trabalho realizado depende somente da posição dos dois pontos e não da trajetória percorrida pelo corpo. Deste resultado concluímos que existe uma função das coordenadas espaciais do corpo, tal que a diferença entre seus valores final e inicial é igual ao trabalho realizado para deslocar o corpo e damos-lhe o nome de função energia potencial.

Em termodinâmica verifica-se, analogamente, que, quando um sistema evolui do estado i para o estado f, a diferença $Q - W$ depende apenas das coordenadas inicial e final e não do caminho entre seus extremos. Concluímos que existe uma função das coordenadas termodinâmicas cujo final menos seu valor inicial é igual a $Q - W$ no processo considerado: a esta função, damos o nome de *função energia interna.*

Sendo Q a energia recebida pelo sistema devido à transferência de calor, e W a energia cedida pelo sistema, devido à realização de trabalho, então $Q - W$ representa, por definição, *a variação da energia interna do sistema.* Representemos por U a função energia interna; o valor U_f desta função no estado final f, menos seu valor U_i no estado inicial i, é simplesmente a *variação da energia interna do sistema,* a qual *tem um valor definido e independente de como o sistema foi levado do estado* i *para o estado* f, *isto* é

$$U_f - U_i = \Delta U = Q - W. \qquad (22\text{-}6)$$

Analogamente à energia potencial, o importante é a variação da energia interna. Escolhendo um valor arbitrário para a energia interna em um estado de referência padrão, poder-se-á determinar o seu valor em um outro estado qualquer. A Eq. 22-6 é conhecida como *primeira lei da termodinâmica*. É importante lembrar que nesta equação Q é considerado positivo quando o calor é *recebido* pelo sistema e W é positivo quando o trabalho é realizado *pelo* sistema.

Se o sistema sofre uma variação infinitesimal de estado, então apenas uma quantidade infinitesimal de calor dQ é absorvida e apenas uma quantidade infinitesimal de trabalho dW é fornecida, de modo que a variação da energia interna dU será também infinitesimal. Neste caso, a primeira lei tem a seguinte *forma diferencial*:[7]

$$dU = dQ - dW. \tag{22-7}$$

Podemos enunciar a primeira lei em palavras como segue: *Todo sistema termodinâmico possui, em um estado de equilíbrio, uma variável de estado chamada energia interna U, cuja variação dU em um processo diferencial é dada pela Eq.* 22-7. Lembremos que o conteúdo essencial da lei zero da termodinâmica (Seç. 21-2) é, em linguagem pouco precisa, o seguinte: *existe uma grandeza termodinâmica útil, chamada "temperatura"*. O conteúdo essencial da primeira lei *é que existe uma função termodinâmica útil chamada "energia interna"*. Esta lei fornece também, através da Eq. 22-6, uma receita para medir quantitativamente as variações da energia interna de um sistema.

A primeira lei da termodinâmica aplica-se a todo e qualquer processo natural que decorre entre estados de equilíbrio. Note-se que estes processos podem ou não envolver estados de equilíbrio intermediários. Podemos, por exemplo, aplicar a primeira lei à explosão de uma bomba de fogos de artifício dentro de um recipiente de aço isolado. Por causa de sua generalidade, as informações obtidas a partir da primeira lei são incompletas, embora exatas e corretas. Existem várias questões de natureza muito geral que ela não pode responder. Por exemplo, embora esta lei nos afirme que a energia é conservada em todos os processos, ela nada nos diz se um processo particular pode ou não realmente ocorrer. Informações deste gênero são fornecidas por uma generalização inteiramente diferente, chamada segunda lei da termodinâmica, da qual depende grande parte desta ciência (Cap. 25).

22-8 *ALGUMAS APLICAÇÕES DA PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA*

Vimos que, quando um gás se expande, o trabalho por ele realizado sobre sua vizinhança é dado por

$$W = \int p\, dV,$$

sendo p a pressão exercida sobre o gás, ou por ele; dV é a variação diferencial do volume do gás. Consideremos o caso especial em que a pressão permanece constante enquanto o volume sofre uma variação finita, digamos, muda de V_i para V_f. Então

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV = p \int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i) \quad \text{(pressão constante).}$$

[7] Na realidade, W e Q não são funções do estado de um sistema, isto é, eles não dependem dos valores das coordenadas do sistema. Conseqüentemente, dW e dQ não são diferenciais exatas, no sentido matemático, mas simplesmente significam uma pequena quantidade de trabalho e de calor, respectivamente. Nos livros mais avançados encontram-se os símbolos $đW$ e $đQ$, que tornam explícita a natureza não exata das diferenciais dW e dQ. Contudo, dU é uma diferencial exata, pois U é uma função das coordenadas do sistema.

Um processo no qual a pressão permanece constante é chamado *processo isobárico*. Por exemplo, quando a água é aquecida na caldeira de uma máquina a vapor até seu ponto de ebulição ela se vaporiza transformando-se em vapor superaquecido e os processos ocorridos realizam-se a pressão constante.

Na Fig. 22-12 ilustramos um processo isobárico. O sistema consiste de água contida num recipiente cilíndrico. Uma dada pressão sobre a água é mantida automaticamente colocando-se certa quantidade de areia sobre o êmbolo que veda completamente o recipiente e que pode mover-se livremente sem atrito. Pode haver troca de calor da vizinhança para o sistema, através de um bico de Bunsen. Suponhamos que o processo dure suficientemente para que a água ferva e parte dela se transforme em vapor. O sistema expande-se lentamente (quase estaticamente) mas a pressão por ele exercida sobre o êmbolo automaticamente é sempre a mesma, uma vez que ela deve ser igual à pressão constante que o êmbolo exerce sobre o sistema. Se fixássemos o êmbolo, ou se variássemos a quantidade de areia durante o aquecimento, o processo não seria isobárico.

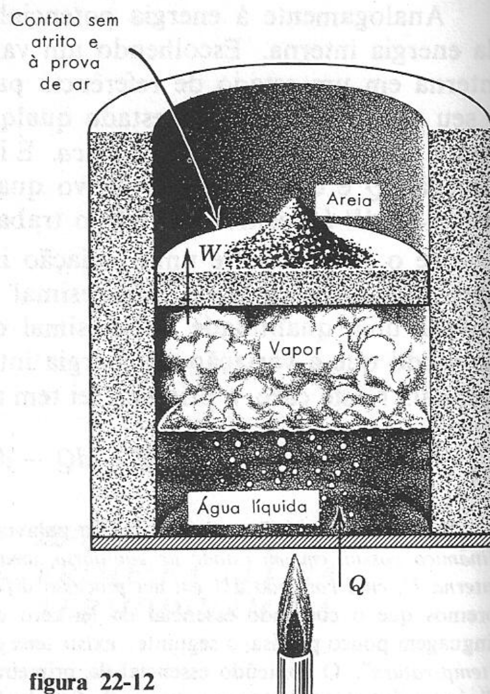


figura 22-12
Água em ebulição a pressão constante (isobaricamente). A pressão mantém-se constante através do peso da areia, do êmbolo e da pressão atmosférica externa.

A seguir, consideraremos o processo de ebulição. Sabe-se que as substâncias mudam da fase líquida para a de vapor quando a pressão e a temperatura assumem valores definidos. A água, por exemplo, vaporiza a 100°C e à pressão atmosférica. Para que um sistema sofra uma mudança de fase, devemos fornecer-lhe ou retirar-lhe calor além do que é necessário para elevar sua temperatura ao valor característico de mudança de fase. Consideremos a mudança de fase da massa m de um líquido para a fase de vapor, supostas constantes a pressão e a temperatura. Seja V_l o volume do líquido e V_v o volume do vapor. O trabalho realizado pela substância, na expansão de V_l para V_v, à pressão constante, é

$$W = p(V_v - V_l).$$

O calor absorvido pela massa m, durante a mudança de fase, é

$$Q = mL$$

sendo L o calor de vaporização, isto é, é o calor necessário para transformar a unidade de massa da fase líquida para a gasosa, à temperatura e pressão constantes. Pela primeira lei da termodinâmica temos

$$\Delta U = Q - W$$

e, portanto,

$$\Delta U = mL - p(V_v - V_l)$$

para este processo.

EXEMPLO 3

Fervendo à pressão atmosférica 1,00 g de água, cujo volume é 1,00 cm^3, obtém-se 1.671 cm^3 de vapor. O calor de vaporização da água é 539 cal/g a 1 atm de pressão. Como $m = 1{,}00$ g,

$$Q = mL = 539 \text{ cal},$$

valor positivo que representa o calor *fornecido* ao sistema pela sua vizinhança.

$$W = p(V_v - V_l) = 1{,}013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} \times (1671 - 1) \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$$
$$= 169{,}5\ \text{joules},$$

também positivo e que representa o trabalho realizado *pelo* sistema sobre sua vizinhança. Como 1 cal = 4,186 joules, W = 41 cal. Portanto,

$$\Delta U = U_v - U_l = mL - p(V_v - V_l) =$$
$$= (539 - 41)\ \text{cal} = 498\ \text{cal}.$$

Sendo ΔU positivo, conclui-se que a energia interna aumentou durante este processo. Assim, das 539 cal necessárias para ferver 1 g de água (a 100°C e 1 atm), 41 cal foram para o trabalho externo de expansão e 498 cal foram adicionadas à energia interna do sistema. Esta energia representa o trabalho realizado internamente para vencer a atração forte que existe entre as moléculas de água na fase líquida. Como você calcularia, das 80 cal necessárias para fundir 1 g de gelo (a 0°C e 1 atm), a parte correspondente à realização do trabalho externo e a parte correspondente à variação da energia interna?

Chama-se *processo adiabático* aquele em que nenhum calor é absorvido pelo sistema ou cedido por ele. Experimentalmente, tais processos são realizados isolando termicamente o sistema de sua vizinhança ou executando o processo rapidamente. Qualquer processo pode ser considerado praticamente como adiabático, se realizado com suficiente rapidez, já que a transmissão do calor é lenta.

Para um processo adiabático $Q = 0$ e, pela primeira lei da termodinâmica,

$$\Delta U = U_f - U_i = -W,$$

isto é, o aumento da energia interna é exatamente igual ao trabalho realizado *sobre* o sistema. Se, em um processo adiabático, o trabalho for realizado *pelo* sistema, então a energia interna decresce de um valor exatamente igual ao trabalho que o sistema realiza. Geralmente, um aumento da energia interna acarreta um aumento da temperatura do sistema e, inversamente, uma redução da energia interna acarreta uma diminuição da temperatura do sistema. Um gás, ao sofrer uma expansão adiabática, realiza trabalho externo e sua energia interna diminui; tal processo é usado para obter baixas temperaturas. O aquecimento que se observa nas bombas de bicicletas é um exemplo muito conhecido do aumento de temperatura por uma compressão adiabática do ar.

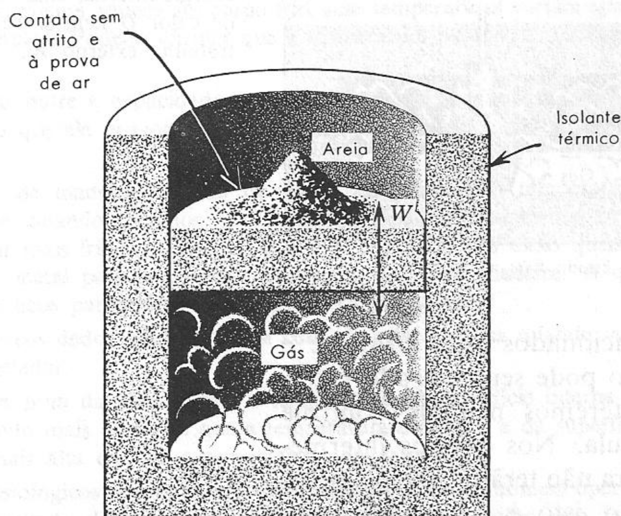


figura 22-13
Em um processo adiabático não há troca de calor entre o sistema e sua vizinhança. Neste caso, as paredes são isoladas e o volume do gás varia adiabaticamente ao variarmos a quantidade de areia.

A Fig. 22-13 ilustra um processo adiabático simples. O sistema é um gás contido num recipiente cilíndrico, feito de material termicamente isolante, o qual não permite a troca de calor entre o gás e sua vizinhança. O recipiente é completamente vedado através de um êmbolo que pode mover-se sem atrito e sobre o qual colocamos certa quantidade de areia. A única interação possível entre o sistema e sua vizinhança é através da realização de trabalho, o que poderá ser obtido quando adicionarmos ou retirarmos areia de cima do êmbolo, permitindo que o gás seja comprimido ou se dilate.

Entre os vários exemplos técnicos de processos adiabáticos, podemos citar os seguintes: expansão do vapor no cilindro de uma máquina a vapor, expansão de gases aquecidos nos motores de combustão interna e a compressão de ar. Estes processos ocorrem tão rapidamente que apenas pequena quantidade de calor é trocada entre o sistema e sua vizinhança durante o tempo em que eles ocorrem. As compressões e rarefações nas ondas sonoras são tão rápidas que o comportamento do gás que as transmite é adiabático (Exemplo 6, Cap. 23).

O fato de que as máquinas ideais utilizam exatamente os processos adiabáticos, constitui o motivo mais importante do estudo de tais transformações. Estas máquinas ideais determinam o limite e a capacidade teóricos das operações das máquinas reais, o que será discutido posteriormente no Cap. 25.

Um processo de bastante interesse teórico é o da *expansão livre*, processo este que é adiabático e no qual nenhum trabalho é realizado sobre o sistema, ou por ele. Uma situação como esta pode ser obtida ligando um recipiente que contém gás a outro onde se realizou o vácuo. Entre os dois recipientes coloca-se uma válvula e o conjunto é termicamente isolado (Fig. 22-14). Abrindo a torneira subitamente, o gás passará para o recipiente vazio, expandindo-se livremente. Este processo é adiabático, uma vez que o sistema está termicamente isolado e nenhum trabalho externo é realizado sobre ele, porque as paredes dos recipientes são rígidas. Portanto, $Q = 0$, $W = 0$ e, pela primeira lei da termodinâmica, $U_i = U_f$. Na expansão livre das energias internas inicial e final são iguais.

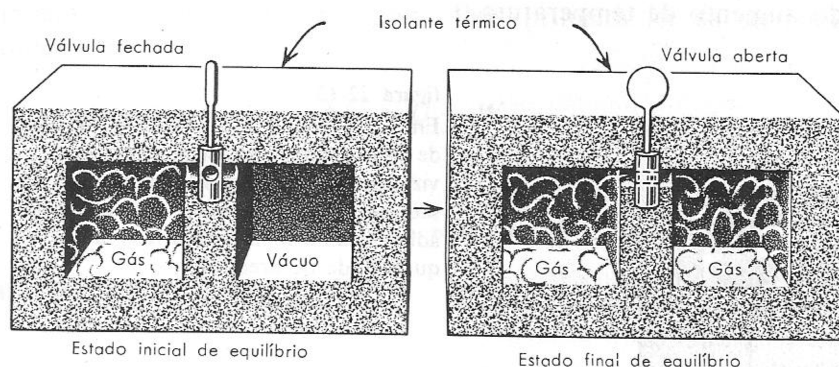


figura 22-14
Expansão livre. Não há variação da energia interna, uma vez que não há troca de calor Q nem se realiza trabalho externo W.

A diferença entre os exemplos mencionados anteriormente e o da expansão livre é que este último não pode ser realizado lentamente (quase estaticamente), pois não teremos nenhum controle sobre o processo uma vez aberta a válvula. Nos estados intermediários, a pressão, o volume e a temperatura não terão valores únicos, característicos do sistema como um todo, isto é, o sistema passa

por estados intermediários de não-equilíbrio, e conseqüentemente não podemos representar graficamente o curso do processo por uma curva em um diagrama $p - V$. No entanto, podemos representar os estados inicial e final, por pontos neste diagrama, porque eles são estados de equilíbrio bem definidos. A expansão livre é um bom exemplo de um processo irreversível (veja Seç. 25-2).

questões

1. Dê exemplos que distingam claramente os conceitos de temperatura e calor.
2. (*a*) Mostre como a teoria do calórico explicaria a condução de calor e a calorimetria. (*b*) Cite alguns fenômenos que não podem ser explicados por aquela teoria.
3. Exemplifique um processo onde nenhum calor é transferido para o sistema ou retirado dele, mas cuja temperatura varia.
4. Pode considerar-se o calor como uma forma de energia armazenada (ou potencial)? Esta interpretação contradiria o conceito de calor como energia em transferência devido a diferença de temperatura?
5. Use a Eq. 22-1 para discutir a água em ebulição.
6. É difícil cozinhar ovos em regiões de grande altitude porque lá a água ferve a temperaturas mais altas. Qual é uma maneira simples e prática de vencer esta dificuldade?
7. Um ovo, em água fervente, cozinhará mais rápido em chama mais alta?
8. É possível fornecer calor a um corpo sem provocar um aumento de sua temperatura? Em caso afirmativo, isto contrariaria o conceito de calor como energia em transferência devido a diferenças de temperatura?
9. Por que devemos fornecer energia calorífica para derreter gelo, se a temperatura não varia?
10. (*a*) Gelo pode ser aquecido a temperaturas acima de 0°C, sem derreter? Explique. (*b*) Água pode ser esfriada a temperatura abaixo de 0°C sem congelar? Explique. (Ver "The Undercooling of Liquids" por David Turnbull em *Scientific American*, janeiro, 1965.)
11. Colocar areia sobre uma estrada encoberta de gelo ajudará aos motoristas? Sua resposta depende da temperatura? Explique.
12. Explique por que a presença de grandes massas de água, tal como um mar ou oceano, nas proximidades de um lugar, tende a moderar suas temperaturas extremas.
13. A teoria mostra que o coeficiente de dilatação linear α é proporcional a capacidade térmica C_v. Mostre que isto deve ser esperado. (*Sugestão:* a capacidade térmica mede a taxa de variação de energia vibracional com a temperatura.)
14. Se alguém afirmasse que um ventilador não somente esfria o ar mas também o aquece um pouco como você replicaria?
15. A condução de calor e a propagação de ondas envolvem transferência de energia. Existe alguma diferença, em princípio, entre estes dois fenômenos?
16. Quando um corpo quente aquece um corpo frio, suas temperaturas variam igualmente? Cite exemplos. Pode-se afirmar que a temperatura passou de um corpo para outro?
17. Que relação existe entre a capacidade térmica de um corpo e as sensações de quente ou de frio que ele provoca? E entre estas sensações e a condutividade térmica?
18. Dois blocos, um de madeira e outro de metal, estão à *mesma* temperatura. Explique por que, quando tocamos os blocos à temperatura ambiente, o de metal parece estar mais frio do que o de madeira, e quando eles estão quentes ao tocá-los, o de metal parece-nos mais quente do que o de madeira. A que temperatura os blocos pareceriam igualmente frios ou quentes?
19. Explique por que seus dedos aderem à uma cuba de gelo metálica quando você a retira do congelador.
20. Explique por que, num dia de inverno, a temperatura da superfície interna de uma parede é muito mais baixa do que a temperatura da sala e a da superfície externa é bem mais alta do que a temperatura do exterior.
21. Os mecanismos fisiológicos que mantêm a temperatura interna do homem operam em uma faixa limitada de temperaturas externas. Explique como esta faixa

pode ser estendida, em cada extremo, pelo uso de roupas. (Veja "Heat, Cold and Clothing", de James B. Kelley em *Scientific American*, fevereiro, 1956.)

22. Que condições a condutividade térmica, o calor específico e o coeficiente de dilatação de um material deveriam satisfazer se você desejasse usá-lo na confecção de utensílios apropriados para cozinhar?
23. Considere que o calor pode ser transferido por convecção e radiação como também por condução, e explique por que a garrafa térmica tem paredes duplas, é evacuada e prateada.
24. O sistema que aquece a cabina de uma nave espacial parece falhar quando a nave está distante, no espaço livre. Dê uma explicação possível.
25. Em que aspectos o fluxo de calor em regime estacionário se assemelha ao de um fluido incompressível?
26. O equivalente mecânico do calor, J, é uma grandeza física ou meramente um fator de conversão que permite converter as unidades de energia térmica em mecânica, e vice-versa?
27. Defenda esta afirmação: "Na experiência de Joule sobre o equivalente mecânico do calor, descrito na Seç. 22-5, não houve envolvimento de calor".
28. Há conservação da temperatura de um sistema isolado (que não interage com sua vizinhança)?
29. Calor e energia interna é a mesma coisa? Se não, dê um exemplo no qual a energia interna de um sistema varia sem troca de calor através de sua superfície.
30. É possível saber se a energia interna de um corpo foi obtido pela transferência de calor ou pela realização de trabalho?
31. A temperatura de um sistema, a uma dada pressão e volume, é sempre determinada univocamente?
32. Um gás em expansão adiabática realiza algum trabalho? Caso afirmativo, qual é a fonte de energia responsável pela realização desse trabalho?
33. Certa quantidade de gás ocupa o volume inicial V_0, à pressão p_0 e temperatura T_0. Ele se dilata até o volume V, (*a*) a temperatura constante, (*b*) a pressão constante. Em que caso o gás realiza maior trabalho?
34. Discuta o fenômeno de congelamento da água do ponto de vista da primeira lei da termodinâmica. Lembre-se que o gelo ocupa maior volume que a mesma quantidade de água.
35. Uma garrafa térmica contém café e é vigorosamente agitada. Considerando o café como o sistema, pergunta-se: (*a*) sua temperatura sobe? (*b*) foi fornecido calor ao café? (*c*) foi realizado trabalho sobre ele? (*d*) sua energia interna mudou?
36. Vemos que a "conservação da energia" é uma lei universal da Natureza. Ao mesmo tempo, os líderes do governo recomendam-nos "conservação da energia". (Dirigir mais vagarosamente etc.) Explique os dois sentidos inteiramente diferentes desses termos.

problemas

SEÇÃO 22-2

1. (*a*) Escreva a expressão diferencial da *capacidade calorífica*. (*b*) Escreva a expressão diferencial do *calor específico*. (*c*) Deduza a relação (22-3) partindo da relação obtida no item (*b*). (*d*) Supondo c constante na relação (22-3), calcule Q. (*e*) Supondo $c = AT$, onde A é uma constante dimensionalmente homogênea, determine a expressão de Q.
2. O calor fornecido a um corpo desde uma temperatura inicial T_i até uma temperatura final T é dado por:

$$Q = A(T - T_i)^2$$

onde $A = 20\ \text{cal/K}^2$. (*a*) Determine a expressão da capacidade calorífica em função de T. (*b*) Sabendo que $T_i = 200$ K, calcule a capacidade calorífica para $T = 300$ K.
Resposta: (*a*) $C = 2A(T - T_i)$ · (*b*) 4 kcal/K.

3. Suponha que o calor específico de um corpo varie com a temperatura de acordo com a relação

$$c = A + BT^2,$$

sendo A e B constantes e T a temperatura, medida em graus Celsius. Compare o calor específico *médio* do corpo no intervalo de $T = 0$ a $T = T_0$ com o calor específico do mesmo corpo à temperatura $T_0/2$.

4. O calor específico de um material é constante e igual a c. Uma quantidade do material, de massa m_1 e à temperatura T_1, é posta em contato com outra quantidade do mesmo

material, a uma temperatura T_2 e possuindo massa m_2. Obtenha uma expressão para o cálculo da temperatura final de equilíbrio em função destes dados.
Resposta: $T_f = (m_1T_1 + m_2T_2)/(m_1 + m_2)$.

5. Um aquecedor elétrico fornece, a taxa *constante*, energia a uma substância contida num recipiente termicamente isolado. A temperatura da substância é medida como função do tempo. (*a*) A partir destas informações, discuta um método pelo qual podemos estudar como a capacidade térmica da substância varia com a temperatura. (*b*) Considere que em certo intervalo de temperatura verifica-se que a temperatura é proporcional a t^3, onde t é o tempo. Como a capacidade térmica depende de t neste intervalo?

6. Calcule o calor específico de um metal a partir dos seguintes dados. Um recipiente metálico de 4,0 kg contém 14,0 kg de água e ambos estão a 15°C. Um bloco de 2,0 kg, feito do mesmo metal, e que se achava inicialmente a 160°C, é mergulhado na água. Após o equilíbrio térmico, o sistema todo acha-se a 18°C. *Resposta:* 0,154 cal/g°C.

7. Dois cubos de gelo de 40 g são colocados num copo com 150 g de água. A temperatura inicial da água era de 20°C e a temperatura inicial dos cubos de gelo era de −10°C. Estimar a temperatura final de equilíbrio. O calor específico do gelo vale aproximadamente 0,50 cal/g · °C e o calor de fusão do gelo é igual a 80 cal/g.

8. Um termômetro de massa 0,055 kg e calor específico 0,20 kca/kg°C marca 15,0°C. O termômetro é mergulhado em 0,300 kg de água e, após atingirem o equilíbrio térmico, ele marca 44,4°C. Calcular a temperatura inicial da água, isto é, antes da imersão do termômetro, desprezando outras perdas possíveis de calor. *Resposta:* 45,5°C.

9. Um anel de cobre tem exatamente 1,00000 cm de diâmetro à temperatura de 0°C. Uma esfera de alumínio tem exatamente 1,00200 cm de diâmetro à temperatura de 100°C. A esfera é colocada na parte superior do anel (Fig. 22-15), permitindo-se que os dois corpos adquiram equilíbrio térmico, não havendo perda de calor para a vizinhança. A esfera atravessa o anel tão logo atinge o equilíbrio de temperatura. Qual a razão entre a massa da esfera e a massa do anel?

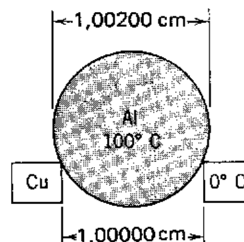


figura 22-15

SEÇÃO 22-3

10. Use a Tab. 22-1 e calcule o calor necessário para elevar a temperatura de 3 moles de alumínio desde 250°C até 300°C. *Resposta:* 873 cal.

11. Mostre que o número de unidades de massa atômica por grama de uma substância é igual ao *número de Avogadro* (número de partículas por mol da substância).

12. A capacidade calorífica de um sólido nas vizinhanças de 0 K é dada pela Lei de Debye: $C = AT^3$, onde A é uma constante com dimensão de [calor × K^{-4}]. Encontre a expressão do calor necessário para aquecer um sólido desde 0 K até uma temperatura absoluta T. *Resposta:* $Q = AT^4/4$.

SEÇÃO 22-4

13. Partindo da relação (22-4*a*) deduza a equação (22-4*b*).

14. O gradiente de temperatura dT/dx através de uma barra é dado por:

$$dT/dx = a + bx$$

onde a = 200 K/m e b = 100 K/m². Suponha que a temperatura da barra no ponto $x = 0$ seja igual a 280 K. Calcule a temperatura da barra no ponto $x = 0,4$ m.
Resposta: 368 K.

15. Suponha que a barra da Fig. 22-4 seja de cobre e que L = 25 cm e A = 0,8 cm². Depois de atingir o regime estacionário, T_2 = 120°C e T_1 = 0°C. Determine: (*a*) o gradiente de temperatura, (*b*) a taxa de transmissão de calor, (*c*) a temperatura num ponto situado a 8 cm da extremidade mais quente.

16. Uma barra de cobre cilíndrica, de 1,2 m de comprimento e área de corte transversal de 4,8 cm² é isolada para impedir perda de calor através da sua superfície. Os extremos são mantidos a uma diferença de temperatura de 100°C, colocando-se um deles em uma mistura de água e gelo e o outro em água fervente e vapor. (*a*) Determine a taxa em que o calor é transmitido ao longo da barra. (*b*) Determine a taxa em que o gelo funde em uma das extremidades. *Resposta:* (*a*) 3,7 cal/s. (*b*) 0,046 g/s.

17. Mostre que, numa lâmina composta, o gradiente de temperatura de cada camada é inversamente proporcional à condutividade térmica.

18. Suponha que a condutividade térmica de cobre seja duas vezes a do alumínio e quatro vezes a do latão. Três barras metálicas, feitas de cobre, alumínio e latão, respectivamente, têm 15,0 cm de comprimento e 2,5 cm de diâmetro cada uma. As barras são colocadas em fila, de modo que a de alumínio fica entre as duas outras. Os extremos livres das barras de cobre e latão são mantidos a 100°C e 0°C, respectivamente. Determinar as temperaturas de equilíbrio nas superfícies de separação das barras de cobre e de alumínio e nas de alumínio e de latão. *Resposta:* 86°C (Cu-Al) e 57°C (Al-latão).

19. Duas barras idênticas de metal, quadradas, são soldadas ponta com ponta como ilustra a Fig. 22-16*a*. Suponha que 10 cal de calor fluam através das barras em 2 minutos. Quanto

tempo levaria para que 10 cal fluíssem se as barras estivessem soldadas como mostra a Fig. 22.16*b*?

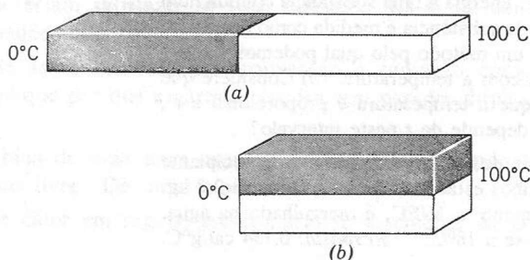


figura 22-16

20. Em uma região de inverno rigoroso, um tanque com água é deixado ao ar livre até que forme sobre a superfície da água uma camada de gelo com espessura igual a 5,0 cm (Fig. 22-17). O ar acima do gelo está a −10°C. Calcule a taxa de formação de gelo em (cm/h) sob a superfície inferior do gelo. Considere a condutividade térmica, a densidade e o calor de fusão do gelo como sendo igual a 0,0040 cal/s·cm°C, 0,92 g/cm³ e 80 cal/g, respectivamente. Considere que nenhuma quantidade de calor deixa ou passa para a água através das paredes do tanque. *Resposta:* 0,39 cm/h.

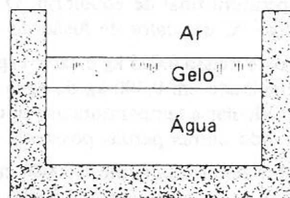


figura 22-17

21. (*a*) Ache a taxa de perda de calor em W/m² através de uma vidraça de janela de 2,5 mm de espessura quando a temperatura exterior é de −6°C e a temperatura interior vale 26°C. (*b*) Se uma janela for instalada com vidros de mesma espessura, porém com uma folga para o ar de 5,0 cm entre os vidros, qual seria a taxa da perda de calor correspondente?

22. Mostre que a taxa radial de fluxo de calor em uma substância de condutividade térmica constante *k*, entre duas superfícies esféricas concêntricas, é dada por

$$H = \frac{(T_1 - T_2)4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1};$$

a superfície esférica interna tem raio r_1 e temperatura T_1 e a externa tem r_2 e temperatura T_2.

23. Mostre que a taxa de calor que se transmite radialmente através de uma substância, de condutividade térmica constante *k*, entre duas superfícies cilíndricas coaxiais é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(T_1 - T_2)2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)};$$

a superfície cilíndrica interna tem raio r_1 e temperatura T_1, a externa raio r_2 e temperatura T_2; ambas têm comprimento *L*.

24. Ao longo do eixo central de um cilindro de cerâmica, de 0,12 m de diâmetro, tem-se um fio longo de tungstênio, de $5{,}0 \times 10^{-4}$ m de diâmetro. Quando o fio se acha a 1 500°C a taxa de calor por ele gerado é de 3,0 kw/m. Calcule a condutividade térmica da cerâmica, sabendo que sua superfície externa acha-se a 20°C. (Use os resultados do Probl. 23.) *Resposta:* 1,8 J/m · s · °C.

SEÇÃO 22-5

25. Numa experiência análoga à de Joule, um corpo de 8,0 kg cai de uma altura de 30,0 m e faz girar um conjunto de paletas que agitam 4,0 kg de água. Calcule o aumento de temperatura da água, sabendo que sua temperatura inicial era de 15°C.

26. A quantidade mínima de energia necessária para a manutenção da vida humana é da ordem de 2.000 kcal por dia. A potência dos raios solares por unidade de área (ou seja, a *intensidade luminosa*), num dia claro, pode atingir um valor quase igual a 2 cal/cm² · min. Estime a área necessária para que a energia solar incidente, em uma hora, seja igual à energia média consumida durante um dia por um ser humano. *Resposta:* 1,667 m².

27. Para perfurar um buraco num bloco de cobre de 0,80 kg de massa, fornecemos uma potência de 200 W durante 180 segundos. (*a*) Calcule o calor gerado. (*b*) Supondo que somente 70% do calor gerado sejam absorvidos pelo bloco, avalie o aumento de temperatura do bloco.

28. Suponha que 1 kg de água caindo de uma altura de 100 m da barragem de Itaipu possa produzir uma quantidade de calor equivalente a 60% da sua energia potencial. Estime o aumento de temperatura, para cada kg de água na base da represa de Itaipu. *Resposta:* 0,14°C.

29. Um projétil de chumbo de 2,0 g de massa move-se com uma velocidade de 300 m/s e incide sobre um bloco de madeira fixo. Suponha que toda a energia cinética do projétil

seja transformada em calor e que 25% desta energia sejam usados para aquecer o bloco e 75% sejam usados para aquecer o projétil. Ache a variação de temperatura do projétil.

30. O calor específico do cromo é representado aproximadamente pela expressão (em cal/g - K):

$$c_p = 5,4 + 0,0024T - 0,44 \times 10^5/T^2$$

Calcule o calor necessário para aquecer 200 g de cromo desde 294 K até 476 K. *Resposta:* 220 kcal.

31. De quanto aumenta a massa de 1,00 kg de cobre, quando aquecido de 0 a 1.000°C, considerando que neste intervalo seu calor específico médio é de 0,090 cal/g · °C?

32. O calor específico de um líquido é medido através do chamado "calorímetro de fluxo". É fornecido calor a uma corrente líquida, a uma taxa conhecida, quando ela passa pelo calorímetro, a uma taxa também conhecida. Medindo a diferença de temperaturas resultante, entre os pontos de entrada e de saída do líquido, pode-se determinar o seu calor específico. Considere a seguinte situação: Um líquido de densidade 0,85 g/cm³ flui através de um calorímetro, à taxa de 8,0 cm³/s. O calor é fornecido ao líquido por meio de um aquecedor elétrico de 250 W, e a diferença de temperatura entre os pontos de entrada e saída do líquido, nas condições de regime estacionário, é de 15°C. Calcular o calor específico do líquido. *Resposta:* 2.500 J/kg°C.

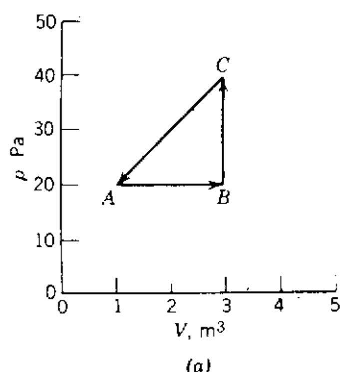
33. Um cozinheiro-chefe, após levantar-se uma manhã e encontrar seu fogão quebrado, decide ferver a água, sacudindo-a em uma garrafa térmica, para o café de sua esposa. Suponha que ele use 1/2 litro de água a 15°C de uma torneira e que a água sofra uma queda de 30 cm em cada sacudida, que se multiplica por 30 vezes a cada minuto. Desprezando qualquer perda de calor, por quanto tempo deve ele sacudir a garrafa até que a água ferva?

SEÇÃO 22-7

34. Determine o equivalente mecânico do calor, a partir dos seguintes dados. Um sistema recebe 2.000 cal de calor e realiza um trabalho igual a 3.350 J. O aumento de energia interna do sistema é igual a 5.030 J. *Resposta:* 1 cal = 4,19 J.

SEÇÃO 22-8

35. Um sistema termodinâmico é levado do estado inicial A a outro B e depois trazido de volta a A através do estado C, como ilustra o caminho A-B-C-A no diagrama $p - V$ da Fig. 22-18*a*. (*a*) Complete a tabela da Fig. 22-18*b*, atribuindo os sinais + ou − às grandezas termodinâmicas associadas a cada processo. (*b*) Calcule o trabalho realizado pelo sistema para o ciclo completo A-B-C-A.



(*a*)

	Q	W	ΔU
$A \longrightarrow B$			+
$B \longrightarrow C$	+		
$C \longrightarrow A$			

(*b*)

figura 22-18

36. Tome como referência a Fig. 22-19. Suponha que a variação da energia interna do sistema seja igual a 230 J para o percurso *iaf*. Calcule a variação da energia interna para os percursos: (*a*) *if*, (*b*) *ibf*, (*c*) *fi*. *Resposta:* (*a*) 230 J. (*b*) 230 J. (*c*) −230 J.

37. Quando um sistema é levado do estado i para o estado f, ao longo do caminho *iaf*, encontra-se Q = 50 cal e W = 20 cal. Ao longo do caminho *ibf*, Q = 36 cal (Fig. 22-19). (*a*) Qual é o valor de W para o caminho *ibf*? (*b*) Se W = −13 cal para o caminho curvo de volta *fi*, qual o valor de Q? (*c*) Se U_i = 10 cal, quanto vale U_f? (*d*) Se U_b = 22 cal, quanto vale Q para o processo *ib*? E para o processo *bf*?

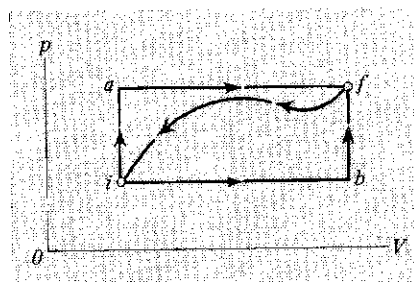


figura 22-19

38. Deixa-se cair, de uma altura de 10 m, uma bola de ferro sobre um chão de concreto; após o primeiro choque, a bola sobe à altura de 0,50 m. Supondo que toda a energia mecânica macroscópica perdida pela bola, após o primeiro choque com o chão, tenha sido recebida por ela própria, pergunta-se: (*a*) Foi fornecido calor à bola? (*b*) Foi realizado trabalho sobre a bola? (*c*) Sua energia interna mudou? Em caso afirmativo, de quanto? (*d*) De quanto aumentou a temperatura da bola após a primeira colisão? Calor específico do ferro: 0,12 cal/g°C.

Resposta: (*a*) não; (*b*) sim; (*c*) sim, de 93 J/kg; (*d*) 0,20°C.

39. **Realiza-se um trabalho de 8 kJ para vaporizar uma certa quantidade de água a 1 atm e 373 K. A variação da energia interna neste processo é igual a 80 kJ. Calcule a massa de água vaporizada.**

40. A temperatura de fusão do ouro é igual a 1.063°C. Calcule a variação de energia interna durante a fusão de 1,3 átomo-grama de ouro, sob a pressão atmosférica. Dados: calor de fusão do ouro a 1 atm = 3,03 kcal/átomo-grama; massa específica do ouro sólido a 1.063°C = 18,2 g/cm^3; massa específica do ouro líquido a 1.063°C = 17,3 g/cm^3.
Resposta: 3,94 kcal.

23 teoria cinética dos gases - I

23-1 INTRODUÇÃO

A *Termodinâmica* lida apenas com variáveis macroscópicas, tais como a pressão, a temperatura e o volume. Suas leis básicas, expressas em termos de tais grandezas, nada dizem a respeito da constituição atômica da matéria. A *Mecânica Estatística*, entretanto, lidando com a mesma área da ciência que a Termodinâmica, pressupõe a existência de átomos; suas leis fundamentais são as da mecânica, aplicadas aos átomos que constituem o sistema.

A solução do problema do movimento dos átomos que constituem um gás, pela aplicação direta das leis da mecânica a cada um, não poderia ser obtida nem com o auxílio do melhor computador eletrônico existente. Mesmo se isso fosse possível, o resultado do cálculo seria tão volumoso que não seria utilizável. Felizmente a história detalhada de cada átomo de um gás não é importante, se desejarmos apenas determinar o seu comportamento macroscópico. A aplicação estatística das leis da mecânica nos permite expressar todas as variáveis termodinâmicas como certas médias de propriedades atômicas. Por exemplo, a pressão exercida por um gás sobre a parede do recipiente é a taxa média, por unidade de área, em que os átomos do gás transferem momento linear à parede quando colidem com ela. O número de átomos em um sistema macroscópico é em geral tão grande que tais médias são, na verdade, quantidades muito bem definidas.

Podemos aplicar estatisticamente as leis da mecânica a um conjunto de átomos em dois níveis diferentes. No nível chamado *Teoria Cinética* procedemos de um modo mais físico, usando técnicas

matemáticas relativamente simples para calcular médias. Neste capítulo empregaremos esses métodos para aprofundar nosso conhecimento sobre os conceitos de pressão, de temperatura, de calor específico e de energia interna, no nível atômico. A teoria cinética foi desenvolvida por Robert Boyle (1627-1691), Daniel Bernoulli (1700-1782), James Joule (1818-1889), A. Kronig (1822-1879), Rudolph Clausius (1822-1888), Clerk Maxwell (1831-1879) e outros.[1] Neste livro aplicaremos a teoria cinética apenas aos gases, porque neles as interações entre átomos são muito mais fracas do que nos líquidos e nos sólidos, o que reduz grandemente as dificuldades matemáticas do problema.

Em um outro nível, as leis da mecânica podem ser aplicadas estatisticamente por intermédio de técnicas mais formais e abstratas do que as da teoria cinética. Estas técnicas, desenvolvidas por J. Willard Gibbs (1839-1903) e por Ludwig Boltzmann (1844-1906), entre outros, é a chamada *Mecânica Estatística*, que inclui a teoria cinética como ramo subsidiário. As leis da termodinâmica podem ser obtidas com esses métodos, reduzindo assim essa ciência a um ramo da mecânica. A mecânica estatística quântica, ao invés de aplicar a mecânica clássica a sistemas de muitos átomos, aplica as leis da mecânica quântica.[2]

23-2 *GÁS IDEAL — DEFINIÇÃO MACROSCÓPICA*

Consideremos uma massa nM de um gás, confinada em um recipiente de volume V; M é o peso molecular (grama/mole) e n é o número de moles. A massa específica ρ do gás, nM/V, poderá ser reduzida ou pela remoção do gás do recipiente (redução de n) ou pela transferência do gás para um recipiente de maior volume (aumento de V). A experiência mostra que, se a massa específica for suficientemente baixa, todos os gases, qualquer que seja sua composição química, tendem a apresentar uma certa relação simples entre as variáveis termodinâmicas p, V e T. Isto sugere o conceito de *gás ideal*, aquele que teria o mesmo comportamento em qualquer condição. Nesta seção será dada uma definição macroscópica ou termodinâmica de gás ideal. Na Seç. 23-3 definiremos microscopicamente um gás ideal, do ponto de vista da teoria cinética, e veremos o que se pode aprender na comparação destes dois tratamentos.

Dada a massa nM de um gás em equilíbrio térmico, podemos medir sua pressão p, sua temperatura T, e seu volume V. Para valores suficientemente baixos da densidade a experiência mostra que: (1) para uma dada massa de gás, mantida a temperatura constante, a pressão varia inversamente com o volume (Lei de Boyle), e (2) para uma dada massa de gás, mantida a pressão constante, o volume varia diretamente com a temperatura (Lei de Charles e Gay-Lussac). Estes dois resultados experimentais podem ser resumidos na relação:

$$\frac{pV}{T} = \text{constante (para uma massa fixa de gás).} \qquad (23\text{-}1)$$

[1] Veja "John James Waterston and the Kinetic Theory of Gases" de S. G. Brush, em *American Scientist*, junho de 1961; trata de aspectos interessantes da história da teoria cinética.

[2] Veja *Thermal Physics*, de Philip M. Morse, W. A. Benjamin Inc., New York, 1962; é um tratamento da Termodinâmica. Teoria cinética e particularmente Mecânica Estatística mais avançado do que o que é feito no presente livro.

O volume ocupado por um gás (real ou ideal), a pressão e temperatura dadas, é proporcional à sua massa. Deste modo, a constante na Eq. 23-1 deve ser também proporcional à massa do gás. Na Seç. 22-2 (veja Fig. 22-2), vimos que o estudo do calor específico dos sólidos era grandemente simplificado quando comparávamos amostras que tinham o mesmo número de moléculas, ao invés de comparar amostra de mesma massa em gramas. Fizemos isso pelo uso de um *mol* como unidade de massa. Façamos o mesmo aqui.

Escreveremos a constante da Eq. 23-1 como nR, onde n é o número de moles do gás, e R é uma constante a ser determinada para cada gás, pela experiência. Nossa esperança de que a simplicidade emergirá do nosso tratamento das massas dos gases em base molar é justificada, uma vez que a experiência mostra que, para densidades baixas, *R tem o mesmo valor para todos os gases*, ou seja, $R = 8{,}314$ joule/mol K = 1,986 cal/mol K. R é chamada de *constante universal dos gases.*

Escrevemos por isso a Eq. 23-1 como

$$pV = nRT \tag{23-2}$$

e definimos um gás ideal como aquele que obedece a esta relação *sob quaisquer condições.* Tal gás na realidade não existe, mas é um conceito útil devido ao fato de que o comportamento de todos os gases reais se aproximam do comportamento do gás ideal, a densidades suficientemente baixas. A Eq. 23-2 é chamada *equação de estado de um gás ideal.*

Se enchêssemos com um gás ideal o bulbo de um termômetro de gás de volume constante, a Eq. 23-2 mostra que poderíamos definir a temperatura em função da pressão, isto é,

$$T = 273{,}16\ \text{K}\ \frac{p}{p_{tr}}\ \text{(gás ideal)};$$

p_{tr} é a pressão no ponto triplo, no qual a temperatura T_{tr} é 273,16 K por definição. Na prática enchemos o termômetro com um gás real e medimos a temperatura extrapolando até a densidade nula, usando a Eq. 21-4,

$$T = 273{,}16\ \text{K} \lim_{p_{tr}\to 0} \frac{p}{p_{tr}}\ \text{(gás real)}.$$

Se tivéssemos um gás ideal disponível (o que não acontece) a extrapolação seria desnecessária.

EXEMPLO 1

Um cilindro contém oxigênio à temperatura de 20°C, pressão de 15 atmosferas e volume de 100 litros. Um êmbolo é deslocado no cilindro de modo a diminuir o volume do gás para 80 litros e aumentando sua temperatura para 25°C. Supondo que o oxigênio se comporte como gás ideal nestas condições, determinar sua pressão final.

Da Eq. 23-1, uma vez que a massa do gás permanece constante, podemos escrever:

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}.$$

Nossas condições iniciais são:

$$p_i = 15\,\text{atm}, \quad T_i = 293\,\text{K}, \quad V_i = 100\,\text{litros}$$

e as finais são:

$$p_f = ?, \quad T_f = 298\,\text{K}, \quad V_f = 80\,\text{litros}.$$

Logo

$$p_f = \frac{T_f}{V_f} \times \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{298\,\text{K}}{80\,\text{litros}} \times \frac{15\,\text{atm} \times 100\,\text{litros}}{293\,\text{K}} = 19\,\text{atm}.$$

EXEMPLO 2

Calcule o trabalho por mol realizado por um gás ideal que se expande isotermicamente, quer dizer, à temperatura constante, desde o volume inicial V_i até o volume final V_f.

O trabalho realizado pode ser representado como

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV.$$

Da lei dos gases ideais temos

$$p = \frac{nRT}{V},$$

então o trabalho por mol, W/n é

$$\frac{W}{n} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{RT}{V}\,dV.$$

Como a temperatura é constante,

$$\frac{W}{n} = RT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_f}{V_i},$$

que é o trabalho por mol de um gás ideal em uma expansão isotérmica à temperatura T, quando seu volume varia desde o valor inicial V_i até o valor final V_f.

Note que, se o gás se expandir de tal modo que $V_f > V_i$, o trabalho realizado por ele será positivo; e se o gás for comprimido, quer dizer, se $V_f < V_i$, o trabalho realizado pelo gás será negativo. Isto está consistente com a convenção de sinais adotada para o trabalho na primeira lei da Termodinâmica. Na Fig. 23-1, o trabalho é representado pela área hachurada. A linha contínua é uma isoterma, isto é, uma curva que representa a relação entre p e V a uma temperatura constante.

Como poderíamos, na prática, realizar uma expansão ou compressão isotérmica?

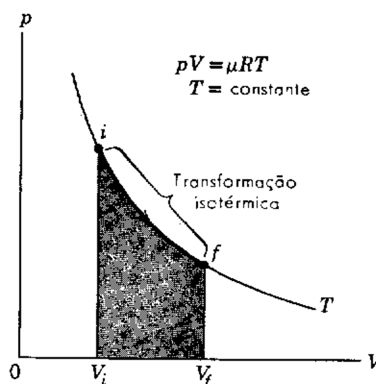


figura 23-1
Exemplo 2. A área sombreada representa o trabalho realizado por n moles de gás ao expandir-se de V_i a V_f, mantendo-se constante a temperatura.

23-3 *GÁS IDEAL — DEFINIÇÃO MICROSCÓPICA*

Nossa tarefa, ao tratar um gás ideal do ponto de vista microscópico, consistirá na aplicação estatística das leis da mecânica clássica aos átomos do gás e em mostrar que a definição microscópica de um gás ideal é consistente com a definição macroscópica dada na seção precedente. A definição do gás, do ponto de vista microscópico, fundamenta-se nas suposições seguintes:

1. *Um gás é constituído de partículas chamadas moléculas.* As moléculas, por sua vez, podem ser formadas de átomos ou de grupos de átomos, dependendo da natureza do gás. Se o gás é um elemento ou um composto e está em um estado estável consideraremos todas as suas moléculas como idênticas.

2. *As moléculas são dotadas de movimento desordenado e obedecem às Leis de Newton.* As moléculas podem mover-se em todas as direções, com várias velocidades. Para podermos determinar as

características de seus movimentos, supomos que as leis de Newton sejam válidas no nível microscópico. Essa hipótese será aceita ou rejeitada, conforme os fatos experimentais previstos com base nelas sejam ou não corretos.

3. *O número total de moléculas do gás é grande.* O sentido, a direção e o módulo da velocidade das moléculas podem sofrer mudanças bruscas devido às colisões com outras moléculas e com as paredes do recipiente. Por causa das colisões, as trajetórias das moléculas serão em ziguezague. Entretanto, por causa do número tão elevado de moléculas, supomos que a ocorrência de inúmeras colisões, manterá a distribuição de velocidades bem como o movimento desordenado das moléculas.

4. *O volume das moléculas é uma fração desprezível do volume ocupado pelo gás.* Apesar de existir um grande número de moléculas, elas são extremamente pequenas. Sabemos que o volume de um gás pode variar grandemente sem grande dificuldade e que, se o gás for condensado, o volume ocupado pelo líquido pode ser milhares de vezes menor do que o volume do gás. Logo, essa hipótese é plausível. Investigações posteriores relativas ao tamanho das moléculas nos mostrarão a necessidade de modificar essa hipótese.

5. *As forças que atuam sobre as moléculas são desprezíveis, exceto durante uma colisão.* Como conseqüência dessa hipótese, o movimento das moléculas é retilíneo e uniforme entre duas colisões. A distância média entre as moléculas é muito grande comparada a seus tamanhos, devido à suposição de que as moléculas são muito pequenas. Logo, o alcance das forças moleculares é suposto comparável ao tamanho molecular.

6. *As colisões são elásticas e de duração desprezível.* O momento linear, bem como supomos, a energia cinética, são conservados nas colisões entre duas moléculas ou entre as moléculas e as paredes do recipiente. O tempo que decorre entre duas colisões sucessivas sendo muito maior do que o tempo de duração de uma colisão, tem-se como conseqüência que a energia cinética, convertida em energia potencial durante a colisão, seja de novo disponível como energia cinética, em intervalos de tempo tão breves, que podemos ignorar inteiramente essa transformação.

23-4 *CÁLCULO CINÉTICO DA PRESSÃO*

Calculemos a pressão de um gás ideal a partir da teoria cinética. Para simplificar, consideraremos o gás em um recipiente cúbico de paredes perfeitamente elásticas. Sejam l o comprimento das arestas do cubo, A_1 e A_2, de área l^2, as faces normais ao eixo Ox (Fig. 23-2). Consideremos uma molécula de velocidade **v**. Podemos decompor **v** em v_x, v_y e v_z, segundo as arestas do cubo. Se uma partícula colidir com A_1, seu componente v_x mudará de sinal. Nenhum efeito será observado sobre v_y e v_z; a variação Δp do momento linear será portanto normal à face A_1 e vale

$$\Delta p = p_f - p_i = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x.$$

Logo, o momento transmitido a A_1 será $2mv_x$, uma vez que o momento total deve ser conservado.

Suponhamos que essa partícula atinja A_2 sem chocar-se com outra partícula no caminho. O tempo necessário para atravessar o cubo será l/v_x. Em A_2 de novo o componente v_x de sua velocidade

mudará de sentido e ela voltará para A_1. Supondo que não haja nenhuma colisão durante todo o percurso, o tempo total será $2l/v_x$. Logo, o número de colisões por unidade de tempo que essa partícula fará com A_1 será $v_x/2l$; a taxa de transferência de momento a essa parede será pois

$$2mv_x \cdot \frac{v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l}.$$

A fim de obter a força total, que é a transferência de momento A_1, por todas as moléculas do gás, por unidade de tempo, devemos somar mv_x^2/l para todas as partículas. A pressão será o quociente dessa força pela área de A, ou seja, l^2.

Se m for a massa de cada molécula, teremos

$$p = \frac{m}{l^3}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots),$$

onde v_{x1} é o componente segundo Ox da velocidade da partícula 1, v_{x2} a da partícula 2 e assim por diante. Se N for o número total de partículas no recipiente e n_v o número de partículas por unidade de volume, então $N/l^3 = n_v$ ou $l^3 = N/n_v$. Logo,

$$p = mn_v\left(\frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots}{N}\right)$$

Ora, mn_v é a massa por unidade de volume, isto é, a massa específica ou densidade absoluta ρ. A quantidade $(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots)/N$ é o valor médio de v_x^2 para todas as partículas no recipiente. Essa média pode ser representada por $\overline{v_x^2}$; então:

$$p = \rho\overline{v_x^2}.$$

Para qualquer partícula tem-se $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Como existem muitas partículas e elas se movem desordenadamente, os valores médios de v_x^2, v_y^2 e v_z^2 são iguais, sendo portanto o valor de cada uma exatamente igual a um terço do valor médio de v^2. Não há direção privilegiada para o movimento das moléculas. Logo, $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ e então

$$p = \rho\overline{v_x^2} = \tfrac{1}{3}\rho\overline{v^2}. \qquad (23\text{-}3)$$

Apesar de nestes cálculos não termos levado em conta as colisões entre partículas, o resultado continuará inalterado se estas colisões forem consideradas. Nas colisões elásticas entre partículas idênticas, há troca de velocidades, por isso haverá sempre uma partícula cujo momento linear seja mv_x e que colidirá com a parede A_2 correspondendo a uma partícula que tenha deixado A_1 com esse mesmo momento linear. Além disso, o tempo de duração de uma colisão é desprezível em relação ao tempo que decorre entre duas colisões sucessivas. Conseqüentemente, o fato de termos desprezado as colisões intermediárias foi meramente um artifício conveniente para simplificar os cálculos. Do mesmo modo poderíamos ter escolhido

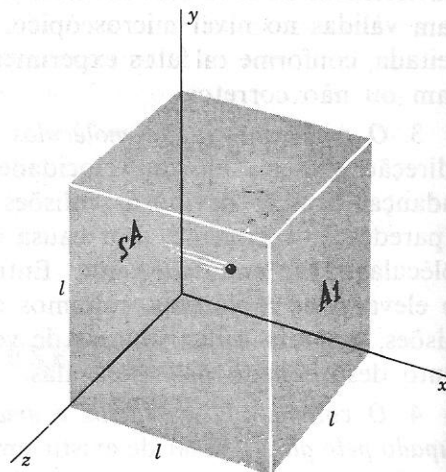


figura 23-2
Uma caixa cúbica, de aresta l, que contém um gás ideal. Representa-se uma molécula que se move para A_1.

um recipiente de outra forma qualquer; o cabo foi escolhido pela mesma razão acima invocada, isto é, para simplificar os cálculos. Apesar de termos calculado apenas a pressão exercida sobre a face A_1, decorre do princípio de Pascal que ela é a mesma sobre todas as faces e em qualquer ponto no interior do recipiente.[3]

A raiz quadrada de $\overline{v^2}$ é chamada *velocidade quadrática média* das moléculas; é uma espécie de média da velocidade molecular.[4] Usando a Eq. 23-3 podemos calcular a velocidade quadrática média a partir de valores medidos da pressão e da densidade do gás. Temos:

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} \qquad (23\text{-}4)$$

Na Eq. 23-3 relacionamos uma grandeza macroscópica (a pressão p) com um valor médio de uma grandeza microscópica (quer dizer, $\overline{v^2}$ ou ${v_{qm}}^2$). Entretanto, valores médios podem ser tomados ou sobre intervalos de tempo curtos ou longos, ou sobre pequenas ou grandes regiões do espaço. A média calculada em pequenas regiões do espaço, durante curtos intervalos de tempo, pode depender do tempo ou da região escolhida, de modo que os valores assim obtidos podem flutuar. Isto poderia acontecer, por exemplo, no caso de um gás de densidade muito pequena. As flutuações, entretanto, podem ser ignoradas quando se tratar de um sistema constituído de um grande número de partículas.

EXEMPLO 3

Calcule a velocidade quadrática média de uma molécula de hidrogênio a 0,00°C e à pressão de 1,00 atm, supondo que o hidrogênio seja um gás ideal. Nestas condições a massa específica do hidrogênio é $\rho = 8{,}99 \times 10^{-2}$ kg/m³. Então, uma vez que $p = 1{,}00$ atm $= 1{,}01 \times 10^5$ N/m², $v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 1.840$ m/s, que é da ordem de dois quilômetros por segundo, ou seja, 5.800 km/h.

A Tab. 23-1 dá resultado de cálculos semelhantes para alguns gases a 0°C.

Tabela 23-1

Gás	Massa molecular g/mol*	V_{qm} (a 0°C) m/s	Energia cinética translacional por mol (a 0°C), 1/2 *MV* qm² J/mol
H_2	2,02	1.838	3.370
He	4,0	1.311	3.430
H_2O	18	615	3.400
Ne	20,1	584	3.420
N_2	28	493	3.390
CO	28	493	3.390
Air	28,8	485	3.280
O_2	32	461	3.400
CO_2	44	393	3.400

* A massa molecular e o mol foram definidos na Seç. 22-3. A última coluna da tabela será discutida na seção seguinte

[3] Não consideramos o peso do gás, cujo efeito é desprezível, a não ser se o volume do gás for muito grande, como é o caso da atmosfera (veja a Seç. 17-3 e o Probl. 43).

[4] Voltaremos a esse assunto na Seç. 24-2, onde discutiremos a distribuição de velocidades moleculares.

Essas velocidades moleculares são da mesma ordem de grandezas da velocidade do som à mesma temperatura. Por exemplo, no ar a 0°C, v_{qm} = 485 m/s e a velocidade do som é 331 m/s e no hidrogênio v_{qm} = 1.838 m/s e o som se propaga neste gás a 1.286 m/s. Esse resultado deveria ser esperado, de acordo com nosso modelo de um gás (veja Probl. 34). A propagação de uma onda sonora em um gás é visualizada como um movimento direcional das moléculas como um todo, superposto a seus movimentos caóticos. Logo a energia da onda sonora é transportada como energia cinética de uma molécula à seguinte, por colisão. As moléculas, apesar de serem dotadas de altas velocidades, não se deslocam muito no intervalo de tempo correspondente a um período de vibração sonora; elas são confinadas a regiões pequenas do espaço pelo efeito do número elevado de colisões.[5] Entretanto, a energia da onda sonora é comunicada de molécula a molécula com uma velocidade grande, apesar de não esperarmos que a velocidade do som seja *exatamente* igual a v_{qm}, assunto que esclareceremos no Exemplo 6.

EXEMPLO 4

Suponha que a velocidade do som em um gás seja igual à velocidade quadrática média das suas moléculas. Mostre então que a velocidade do som em um gás ideal depende da temperatura.

A massa específica de um gás é

$$\rho = \frac{nM}{V}$$

onde n é o número de moles do gás, M é o peso molecular (gramas/mol). Combinando isso com a lei dos gases,

$$pV = nRT,$$

teremos

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}.$$

Da Eq. 23-4 obtemos

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}};$$

portanto, a velocidade do som v_1 à temperatura T_1 está relacionada com a sua velocidade v_2 à temperatura T_2 por:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Por exemplo, se a velocidade do som a 273 K for 332 m/s no ar, a 300 K ela será

$$\sqrt{\frac{300}{273}} \times 332 \text{ m/s} = 348 \text{ m/s}.$$

Nosso resultado mudaria se a velocidade do som, ao invés de ser igual à velocidade quadrática média das moléculas do gás, fosse proporcional a ela?

---

[5] Isso explica porque há um certo atraso entre o instante em que um vidro de amônia é aberto num canto de uma sala e o instante em que o cheiro é sentido no outro canto. Apesar de a velocidade das moléculas ser grande, o grande número de colisões impede o avanço rápido das moléculas de amônia. Elas difundem-se através do ar a velocidades pequenas comparadas com as velocidades moleculares.

23-5 *INTERPRETAÇÃO CINÉTICA DA TEMPERATURA*

Se multiplicarmos pelo volume V ambos os membros da Eq. 23-3 obtemos

$$pV = \tfrac{1}{3}\rho V \overline{v^2}$$

sendo ρV simplesmente a massa total do gás e ρ sua densidade. Podemos também exprimir a massa do gás como nM, onde n é o número de moles e M é o peso molecular. Feita essa substituição, teremos

$$pV = \tfrac{1}{3} n M\overline{v^2}.$$

A quantidade $\frac{1}{3}nM\overline{v^2}$ é igual a dois terços da energia cinética total de translação das moléculas, isto é, $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}nM\overline{v^2})$.[6] Podemos então escrever

$$pV = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}nM\overline{v^2});$$

mas a equação do estado de um gás ideal é

$$pV = nRT.$$

Combinando essas duas expressões, obtemos

$$\tfrac{1}{2}M\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}RT \qquad (23\text{-}5)$$

ou seja, *a energia cinética total de translação por mol das moléculas de um gás ideal é proporcional à temperatura.* Podemos dizer que este resultado, Eq. 23-5, é necessário para ajustar a teoria cinética à equação de estado de um gás ideal, ou podemos considerar a Eq. 23-5 como uma definição da temperatura de um gás, com base na teoria cinética dos gases que é uma teoria microscópica. Qualquer que seja a posição que assumirmos, abre-se uma nova perspectiva para a noção de temperatura.

A temperatura de um gás está relacionada com a energia cinética total de translação em relação ao centro de massa do gás. A energia cinética associada ao movimento do centro de massa do gás não influi na temperatura dele. Na Seç. 23-3 supusemos o movimento caótico das moléculas do gás como parte integrante da nossa definição microscópica de gás ideal e na Seç. 23-4 calculamos $\overline{v^2}$ baseados nesta suposição.

Uma distribuição caótica das velocidades moleculares acarretaria o repouso do centro de massa, por isso devemos utilizar um referencial no qual o centro de massa do gás esteja em repouso. Em qualquer outro referencial as velocidades das moléculas serão acrescidas de **u** (velocidade do centro de massa no referencial escolhido); logo, os movimentos não serão mais caóticos, levando a valores diferentes de $\overline{v^2}$. A temperatura de um gás em um dado recipiente não deve aumentar se pusermos o recipiente num trem em movimento!

---

[6] Se N for o número total de moléculas e m a massa de cada uma teremos $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \ldots = \frac{1}{2}mN\left[\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots}{N}\right] = \frac{1}{2}mN\overline{v^2}$, onde mN $(= nM)$ é a massa total do gás.

Dividamos agora a Eq. 23-5 pelo número de Avogadro, N_0, que é o número de moléculas por mol de um gás (veja a nota na Seç. 22-3). Assim, $M/N_0\,(= m)$ é a massa de uma molécula e teremos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M}{N_0}\right)\overline{v^2} = \frac{1}{2}\,m\overline{v^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N_0}\right)T.$$

$\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ é a energia cinética média de translação por molécula. A razão R/N_0 — que chamaremos de *constante de Boltzmann*, k — desempenha o papel de constante do gás por molécula. Teremos

$$\tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}kT \tag{23-6}$$

sendo[7]

$$k = \frac{R}{N_0} = \frac{8{,}317 \text{ joules/mol K}}{6{,}023 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}} =$$
$$= 1{,}380 \times 10^{-23} \text{ joule/molécula K}.$$

Voltaremos a falar na constante de Boltzmann no Cap. 24.

Na última coluna da Tab. 23-1 relacionamos valores calculados de $\frac{1}{2}Mv_{qm}^2$. Como é previsto pela Eq. 23-5, esta quantidade (energia de translação por mol) tem aproximadamente o mesmo valor para todos os gases às mesmas temperaturas, no caso a zero graus Celsius. Da Eq. 23-6 concluímos que à mesma temperatura T a razão das velocidades quadráticas médias das moléculas de dois gases diferentes é igual à raiz quadrada do inverso da razão de suas massas. Isto é, de

$$T = \frac{2}{3k}\,\frac{m_1\overline{v_1^2}}{2} = \frac{2}{3k}\,\frac{m_2\overline{v_2^2}}{2}$$

obtemos

$$\sqrt{\frac{\overline{v_1^2}}{\overline{v_2^2}}} = \frac{v_{1qm}}{v_{2qm}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \tag{23-7}$$

Podemos aplicar a Eq. 23-7 ao estudo da difusão de dois gases diferentes através das paredes porosas de um recipiente colocado no vácuo. O gás mais leve, cujas moléculas têm maior velocidade média, escapará mais rapidamente do que o gás mais pesado. A razão do número de moléculas dos dois gases que atravessam a parede porosa em um intervalo de tempo curto será igual à raiz quadrada da razão inversa de suas massas, $\sqrt{m_2/m_1}$. Por esse processo de difusão é que se faz a separação do U^{235} (físsil, cuja abundância é de 0,7% no urânio natural) do U^{238} (de abundância 99,3%), contidos em uma amostra normal de urânio. Citando o relatório Smyth:[8]

Já em 1896, *Lord* Rayleigh mostrara que uma mistura de gases de pesos atômicos diferentes poderia ser separada por meio da difusão através de uma parede porosa, no vácuo. Devido à sua maior velocidade média, as moléculas do gás mais leve se difundem mais rapidamente através da parede porosa, de modo que o gás que passar

[7] Ver rodapé da Seç. 22-3.

[8] *A General Account of the Development of Methods of Using Atomic Energy for Military Purposes...*, H. D. Smyth, U. S. Government Printing Office, 1945.

pela parede (i.e., o "difusato") fica enriquecido do constituinte mais leve da mistura e o gás residual, que não passou pela parede, fica empobrecido do componente mais leve. O gás mais enriquecido do componente mais leve é o chamado "difusato instantâneo"; é a parte que difunde antes do empobrecimento apreciável do resíduo. Supondo que a taxa de difusão seja inversamente proporcional à raiz quadrada dos pesos moleculares,[9] o fator de separação do difusato instantâneo, chamado "fator de separação ideal" α é dado por

$$\alpha = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}},$$

sendo M_1 o peso molecular do gás mais leve e M_2 o do gás mais pesado. A aplicação desta fórmula ao caso do urânio serve para ilustrar a importância do problema da separação. Desde que o urânio não é um gás, devemos usar compostos gasosos dele. Um composto conveniente é o hexafluoreto de urânio, UF_6 . . . O flúor, tendo apenas um isótopo, os dois hexafluoretos importantes são $U^{235}F_6$ e $U^{238}F_6$; seus moleculares são 349[g/mol] e 352[g/mol]. Deste modo, se uma fração pequena de hexafluoreto é levada a difundir através de uma parede porosa, o difusato será enriquecido em $U^{235}F_6$ pelo fator

$$\alpha = \sqrt{\frac{352}{349}} = 1{,}0043\ldots$$

Para separar os isótopos de urânio, muitos estágios sucessivos (isto é, uma cascata) devem ser usados... Estudos realizados por Cohen e outros mostraram que o melhor arranjo para esses estágios sucessivos seria tal que metade do gás que fosse bombeado em cada estágio difundisse através da parede porosa e a outra metade (empobrecida) retornasse para alimentar o estágio mais baixo subseqüente... Se desejarmos produzir $U^{235}F_6$ com pureza de 99% e se usarmos uma cascata na qual cada estágio tenha um fator de enriquecimento razoável, então seriam necessários aproximadamente 4.000 estágios... A maior parte do material que sai da cascata é reciclado várias vezes. Os cálculos mostram que, para uma usina de separação real de urânio pode ser preciso forçar através da parede porosa do primeiro estágio 100.000 vezes o volume do gás que chega ao último estágio da cascata (isto é, o produto desejado, $U^{235}F_6$).

23-6 *FORÇAS INTERMOLECULARES*

As forças intermoleculares são de natureza eletromagnética. Todas as moléculas contêm cargas elétricas em movimento. As moléculas são eletricamente neutras, quer dizer, a carga elétrica negativa dos elétrons contrabalança a carga elétrica positiva dos núcleos. Isso, entretanto, não significa ausência de interação elétrica entre as moléculas. Pelo contrário, quando duas moléculas se aproximam, suas cargas são perturbadas mutuamente, afastando-se de suas posições usuais, de modo que as distâncias médias entre cargas de sinais contrários, nas duas moléculas, ficam ligeiramente menores do que as distâncias médias entre cargas de mesmo sinal. Resulta assim uma força intermolecular de atração. Este rearranjo interno ocorre apenas quando as moléculas estão bastante próximas umas das outras; essas forças, portanto, têm apenas ação a distâncias curtas, isto é, são forças de curto alcance. Se as moléculas se aproximarem demasiadamente, de modo que suas cargas externas começam a se superpor, as forças intermoleculares tornam-se repulsivas. As moléculas se repelem porque não há meios de elas se rearranjarem internamente de modo a evitar a repulsão dos elétrons externos adjacentes. Essa repulsão é que explica a analogia entre a colisão de moléculas de um gás e a colisão entre bolas de bilhar. Se essa

[9] Note que a razão m_2/m_1 das massas das duas moléculas dos gases diferentes é a mesma razão M_2/M_1 de seus pesos moleculares, porque estes se referem ao mesmo número de moléculas. Examine a Eq. 23-7.

repulsão não existisse, as moléculas não rebateriam nas colisões mas penetrariam umas nas outras.

Suponhamos que as moléculas sejam aproximadamente esféricas. As forças intermoleculares poderiam, neste caso, ser descritas graficamente traçando a energia potencial, U de duas moléculas, como função de distância r entre seus centros. A força F que atua em cada molécula se relaciona com a energia potencial pela equação $F = -dU/dr$. Na Fig. 23-3a apresentamos uma curva típica de $U(r)$. Podemos considerar uma molécula fixa em O; então a outra molécula será repelida quando a inclinação de $U(r)$ for negativa e atraída quando ela for positiva. Em $r = r_0$ não existe força entre as moléculas; a inclinação aí é nula. Na Fig. 23-3b traçamos as forças mútuas $F(r)$ correspondentes a essa função energia potencial. A energia total das duas moléculas que se chocam é representada pela linha E da Fig. 23-3a. A interseção desta linha como $U(r)$ é um "ponto de inversão" do movimento (veja Seç. 8-5). A separação entre os centros das duas moléculas, no "ponto de inversão", é a menor distância entre eles. A distância para a qual a energia potencial é nula pode ser considerada, aproximadamente, como a de máxima aproximação em uma colisão, ou seja, como o diâmetro da molécula. As moléculas monoatômicas têm diâmetros de cerca de $2{,}5 \times 10^{-10}$ m. As forças entre moléculas praticamente deixam de existir a mais ou menos 10^{-9} m, isto é, aproximadamente à distância de quatro diâmetros, o que mostra que as forças moleculares são realmente de alcance muito curto. A distância r_0 para a qual o potencial é mínimo (ponto de equilíbrio) é de cerca de $3{,}5 \times 10^{-10}$ m para moléculas monoatômicas. É evidente que moléculas diferentes têm tamanhos diferentes e diferentes arranjos internos de cargas, de modo que as forças intermoleculares variam de molécula para molécula. Entretanto, elas apresentam sempre o comportamento qualitativo indicado nas figuras.[10]

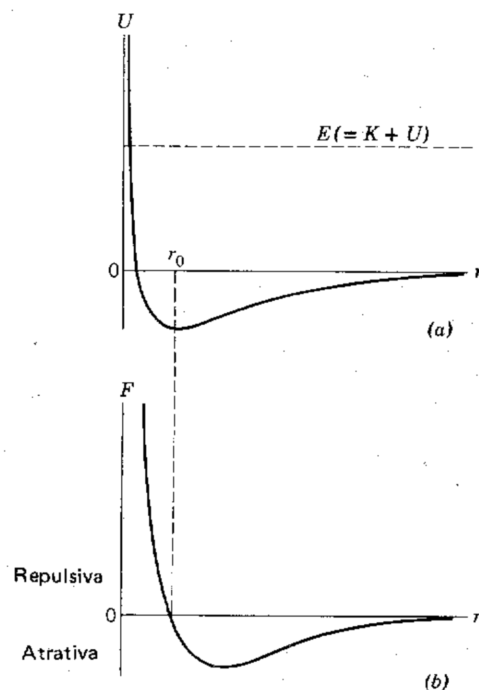


figura 23-3
(a) Energia potencial mútua de duas moléculas, em função da distância entre elas. E representa a energia mecânica total ($= K + U$). (b) A força mútua, $-dU/dr$, correspondente a essa energia potencial. U é mínima em r_0, distância para a qual $F = 0$.

As moléculas de um sólido vibram em torno da posição de equilíbrio r_0; sua energia total E é negativa, ou seja, está abaixo do eixo horizontal da Fig. 23-3a. As moléculas neste caso não têm energia suficiente para escapar do vale de potencial (quer dizer, das forças atrativas de ligação). Os centros de vibração O são mais ou menos fixos nos sólidos. Em um líquido as moléculas têm maior energia de vibração em torno de centros que podem mover-se livremente mas que permaneçam aproximadamente à mesma distância uns dos outros. Essas moléculas têm sua maior energia cinética no estado gasoso. Em um gás a distância média entre moléculas é consideravelmente maior do que o alcance efetivo das forças intermoleculares, e as moléculas movem-se em linha reta entre duas colisões sucessivas. A relação entre o modelo cinético de um gás e as forças intermoleculares foi discutida por Clerk Maxwell da seguinte maneira: "Ao invés de dizer que as partículas são duras, esféricas e elásticas, podemos, se nos agradar, dizer que as partículas são centros de forças, cuja ação é insensível exceto a certas distâncias pequenas, onde elas bruscamente aparecem como forças repulsivas de grande intensidade. É evidente que ambas as suposições acarretarão os mesmos resultados".

É interessante comparar as forças intermoleculares medidas com a força de atração gravitacional entre as moléculas. Se escolhermos, por exemplo, a distância de 4×10^{-10} m, a força entre dois átomos de hélio é aproximadamente 6×10^{-13} N. A força de atração gravitacional a essa distância é 7×10^{-42} N, 10^{29} vezes menor do que a força intermolecular! Este é um resultado típico, que ilustra como as forças gravitacionais são pequenas em relação às forças intermoleculares. Apesar de estas serem pequenas, segundo os padrões ordinários, devemos lembrar que as massas das moléculas são tão pequenas (aproximadamente 10^{-26} kg) que essas forças podem comunicar-lhes acelerações instantâneas da ordem de 10^{15} m/s² ($10^{14}\,g$). Na realidade, essas acelerações existem apenas em intervalos de tempo curtos, porque uma molécula pode sair muito rapidamente da distância de influência da outra.

23-7 *CALOR ESPECÍFICO DE UM GÁS IDEAL*

Imaginamos que as moléculas de um gás ideal sejam esferas elásticas duras, o que equivale a dizer que não existem forças entre as moléculas exceto durante as colisões entre elas, e ainda que essas moléculas não são deformadas pelas colisões. Se assim for, a energia interna de um gás ideal será inteiramente cinética, uma vez que a energia potencial não poderá existir, como conseqüência das supo-

[10] Veja "The Force between Molecules", por B. V. Derjaguin, *Scientific American*, julho de 1960, que discute a medida da atração molecular entre corpos macroscópicos.

sições anteriores. Já vimos que a energia cinética média de translação, por molécula, é $3/2\,kT$; então a energia interna de um gás constituído de N moléculas é[11]

$$U = \tfrac{3}{2}NkT = \tfrac{3}{2}nRT. \tag{23-8}$$

A teoria cinética prediz então que *a energia interna de um gás ideal é diretamente proporcional à sua temperatura Kelvin e depende apenas desta temperatura*, sendo independente da pressão e do volume. Deste resultado podemos agora obter informações a respeito do calor específico de um gás ideal.

O *calor específico* (ou *calor de massa*), de uma substância é a quantidade de calor necessária para variar de uma unidade a temperatura da unidade de massa da substância. Uma unidade de massa conveniente é o mol. O calor específico correspondente é chamado *capacidade térmica molar* ou *calor específico molar* e é representado por C. Apenas dois tipos de capacidades térmicas são importantes no estudo dos gases: a capacidade a volume constante, C_v, e a capacidade a pressão constante, C_p.

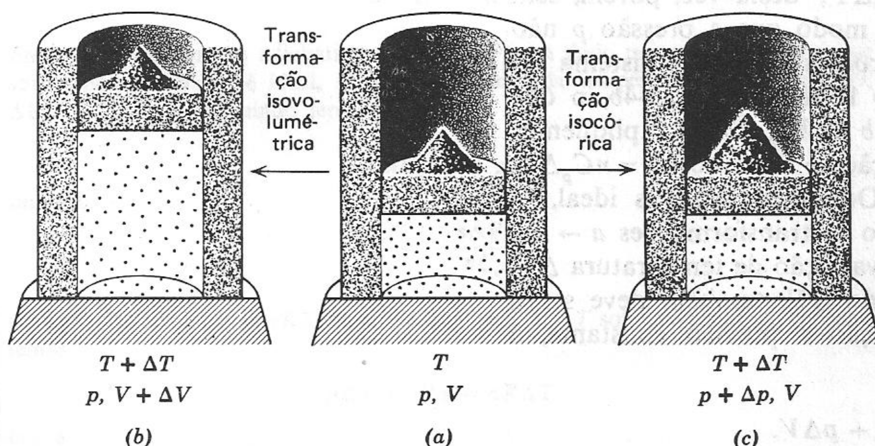


figura 23-4
A temperatura de determinada massa de gás é aumentada do mesmo valor por uma transformação isobárica ($a \rightarrow b$) e por uma transformação isovolumétrica ($a \rightarrow c$).

Encerremos um certo número de moles de um gás ideal em um cilindro provido de um êmbolo, como é mostrado na Fig. 23-4*a*. O cilindro está em contato com um reservatório de calor cuja temperatura pode ser variada à vontade, de forma que podemos transmitir calor ao sistema ou retirar calor dele. O gás está a uma pressão p tal que a força exercida para cima, no pistão (sem atrito),

---

[11] Veremos na Seç. 23-8 que este resultado se aplica apenas a gases monoatômicos, para os quais não existe nem energia de rotação nem de vibração. Somente neste caso, podemos dizer que a energia U é igual à energia cinética de *translação*.

equilibre o peso do pistão e a carga de areia. O estado do sistema é representado pelo ponto a no diagrama $p - V$ da Fig. 23-4*d*. Este diagrama mostra duas isotermas; todos os pontos de uma delas correspondem à temperatura T e todos os pontos da outra à temperatura (mais alta) $T + \Delta T$.

Aumentemos de ΔT a temperatura do sistema, elevando lentamente a temperatura do reservatório. À medida que aumentarmos a temperatura, adicionemos areia ao êmbolo, de modo a impedir qualquer variação do volume V. Esta *transformação a volume constante* conduz o sistema do estado inicial da Fig. 23-4*a* ao estado final da Fig. 23-4*c*, o que equivale a ir desde o ponto a ao ponto c da Fig. 23-4*d*. Apliquemos a 1.ª lei da termodinâmica,

$$Q = \Delta U + W$$

a essa transformação. Da definição de C_v temos $Q = nC_v\Delta T$; e também sabemos que $W (= p\Delta V) = 0$, porque $\Delta V = 0$. Assim,

$$\Delta U = nC_v\Delta T. \qquad (23\text{-}9)$$

Façamos o sistema retornar ao seu estado inicial e aumentemos novamente sua temperatura de ΔT; desta vez, porém, sem alterar a carga de areia no pistão, de modo que a pressão p não varie. Esta *transformação a pressão constante* leva o sistema do estado inicial da Fig. 23-4*c* ao estado final da Fig. 23-4*b*, o que equivale a ir desde o ponto a ao ponto b da Fig. 23-4*d*. Apliquemos a 1.ª lei a *essa* transformação. Da definição de C_p temos $Q = nC_p\Delta T$. Sabemos também que $W = p\Delta V$. Ora, para um gás ideal, U depende apenas da temperatura. Como as transformações $a \rightarrow b$ e $a \rightarrow c$ da Fig. 23-4 envolvem a mesma variação de temperatura ΔT, a variação de energia interna envolvida ΔU, também deve ser a mesma. Assim, para uma transformação a pressão constante, a 1.ª lei leva a

$$nC_p\Delta T = nC_v\Delta T + p\Delta V.$$

Aplicando a equação de estado, $pV = nRT$ à transformação a pressão constante $a \rightarrow b$ temos

$$p\Delta V = nR\Delta T.$$

Combinando estas equações obtém-se

$$C_p - C_v = R, \qquad (23\text{-}10)$$

o que mostra que a capacidade térmica de um gás ideal a pressão constante é sempre maior que sua capacidade térmica a volume constante e que essa diferença é igual à constante universal dos gases $R(= 8{,}31$ joule/mol K ou $1{,}99$ cal/mol K). Apesar de a Eq. 23-10 ser exata apenas para um gás ideal, ela é aproximadamente verdadeira para gases a baixas pressões (*veja* Tab. 23-2). Observe que não fizemos uso direto da relação $U = \frac{3}{2}nRT$ para obter o resultado acima; utilizamos apenas o fato de U ser função somente da temperatura.

Se pudermos calcular C_v, então a Eq. 23-10 nos dará C_p, e vice-versa. *Podemos* calcular C_v combinando a Eq. 23-9 com o

resultado da teoria cinética para a energia interna de um gás ideal, $U = \frac{3}{2} nRT$ (Eq. 23-8). Assim, no limite das variações diferenciais,

$$C_v = \frac{dU}{ndT} = \frac{1}{n} \frac{d}{dT} (\tfrac{3}{2} nRT) = \tfrac{3}{2} R. \qquad (23\text{-}11)$$

Este resultado (aproximadamente 3 cal/mol K) é razoavelmente bom para gases monoatômicos. Entretanto, está em sério desacordo com os valores obtidos para os gases diatômicos e poliatômicos (veja Tab. 23-2). Isso sugere que a Eq. 23-8 não representa um caso geral. (Ver rodapé 11, pág. 219.) Desde que aquela relação decorreu diretamente do modelo cinético de um gás, concluímos que o modelo deve ser alterado se quisermos que a teoria cinética sobreviva como aproximação válida do comportamento dos gases reais.

EXEMPLO 5

Mostre que, para um gás ideal submetido a uma transformação adiabática pV^γ = constante, onde $\gamma = C_p/C_v$.

Apliquemos a primeira lei da termodinâmica,

$$Q = \Delta U + W.$$

Em uma transformação adiabática $\Delta Q = 0$, ΔW será dado por $p\Delta V$. Uma vez que supusemos que o gás é ideal, U depende apenas da temperatura; pela Eq. 23-9, $\Delta U = nC_v\Delta T$. Substituindo teremos

$$0 = nC_v\Delta T + p\Delta V$$

ou seja,

$$\Delta T = -\frac{p\Delta V}{nC_v};$$

para um gás ideal, $pV = nRT$, de modo que, se p, V e T sofrem variações pequenas, temos

$$p\Delta V + V\Delta p = nR\Delta T$$

isto é,

$$\Delta T = \frac{p\Delta V + V\Delta p}{nR}$$

Igualando estas duas expressões e usando a Eq. 23-10 ($C_p - C_v = R$) obtemos, depois de rearranjar os termos,

$$p\Delta VC_p + V\Delta pC_v = 0;$$

dividindo por pVC_v e lembrando que, por definição, $C_p/C_v = \gamma$, chegamos ao resultado

$$\frac{\Delta p}{p} + \gamma\frac{\Delta V}{V} = 0;$$

no limite, esta relação reduz-se a

$$\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V} = 0$$

ou seja (supondo γ constante), depois de integrar:

$$pV^\gamma = \text{constante}. \qquad (23\text{-}12)$$

O valor da constante é proporcional à quantidade de gás. Na Fig. 23-5 comparamos os comportamentos isotérmico e adiabático de um gás ideal.

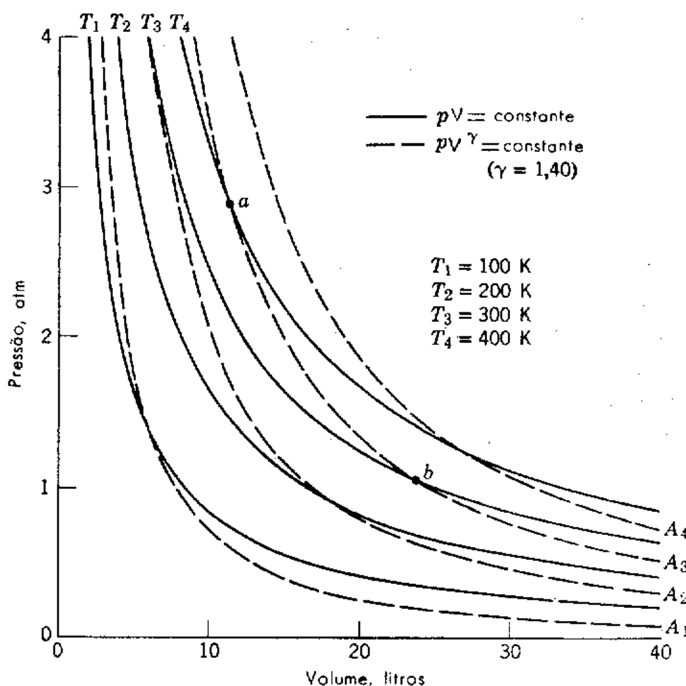


figura 23-5
T_1, T_2 e T_3 indicam como a pressão de um mol de gás varia com a variação de seu volume, mantendo-se constante sua temperatura (transformação isotérmica). A_1, A_2 e A_3 representam a variação da pressão de um gás ideal como função de seu volume, sem troca de calor (transformação adiabática). Um *aumento* adiabático de volume (por exemplo, de *a* para *b* ao longo de A_3) é sempre acompanhado de um *decréscimo* de temperatura, desde que, em *a*, $T = 400$ K enquanto em *b*, $T = 300$ K.

EXEMPLO 6

As compressões e rarefações em uma onda sonora de audiofreqüência são praticamente adiabáticas. Mostre que neste caso a velocidade do som em um gás ideal é dada por

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

No Cap. 20 mostramos que a velocidade do som é dada por $v = \sqrt{B/\rho}$, onde ρ é a massa específica do gás e B o seu módulo volumétrico, $B = -V(\Delta p/\Delta V)$. Entretanto, B dependerá das condições reinantes quando a pressão estiver variando. Se a variação de pressão se faz lentamente, de modo que possamos supor a temperatura constante, teremos no limite:

$$B_{\text{isotérmico}} = -V\left(\frac{dp}{dv}\right)_{\text{isotérmico.}} \qquad (23\text{-}13)$$

Em uma transformação isotérmica de um gás ideal temos

$$pV = \text{constante};$$

derivando em relação a V tem-se

$$p + V\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{isotérmico}} = 0.$$

Combinando este resultado com a Eq. 23-13 teremos

$$B_{\text{isotérmico}} = p.$$

Na onda sonora, entretanto, as variações são tão rápidas que as condições não são isotérmicas mas aproximadamente adiabáticas. O módulo volumétrico apropriado será então

$$B_{\text{adiabático}} = -V\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{adiabático.}} \qquad (23\text{-}14)$$

Para a transformação adiabática de um gás ideal vale a relação

$$pV^\gamma = \text{constante};$$

derivando em relação a V,

$$p\gamma V^{\gamma-1} + V^{\gamma}\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{adiabático}} = 0.$$

Este resultado, combinado com a Eq. 23-14, leva a

$$B_{\text{adiabático}} = \gamma p$$

e teremos para a velocidade do som

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \qquad (23\text{-}15)$$

Para entender porque as compressões e rarefações são adiabáticas em vez de isotérmicas, lembremos que a compressão de um gás ocasiona um aumento de temperatura e a rarefação uma queda de temperatura a menos que calor seja adicionado ou removido. Em conseqüência, num gás, através do qual o som se propaga, as regiões comprimidas são mais quentes do que as rarefeitas. Em princípio, calor seria transferido das regiões comprimidas para as rarefeitas. A taxa de transferência de calor por unidade de área depende (ver Seç. 22-4), entretanto, da condutividade térmica do gás e da distância entre regiões de compressão e rarefação adjacentes, que é meio comprimento de onda. O comprimento de onda do som audível é muito grande para que não haja qualquer fluxo de calor significativo, mesmo em gases que são os melhores condutores de calor. Logo as condições, na propagação do som, são essencialmente adiabáticas e não isotérmicas. De fato, a condição para a quebra da validade de aproximação adiabática é que o comprimento de onda do som seja comparável com o *livre percurso médio* das moléculas no gás, que é uma situação bem extrema (ver Seç. 24-1).

Newton derivou uma fórmula para a velocidade do som em 1710, quando a única lei para gases conhecida era a de Boyle. Ele considerou condições isotérmicas no lugar de adiabáticas e obteve $v = \sqrt{p/\rho}$ em vez do valor (correto) de $\sqrt{\gamma p/\rho}$. Newton foi capaz de obter um bom acordo com os resultados experimentais fazendo correções razoáveis em seu modelo básico.[12] Mais de um século depois, em 1816, Laplace mostrou o erro de Newton e apresentou o modelo correto. Devemos lembrar que, naquela época, o conceito de energia não era entendido e que a termodinâmica nem existia.

Este resultado modifica o que foi obtido no Exemplo 4? Você pode explicar por que a velocidade do som em um gás não é a velocidade quadrática média das suas moléculas?

23-8 *EQUIPARTIÇÃO DA ENERGIA*

Clausius, em 1857, sugeriu a primeira modificação do modelo cinético de um gás que pudesse explicar o calor específico dos gases. Lembremos que supusemos, na formulação do nosso modelo, que as moléculas se comportavam como esferas duras e elásticas e que tratamos sua energia como sendo puramente de translação. O calor específico previsto de acordo com este modelo era satisfatório apenas para moléculas monoatômicas. Além disso, por causa do sucesso deste modelo simples na predição correta do comportamento dos gases de qualquer espécie, em intervalos grandes da escala de temperatura, acreditamos que é a energia cinética média de translação das moléculas que determina a grandeza que medimos como temperatura do gás.

[12] Ver "Newton's Derivation of the Velocity of Sound", por Haven Whiteside, *American Journal of Physics*, maio, 1964.

Entretanto, no caso dos calores específicos, interessamo-nos pelas diversas maneiras possíveis de absorção de energia; perguntamos, por exemplo, se uma molécula pode ou não armazenar energia internamente, isto é, em outra forma que não a de energia cinética de translação. Isso seria verdade se tivéssemos idealizado as moléculas não como partículas rígidas, mas como objetos que possuíssem estrutura interna. Neste caso uma molécula tanto poderia rodar e vibrar como possuir movimento de translação. Nas colisões, os modos rotacionais e vibracionais do movimento poderiam ser excitados, e isso contribuiria para a energia interna do gás. Eis aí então um modelo que nos torna capazes de modificar a formulação da teoria cinética para a energia interna de um gás.

Calculemos a energia total de um sistema que contenha um número grande de moléculas, consideradas como corpos que possuem estrutura interna. A energia consistirá de energia cinética de translação com termos como $\frac{1}{2}mv_x^2$; de energia cinética de rotação, com termos como $\frac{1}{2}I\omega_x^2$; de energia cinética de vibração dos átomos na molécula, com termos como $\frac{1}{2}\mu v^2$ (onde μ é a massa reduzida), e de energia potencial de vibração dos átomos na molécula, com termos como $\frac{1}{2}kx^2$. Apesar de existirem outros tipos de energia, tais como energia magnética, para os gases a energia total será expressa com suficiente precisão mediante esse tipo de termos. Mesmo sendo de origem diferente, todas as parcelas da energia total são formalmente idênticas, isto é, trata-se de uma constante positiva multiplicada pelo quadrado de uma grandeza que pode ser tanto negativa quanto positiva. Pode-se mostrar, em mecânica estatística, que *se o número de partículas for grande e a mecânica newtoniana válida, esses termos todos têm o mesmo valor médio, e que esse valor médio depende apenas da temperatura.* Em outras palavras, a energia disponível depende apenas da temperatura e se distribui em quantidades iguais para cada modo independente em que a molécula pode absorver a energia. O teorema aqui enunciado é chamado *teorema da equipartição da energia*, e foi deduzido por Clerk Maxwell. Cada modo independente de absorção da energia é chamado *grau de liberdade.*

Da Eq. 23-8 obtemos a energia cinética de translação por mol das moléculas de um gás, que é $3/2RT$. A energia de translação por mol é a soma das três parcelas $\frac{1}{2}M\overline{v_x^2}$, $\frac{1}{2}M\overline{v_y^2}$ e $\frac{1}{2}M\overline{v_z^2}$. O teorema da equipartição da energia exige que cada parcela contribua com a mesma fração para a energia total por mol, ou seja, $\frac{1}{2}RT$ por grau de liberdade.

As moléculas dos *gases monoatômicos* são dotadas apenas de movimento de translação (não possuem estrutura interna na teoria cinética), e portanto $U = \frac{3}{2}nRT$. Decorre da Eq. 23-11 que $C_v = \frac{3}{2}R \cong 3\,\text{cal/mol K}$. Então, da Eq. 23-10, $C_p = \frac{5}{2}R$ e a razão dos calores específicos é

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1{,}67.$$

Suporemos que as moléculas de um *gás diatômico* constituem pequenos "halteres" (ou seja, duas esferas ligadas por uma barra rígida). Essas moléculas podem girar em torno de qualquer dos seus três eixos ortogonais. Entretanto, seu momento de inércia, em relação ao eixo paralelo à barra rígida, seria desprezível em comparação com os momentos de inércia em relação a eixos perpen-

diculares a essa barra; então a energia de rotação consistiria apenas de dois termos[13] tais como $\frac{1}{2}I\omega_y^2$ e $\frac{1}{2}I\,\omega_z^2$. Pelo princípio de equipartição, cada grau de liberdade de rotação contribui para a energia total com a mesma parcela que o grau de liberdade de translação. Então para as moléculas de gás diatômico, dotadas de movimento de rotação e de translação, tem-se

$$U = 3n(\tfrac{1}{2}RT) + 2n(\tfrac{1}{2}RT) = \tfrac{5}{2}nRT,$$

ou seja,

$$C_v = \frac{dV}{ndT} = \tfrac{5}{2}R \cong 5\,\text{cal/mol K}$$

e

$$C_p = C_v + R = \tfrac{7}{2}R$$

ou

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1{,}40.$$

Nos *gases poliatômicos*, nosso modelo considera cada molécula como constituída de três ou mais esferas (átomos), ligadas por barras rígidas, de modo que a molécula pode girar energeticamente em relação a qualquer dos três eixos ortogonais. Logo, para um gás poliatômico, cujas moléculas possuem tanto translação quanto rotação, temos:

$$U = 3n(\tfrac{1}{2}RT) + 3n(\tfrac{1}{2}RT) = 3nRT,$$

ou ainda

$$C_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = 3R = 6\,\text{cal/mol K},$$

e

$$C_p = 4R$$

ou

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}33.$$

Examinemos experimentalmente esses resultados. Na Tab. 23-2 é apresentada uma relação de capacidades molares, determinadas experimentalmente, para gases comuns a 20°C e sob pressão de 1,0 atm. Observe que, para gases monoatômicos e diatômicos os valores de C_v, C_p e γ se aproximam bem das predições feitas para os gases ideais. Para alguns gases diatômicos, como o cloro, e para a maioria dos gases poliatômicos, os calores específicos experimentalmente determinados são superiores aos valores previstos pela teoria. E mesmo γ não mostra regularidade para os gases poliatômicos. Esses resultados evidenciam que nosso modelo não está ainda suficientemente próximo da realidade.

[13] Já descartamos anteriormente a possibilidade de as moléculas monoatômicas girarem. Na realidade, elas poderiam rodar em relação a qualquer dos três eixos ortogonais, se fossem consideradas como corpos finitos, tais como esferas. Implicitamente, adotamos o ponto material como nosso modelo de molécula monoatômica. No modelo diatômico, congelamos um grau de liberdade, imaginando a molécula como dois pontos materiais ligados por uma barra rígida, porque não poderá haver movimento ao longo dessa barra.

Tabela 23-2

Tipo de Gás	Gás	C_p, cal/mol K	C_v, cal/mol K	C_p/C_v cal/mol K	$\gamma = C_p/C_v$
Monoatômico	He	4,97	2,98	1,99	1,67
	A	4,97	2,98	1,99	1,67
Diatômico	H_2	6,87	4,88	1,99	1,41
	O_2	7,03	5,03	2,00	1,40
	N_2	6,95	4,96	1,99	1,40
	Cl_2	8,29	6,15	2,14	1,35
Poliatômico	CO_2	8,83	6,80	2,03	1,30
	SO_2	9,65	7,50	2,15	1,29
	NH_3	8,80	6,65	2,15	1,31
	C_2H_6	12,35	10,30	2,05	1,20

Não consideramos ainda as contribuições para a energia total devidas às vibrações dos átomos nas moléculas diatômicas e poliatômicas. Podemos modificar nosso modelo de "halteres", imaginando que as moléculas diatômicas seriam constituídas de esferas ligadas por molas, ao invés de barras rígidas. Esse novo modelo melhora bem os resultados, em alguns casos. Entretanto ao invés de um modelo teórico dos gases, teríamos um modelo empírico, que mudaria de um gás para outro. Poderíamos, desse modo, obter uma descrição razoavelmente boa do comportamento molecular dos gases. O modelo empírico seria útil evidentemente, mas deixaria de ser um modelo fundamental.

Para esclarecer melhor estas idéias, consideremos a Fig. 23-6, que mostra como varia o calor específico molar do hidrogênio em função da temperatura. O valor 5 cal/mol K, predito para moléculas diatômicas no nosso modelo, é característico do hidrogênio apenas para temperaturas entre 250 K e 750 K. Acima de 750 K, C_v aumenta continuamente até 7 cal/mol K e abaixo de 250 K, C_v decresce continuamente até 3 cal/mol K. O calor específico molar de outros gases também se comporta de maneira semelhante.

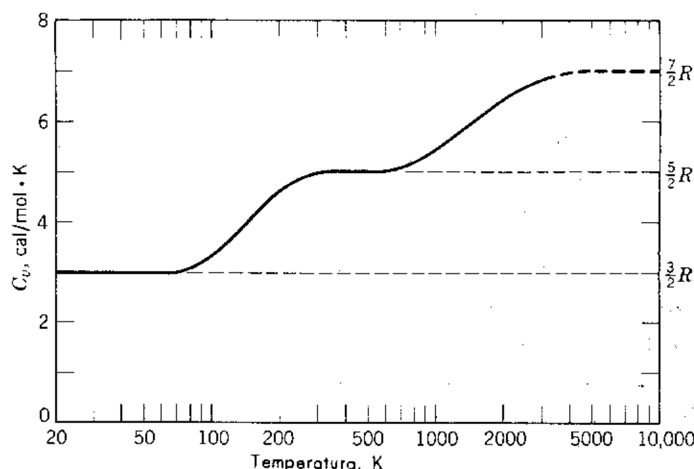


figura 23-6
Variação do calor molar C_v do hidrogênio em função da temperatura. T está representada em escala logarítmica. O hidrogênio dissocia-se antes de ser alcançada a temperatura de 3.200 K. A parte pontilhada da curva refere-se a uma molécula diatômica que não se dissocia antes de 10.000 K.

Eis aqui uma explicação possível deste fato. Aparentemente (veja Exemplo 7) a molécula de hidrogênio, a baixas temperaturas, tem apenas energia de translação, sendo por alguma razão impedida de girar. Quando a temperatura aumenta, a rotação torna-se possível, de modo que, à temperatura ordinária, a molécula de hidrogênio comporta-se como em nosso modelo de halteres. A temperaturas

elevadas as colisões entre moléculas provocam vibrações em seus átomos e as moléculas deixam de comportar-se como corpos rígidos. Diferentes gases, devido às suas estruturas moleculares diferentes, podem apresentar esses efeitos a temperaturas diferentes. Assim, a molécula de cloro deve vibrar, à temperatura ambiente.

Apesar de esta descrição ser essencialmente correta, e levar-nos a uma compreensão mais profunda do comportamento das moléculas, ela está em contradição com a teoria cinética clássica. Com efeito, a teoria cinética se fundamenta na Mecânica Newtoniana, aplicada a um grande número de partículas, e a equipartição da energia é uma conseqüência necessária desta Mecânica Estatística Clássica. Mas, *se for válida a equipartição da energia, não importa o que aconteça à energia interna quando a temperatura varia, cada parte da energia — de translação, rotação e vibração — deve participar igualmente da variação.* Não existe nenhum mecanismo clássico para explicar tal comportamento. A teoria cinética exige que o calor específico dos gases seja independente da temperatura.

Logo, chegamos ao limite da validade da Mecânica Clássica quando tentamos explicar a estrutura de átomos ou moléculas. Do mesmo modo que os princípios newtonianos falharam no domínio das velocidades muito grandes (próximas da velocidade da luz) eles falharam também no domínio das dimensões muito pequenas. A teoria da relatividade modifica as idéias newtonianas a fim de explicar o comportamento dos sistemas físicos no domínio das velocidades altas. A física quântica modifica as idéias newtonianas para explicar o comportamento dos sistemas físicos no domínio das dimensões muito pequenas. Tanto a teoria da relatividade quanto a mecânica quântica são generalizações da teoria clássica, significando com isso que elas levam aos resultados newtonianos (corretos) nos domínios em que a mecânica newtoniana descreve de maneira precisa as observações experimentais. Nos dois capítulos seguintes confinaremos nossa atenção a aplicações frutíferas da termodinâmica e da teoria cinética a sistemas "clássicos".

EXEMPLO 7

Segundo a teoria quântica, a energia interna de um átomo ou molécula é "quantizada", significando que a energia interna do átomo não pode ter um valor arbitrário, pertencente a uma série contínua, *mas somente determinados valores discretos.* Depois de passar de um estado de energia mais baixa para um estado de energia mais alta, o átomo pode liberar essa energia, emitindo radiação cuja energia é igual à diferença de energia entre o estado de energia mais alta e o estado de energia mais baixa.

Quando dois átomos colidem, uma parte de sua energia de translação pode ser convertida em energia interna de um deles ou de ambos. Neste caso, trata-se de uma colisão inelástica, porque a energia cinética de translação não é conservada. A energia cinética média de translação de um átomo nos gases é dada por $\frac{3}{2}kT$. Quando a temperatura é aumentada para um valor tal que $\frac{3}{2}kT$ seja aproximadamente igual a algum valor permitido para as energias de excitação interna dos átomos, um número considerável destes átomos pode absorver, através de colisões inelásticas, energia suficiente para ser levado a estados de energia interna mais elevada. Isso poderá ser observado porque, após certo intervalo de tempo, será emitida a radiação correspondente à energia absorvida.

(*a*) Calcule a energia cinética média de translação por molécula, em um gás à temperatura ambiente.

Temos, para $T = 300$ K,

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2}kT &= \tfrac{3}{2} \times 1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{joule/molécula K} \times 300\,\text{K}\\ &= 6{,}21 \times 10^{-21}\ \text{joule/molécula}\\ &= 3{,}88 \times 10^{-2}\ \text{eV/molécula.}\end{aligned}$$

Esse valor é aproximadamente igual a $\frac{1}{25}$ eV por molécula. Algumas moléculas terão energias mais altas e outras energias mais baixas do que esse valor médio.

(*b*) O primeiro estado excitado permitido (interno) do átomo de hidrogênio está 10,2 eV acima de seu estado de energia mais baixa (estado fundamental). Qual é a temperatura necessária para excitar um grande número de átomos de hidrogênio, a fim de que eles emitam radiação com esta energia?

Queremos que

$$\tfrac{3}{2}kT = 10{,}2\ \text{eV}.$$

Pelo que precede temos

$$\tfrac{3}{2}k(300\ \text{K}) = \tfrac{1}{25}\ \text{eV};$$

logo,

$$T = 300\ \text{K} \times 10{,}2/(\tfrac{1}{25}) \cong 7{,}5 \times 10^4\ \text{K}.$$

Na realidade, como muitas moléculas têm energias muito maiores do que o valor médio, uma excitação apreciável ocorrerá a temperaturas mais baixas.

Podemos agora avaliar porque é válida, a temperaturas ordinárias, a suposição da teoria cinética segundo a qual as moléculas não possuem estruturas internas e colidem elasticamente umas com as outras. Apenas em temperaturas suficientemente altas para comunicar às moléculas uma energia cinética média de translação comparável à diferença de energia entre o estado de mais baixa energia e o primeiro estado excitado, é que a estrutura interna da molécula varia e as colisões tornam-se inelásticas. Realmente, pode-se dizer que as primeiras evidências de que a energia interna do átomo é quantizada decorreram de experiências de colisão nos gases, e que a teoria cinética dos gases contém as sementes da teoria quântica.[14]

questões

1. Discutindo a impossibilidade de aplicar as leis da Mecânica a todos os átomos de um sistema macroscópico, Mayer e Mayer afirmam: "A grande complexidade do problema, isto é, o fato de o número de átomos ser grande, é o segredo da sua solução." Discuta esta afirmativa.
2. Existem corpos formados por matéria verdadeiramente contínua?
3. A teoria cinética pressupõe a existência de um grande número de moléculas em um gás. Os gases reais comportam-se como gases ideais, a baixas densidades. Essas afirmações são contraditórias? Se não o são, que conclusões podem tirar-se delas?
4. Supusemos que as paredes do recipiente fossem elásticas para as colisões moleculares. Na realidade, as paredes podem ser inelásticas. Na prática, isso não tem importância, uma vez que as paredes estão à mesma temperatura que o gás. Explique.
5. Nas colisões inelásticas em escala macroscópica, a energia mecânica é dissipada devido ao atrito interno, resultando no aumento da temperatura devido ao crescimento da agitação molecular. Nas colisões inelásticas entre as moléculas existe transformação de energia mecânica em calor?
6. Que argumento você invocaria para desprezar a variação de energia potencial gravitacional das moléculas de um gás?
7. Supusemos que a força exercida pelas moléculas sobre as paredes de um recipiente fosse independente do tempo. Que justifica esta suposição?
8. A velocidade média das moléculas de um gás deve ser nula, uma vez que gás e recipiente não possuem movimento de translação. Explique por que a *velocidade* escalar média não é nula.
9. Considere uma bola de golfe quente sobre um suporte e uma bola de golfe fria que acaba deixar o suporte após ser atingida pelo taco. Os valores numéricos da energia cinética do movimento das moléculas em relação ao suporte podem ser os mesmos em cada caso? Se verdadeiro, qual é a diferença entre os dois casos?
10. Levando em conta as grandezas que devem ser conservadas numa colisão elástica, mostre que em geral as moléculas de um gás não podem ter a mesma veloci-

[14] Ver "On Teaching Quantum Phenomena", por Sir N. F. Mott em *Contemporary Physics*, agosto, 1964.

dade escalar, antes e depois de uma colisão. Seria possível um gás constituído de moléculas que tivessem todas a mesma velocidade escalar?

11. Justifique o fato de a pressão de um gás depender do *quadrado* da velocidade escalar de suas partículas, examinando a dependência da pressão, na freqüência de colisão e na transferência de momento linear das partículas.
12. Por que a temperatura de ebulição de um líquido cresce com o aumento da pressão?
13. Baldes de água quente e fria são deixados ao relento quando a temperatura está abaixo de 0°C. Explicar: (*a*) se os baldes são tampados a água fria congelará primeiro; (*b*) se os baldes não têm tampas é possível que a água quente congele primeiro. (*Sugestão:* Se tomamos massas iguais de água a duas temperaturas iniciais diferentes, a evaporação mais rápida da água mais quente pode diminuir sua massa o suficiente para compensar o maior intervalo de temperatura que ela necessitará cobrir para atingir o ponto de congelamento. Ver "The Freezing of Hot and Cold Water" por G. S. Kell, *American Journal of Physics*, maio, 1969.)
14. Como a velocidade do som é relacionada com as variáveis do gás no modelo da teoria cinética dos gases?
15. A temperatura cinética dos gases (ver Eq. 23-5) é da ordem de 1.000 K nas camadas superiores da atmosfera. Entretanto uma pessoa colocada em tal ambiente congelaria no lugar de se evaporar. Explicar.
16. Por que o tempo permitido para separação por difusão é relativamente curto?
17. Suponha que desejamos obter U^{238} em vez de U^{235} como produto final de um processo de difusão. Poderíamos usar o mesmo processo? Se achar que não, explique como deveria ser modificado o processo de separação.
18. Considere a difusão de gases um no outro (veja ref. 5 na Seç. 23-4). Você pode traçar uma analogia com uma multidão se acotovelando, com muitas "colisões", sobre um plano inclinado de um pequeno ângulo?
19. Você é capaz de descrever uma máquina centrifugadora para separação gasosa? Uma centrifugadora seria melhor do que uma câmara de difusão para separação de gases?
20. Você esperaria que as moléculas reais apresentassem simetria esférica? Em caso negativo, como deveria ser modificada a função energia potencial da Fig. 23-3?
21. Explique como poderíamos manter constante a temperatura de um gás durante um processo termodinâmico.
22. Explique por que a temperatura de um gás cai se ele sofrer uma expansão adiabática.
23. Se o ar quente sobe, como se explica que no topo das montanhas é mais frio do que ao nível do mar?
24. Comente sobre a seguinte afirmação: "Existem duas maneiras de se efetuar um processo adiabático. A primeira é efetuá-lo rapidamente e a segunda é efetuá-lo dentro de uma câmara isolada."
25. Um balão hermeticamente fechado contém um gás muito leve. Abandonado, o balão sobe na atmosfera. Descreva e explique o comportamento térmico e mecânico do balão.
26. Explique por que o calor específico a pressão constante é maior do que o calor específico a volume constante.
27. A radiação dos átomos de um gás é excitada mais comumente por meio de descarga elétrica do que por métodos térmicos. Por quê?
28. Quantidades *extensivas* têm valores que dependem de quais são as fronteiras do sistema, enquanto que quantidades *intensivas* são independentes da escolha das fronteiras. Isto é, quantidades extensivas são necessariamente definidas para o sistema como um todo, enquanto quantidades intensivas se aplicam uniformemente para qualquer pequena porção do sistema. Determine quais das seguintes quantidades são extensivas e quais são intensivas: pressão, volume, temperatura, densidade, massa, energia interna.

problemas

SEÇÃO 23-2

1. Calcule o volume ocupado por um mol de um gás ideal nas "condições normais de temperatura e pressão", isto é, à pressão de uma atmosfera e à temperatura de 0°C.
2. Escreva a equação de estado de um gás ideal em função: (*a*) de p, V, T e do número total de moléculas N contidas em V, (*b*) de p, T, da massa específica ρ e da massa molecular do gás (M).
Resposta: (*a*) $pV = NRT/N_A$, onde N_A é o número de Avogadro. (*b*) $p = \rho RT/M$.

3. Sabendo que $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas/mol, determine o *número de Loschmidt* (definido como o número de moléculas em 1 cm³ nas "condições normais de temperatura e pressão").

4. O melhor vácuo que pode ser obtido no laboratório corresponde à pressão de aproximadamente 10^{-14} atm, cerca de 10^{-10} mm-Hg. Quantas moléculas por centímetro cúbico existem neste "vácuo", à temperatura ambiente? *Resposta:* $2{,}7 \times 10^5$.

5. Um gás ideal possui as seguintes coordenadas de estado: $p = 1$ atm, $V = 3$ litros, $T = 300$ K. Calcule a massa total do gás sabendo que sua massa molecular vale 32 g/mol.

6. Um litro de nitrogênio gasoso, a 40°C e sob pressão de 30 mm-Hg se expande até atingir um volume de 2 litros sob pressão de 40 mm-Hg. Determine: (*a*) a quantidade de nitrogênio expressa em moles, (*b*) a temperatura final do sistema.
Resposta: (*a*) $1{,}5 \times 10^{-3}$ moles. (*b*) 834,67 K.

7. Um pneu de automóvel, cujo volume é igual a 250 cm³, contém ar sob pressão manométrica de 1,7 atm, quando sua temperatura é de 23°C. Calcule a pressão absoluta do ar no pneu quando sua temperatura passar para 53°C e seu volume aumentar para 280 cm³.

8. Calcule o número de moléculas de um gás contidas em um volume de 1,00 cm³ à pressão de $1{,}00 \times 10^{-3}$ atm e à temperatura de 200 K. *Resposta:* $3{,}67 \times 10^{16}$.

9. Calcule a pressão exercida por 10 g de nitrogênio no interior de um recipiente de 1 litro, sendo a temperatura igual a 25°C e admitindo que o nitrogênio se comporte como um gás ideal.

10. Um manômetro de mercúrio selado tem dois ramos desiguais à mesma pressão p_0, como mostra a Fig. 23-7. A área da seção reta do manômetro é 1,0 cm². Através da torneira do fundo do manômetro, admite-se no recipiente um volume adicional de mercúrio, igual a 10 cm³. O nível à esquerda sobe 6,0 cm e à direita sobe 4,0 cm. Determine a pressão p_0. *Resposta:* $1{,}5 \times 10^5$ Pa.

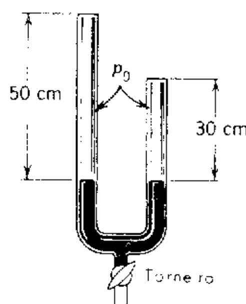


figura 23-7

11. Um gás ideal encontra-se num recipiente à pressão p_1 e à temperatura T_1. Outro gás ideal encontra-se em outro recipiente de volume V_2 (diferente de V_1) e sob pressão p_2 (diferente de p_1). A temperatura T é a mesma nos dois recipientes. Obtenha uma expressão para a determinação da pressão de equilíbrio quando os dois recipientes forem conectados.

12. (*a*) Mostre como se calcula a *massa molecular média* $\bar{M}$ de uma mistura de gases ideais em função de x_i (*fração molar* do componente *i*) e de M_i (*massa molecular* do componente *i*). (*b*) Encontre uma relação para a *massa específica* para esta mistura de gases ideais. Considere o equilíbrio da mistura, tanto no item (*a*) quanto no item (*b*).
Resposta: (*a*) $\bar{M} = \Sigma\, x_i M_i$. (*b*) $\rho = \bar{M}p/RT$.

13. Considere uma mistura de gases ideais em equilíbrio termodinâmico. Mostre que "a soma das *pressões parciais* dos componentes da mistura é igual à *pressão total* da mistura" (*Lei de Dalton*).

14. Um recipiente de 20 litros, mantido na temperatura de 127°C, contém 3,2 g de oxigênio, 2,8 g de nitrogênio e 0,2 g de hidrogênio. As massas moleculares valem: 32 para o oxigênio, 28 para o nitrogênio e 2 para o hidrogênio. Determine a pressão parcial: (*a*) do oxigênio, (*b*) do nitrogênio, (*c*) do hidrogênio.
Resposta: (*a*) 0,163 atm. (*b*) 0,163 atm. (*c*) 0,163 atm.

15. Um recipiente de 20 litros contém oxigênio a uma pressão de 0,1 atm e a uma temperatura de 27°C. Outro recipiente, também de 20 litros, contém nitrogênio sob pressão de 0,2 atm, na temperatura de 27°C. Os dois recipientes são ligados mediante conexão de volume desprezível. Determine: (*a*) a pressão parcial do oxigênio, (*b*) a pressão parcial do nitrogênio, (*c*) a pressão total da mistura.

16. A 0°C e à pressão de 1,000 atm a densidade do ar, do oxigênio e do nitrogênio são, respectivamente, 1,293 kg/m³, 1,429 kg/m³ e 1,251 kg/m³. Calcule a percentagem de nitrogênio no ar, a partir desses dados, supondo apenas a presença desses dois últimos gases.
Resposta: 73,9% em massa.

17. No problema anterior você calculou a porcentagem de nitrogênio em *massa*. Encontre agora a porcentagem do nitrogênio em *volume*. Use os mesmos dados do problema anterior e os conceitos e valores dos exercícios precedentes.

18. Umidifica-se o ar com 1,0%, em volume, de vapor de água. A massa molecular do ar seco vale 28,8 e a massa molecular do vapor de água vale 18,0. Calcule a massa específica do ar úmido, a 25°C, 1 atm e com a porcentagem volumar acima referida.
Resposta: 1,17 g/litro.

19. Ar que ocupa um volume igual a 0,14 m^3 e que se encontra à pressão manométrica de $1{,}034 \times 10^5$ Pa é expandido isotermicamente até a pressão atmosférica e então é esfriado à pressão constante até que atinja o volume inicial. Calcule o trabalho feito pelo gás.

SEÇÃO 23-4

20. A massa da molécula de H_2 é $3{,}32 \times 10^{-24}$ g. Se 10^{23} moléculas de hidrogênio chocam-se por segundo contra 2,0 cm^2 de uma parede inclinada de 45° em relação à direção da velocidade, que vale 10^5 cm/s, qual é a pressão que elas exercem sobre a parede?
Resposta: $2{,}3 \times 10^3$ Pa

SEÇÃO 23-5

21. A 273°F e $1{,}00 \times 10^{-2}$ atm a densidade de um gás é $1{,}24 \times 10^{-5}$ g/cm^3. (*a*) Determine v_{qm} para as moléculas do gás. (*b*) Determine o peso molecular do gás e identifique-o.

22. Um recipiente cúbico, de lado igual a 10 cm, contém oxigênio a 273 K e à pressão de 1,00 atm. Comparar a variação de energia potencial de uma molécula de oxigênio, que caia da altura da caixa, com a sua energia cinética média.
Resposta: A razão da energia cinética média e da variação da energia potencial é igual a $1{,}1 \times 10^5$.

23. A velocidade quadrática média das moléculas de oxigênio, a 0,00°C, é igual a 460 m/s. Partindo deste dado, calcule a velocidade quadrática média, a uma temperatura de 312,23 K, das moléculas dos seguintes gases: (*a*) hélio, (*b*) argônio. A massa molecular do oxigênio vale 32 g/mol, a do argônio vale 40 g/mol e a do hélio vale 4 g/mol.

24. (*a*) Calcule a velocidade quadrática média de um átomo de argônio à temperatura ambiente (20°C). (*b*) A que temperatura a velocidade quadrática média do átomo será reduzida à metade desse valor? E em que temperatura ela será o dobro?
Resposta: (*a*) 430 m/s. (*b*) 73 K; 1.172 K.

25. Água em um balde aberto e à temperatura de 27°C evapora devido ao escape de algumas de suas moléculas superficiais. O calor de evaporação (540 cal/g) pode ser determinado aproximadamente por $\mathcal{E}n$ onde $\mathcal{E}$ é a energia média das moléculas que escapam e n é o número de moléculas por grama. (*a*) Calcule $\mathcal{E}$. (*b*) Quantas vezes $\mathcal{E}$ é maior que a energia cinética média das moléculas de H_2O, calculada admitindo-se que a sua relação com a temperatura é a mesma que nos gases.

26. (*a*) Calcule a temperatura na qual a velocidade quadrática média do hidrogênio será igual à sua velocidade de escape da superfície terrestre. Em seguida, calcule para o oxigênio. (*b*) Faça os mesmos cálculos para o caso em que esses gases se encontrassem na Lua, supondo que a aceleração da gravidade na superfície lunar seja 0,16 g. (*c*) A temperatura das camadas superiores da atmosfera terrestre é aproximadamente de 1.000 K. Você esperaria encontrar muito hidrogênio ou oxigênio nessas camadas?
Resposta: (*a*) $1{,}0 \times 10^4$ K; $1{,}6 \times 10^5$ K. (*b*) 440 K; $7{,}0 \times 10^3$ K.

27. (*a*) Mostre que a variação da pressão na atmosfera terrestre, suposta isotérmica, é dada por $p = p_0 e^{-Mgy/RT}$, onde M é a massa molecular do ar (veja Exemplo 1, Cap. 17). (*b*) Mostre também que $n_v = n_0 e^{-Mgy/RT}$, onde n_v é o número de moléculas por unidade de volume.

SEÇÃO 23-7

28. (*a*) A energia interna de um gás ideal depende do volume? (*b*) Ela depende da pressão do gás? (c) Calcule a energia interna de um mol de um gás ideal monoatômico a 273 K.
Resposta: (*a*) Não. (*b*) Não. (*c*) 3402,9 J.

29. Um gás ideal expande-se adiabaticamente desde a temperatura inicial T_1 à temperatura final T_2. Prove que o trabalho realizado pelo gás é $C_v(T_1 - T_2)$, onde C_v é a capacidade térmica molar.

30. Um mol de um gás ideal sofre uma expansão isotérmica. Determine o fluxo de calor para o gás, em função dos volumes inicial e final e de sua temperatura.
Resposta: $RT \ln V_f/V_i$.

31. A massa da molécula de um gás pode ser calculada a partir do calor específico a volume constante. Considere $C_v = 0{,}075$ kcal/kg · K para o argônio e calcule (*a*) a massa de um átomo de argônio, (*b*) o peso atômico do argônio.

32. Considere a massa do átomo de hélio igual a $6{,}66 \times 10^{-27}$ kg. Calcule o calor específico a volume constante para o hélio gasoso. *Resposta:* $3{,}11 \times 10^3$ J/kg · K.

33. A massa específica do ar a 0,00°C e 1,00 atm vale 1,291 g/litro e a velocidade do som no ar nestas condições é igual a 332 m/s. Calcule a razão entre os calores específicos do ar.

34. Obtenha uma expressão para a velocidade de propagação do som num gás ideal em função de γ, de R, de T e da massa molecular M. *Resposta:* $v = (\gamma RT/M)$.

35. A velocidade do som em diferentes gases à mesma temperatura depende do peso molecular do gás. Mostre que $v_1/v_2 = \sqrt{M_2/M_1}$ (T constante), sendo v_1 a velocidade do som no gás de peso molecular M_1 e v_2 é a velocidade do som no gás de peso molecular M_2.

36. Mostre que a velocidade do som no ar aumenta de 61 cm/s para cada grau Celsius de aumento de temperatura.

37. Sabendo-se que C_v, o calor específico molar a volume constante, para um gás em um recipiente é $5R$, o que se pode concluir sobre a razão entre a velocidade do som no gás e a velocidade média quadrática de suas moléculas à temperatura T?

38. (*a*) Um litro de um gás encontra-se a 273 K e pressão de 1,0 atm; $\gamma = 1{,}3$. O gás é rapidamente comprimido até a metade de seu volume original. Determine a sua pressão e temperatura finais. (*b*) Se o gás fosse resfriado isobaricamente até 0ºC, qual seria seu volume final? *Resposta:* (*a*) 2,5 atm, 340 K; (*b*) 0,4 litro.

39. A massa de um gás ocupa o volume de 4,0 litros à pressão de 1,0 atm e à temperatura de 300 K. O gás é comprimido adiabaticamente ao volume de 1,0 litro. Determine (*a*) a pressão final e (*b*) a temperatura final, supondo tratar-se de um gás ideal para o qual $\gamma = 1{,}5$.

40. Obtenha a equação que dá a dependência entre a temperatura e o volume de um gás ideal que sofre uma transformação *adiabática reversível*. Suponha que o C_V do gás seja constante.
Resposta: $T^{C_V}V^R$ = constante, onde C_V é o calor específico molar.

41. Uma *politrópica* é uma transformação na qual permanece constante a quantidade de calor cedida ao sistema dividida pela variação de temperatura, ou seja, $C = dQ/dT$ = constante. Obtenha uma relação entre as coordenadas de estado de um gás ideal numa transformação *politrópica reversível*.

42. Sejam p_i e v_i duas coordenadas de estado de um gás ideal, num estado de referência inicial. Sejam p_f e v_f as respectivas coordenadas num estado de equilíbrio final. Pelo problema anterior você notou que uma *politrópica reversível* pode ser descrita pela equação pV^a = constante, onde $a = (C_p - C)/(C_V - C)$. Obtenha a equação de uma transformação adiabática reversível como caso particular de uma politrópica reversível.
Resposta: pV^γ = constante.

43. Um tubo fino, selado em ambas as extremidades, tem 1,0 m de comprimento. O tubo é mantido horizontalmente. Os 10 cm do meio do tubo contêm mercúrio e as duas porções iguais das extremidades contêm ar à pressão atmosférica normal. Se o tubo for colocado em posição vertical, de quanto o mercúrio será deslocado? Considere que o processo é (*a*) adiabático e (*b*) isotérmico. Qual é a hipótese mais razoável?

SEÇÃO 23-8

44. Um mol de oxigênio é aquecido a pressão constante, a partir de 0,00ºC. Qual a quantidade de calor que deve ser adicionada ao gás para que ele dobre seu volume?
Resposta: 8.040 J.

45. Em uma máquina térmica reversível, um mol de um gás ideal monoatômico sofre uma transformação cíclica representada no diagrama da Fig. 23-8. O processo 1-2 é isocórico, 2-3 é adiabático e 3-1 isobárico. (*a*) Calcule o calor ΔQ, a variação de energia interna ΔU e o trabalho ΔW para cada um dos três processos e para o ciclo completo. (*b*) Se a pressão no ponto 1 for 1,00 atm, qual será a pressão e o volume dos pontos 2 e 3?

46. Dez gramas de oxigênio são aquecidos de 27,0ºC a 127,0ºC à pressão atmosférica constante. (*a*) Qual a quantidade de calor transmitida para o oxigênio? (*b*) Que fração desse calor é gasta para aumentar a energia interna do oxigênio?
Resposta: (*a*) 920 J. (*b*) 71%.

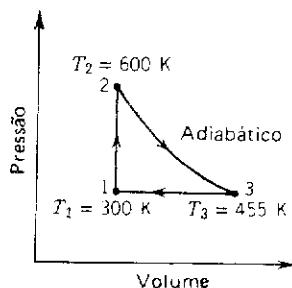


figura 23-8

47. Calcule a variação de energia interna de um mol de um gás ideal monoatômico em cada uma das etapas do ciclo indicado na parte *a* da Fig. 22-18 (ver o Probl. 35 do Cap. 22).

48. Já vimos que a energia interna de um gás ideal monoatômico é dada por $U = 3nRT/2$. Escreva a relação entre a *pressão p* e a *densidade de energia u* de um gás ideal monoatômico. *Resposta:* $p = 2u/3$.

49. O calor específico molar a volume constante de um gás ideal é dado por:

$$C_V = a + bT$$

onde $a = 2$ cal/mol · K e $b = 0{,}01$ cal/mol · K^2. Calcule a variação da energia interna de dois moles deste gás quando sua temperatura passa de $T_1 = 300$ K para $T_2 = 400$ K.

50. Seja N_0 o número de moléculas de um gás ideal. Use a teoria cinética dos gases para obter a pressão do gás em função de N_0, da massa do gás e de v_{qm}. (Ver a dedução da equação 23-3). *Resposta:* $p = N_0 m v^2_{qm}/3$.

51. No Probl. 13 deste capítulo você verificou a *Lei de Dalton* através de um raciocínio *macroscópico*. Use o resultado do problema anterior para verificar a *Lei de Dalton* a partir de conceitos *microscópicos* usados na teoria cinética dos gases.

52. O peso atômico do iodo é 127. Uma onda estacionária em um tubo que contém iodo gasoso a 400 K tem nodos que distam uns dos outros de 6,77 cm, quando a freqüência é de 1.000 Hz. O iodo é um gás monoatômico ou diatômico? *Resposta:* Diatômico.

53. (*a*) Um gás ideal monoatômico, inicialmente a 27°C, é comprimido bruscamente a um décimo de seu volume inicial. Qual será sua temperatura depois da compressão? (*b*) Faça o mesmo cálculo para um gás diatômico.

24
teoria cinética dos gases — II

24-1 *LIVRE PERCURSO MÉDIO*

Entre colisões sucessivas, o movimento de uma molécula de um gás é retilíneo e uniforme. A distância média que uma molécula percorre entre duas colisões sucessivas é chamada *livre percurso médio* (Fig. 24-1) ou *livre caminho médio.* Se as moléculas fossem pontos, elas não colidiriam e o livre percurso medido seria então infinito. Entretanto, as moléculas não são pontos, por isso ocorrem choques entre elas. Se elas fossem tão numerosas que enchessem completamente o espaço disponível, não deixando lugar para o movimento de translação, o livre percurso médio seria, neste caso, nulo. Desse modo, vemos que o livre percurso médio se relaciona com o tamanho das moléculas e com o seu número por unidade de volume.

Consideremos as moléculas de um gás como esferas de diâmetro d. A seção de choque será então πd^2. Quer dizer, uma colisão ocorrerá quando os centros de duas moléculas se aproximarem de uma distância d. Uma outra descrição equivalente das colisões entre moléculas consiste em considerar que uma delas tem diâmetro $2d$, e todas as outras como pontos materiais. (Veja Fig. 24-2.)

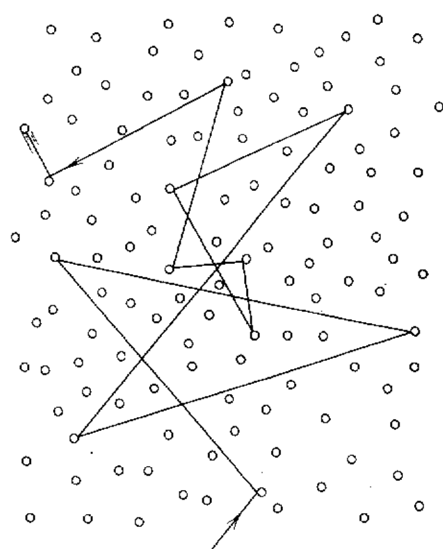


figura 24-1
Uma molécula que se desloca através de um gás e que colide com outras moléculas na sua trajetória. É evidente que todas as outras moléculas têm movimento semelhante.

Imagine uma molécula típica, de diâmetro equivalente $2d$, que se move com velocidade v através de um gás de pontos materiais e suponha, por enquanto, que a molécula e os pontos materiais não interajam. Em um intervalo de tempo t nossa molécula terá descrito um cilindro, de seção reta πd^2 e comprimento vt. Se n for o número de partículas por unidade de volume, o cilindro conterá $(\pi d^2 vt)\, n_v$ partículas (veja Fig. 24-3). Desde que nossa molécula

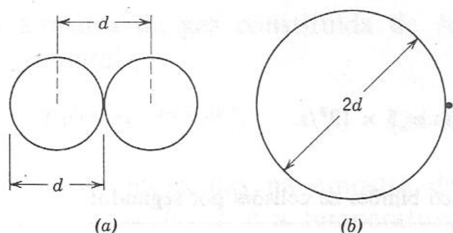


figura 24-2
(*a*) Se ocorrer colisão quando duas moléculas se aproximarem de uma distância *d*, o processo pode ser descrito de maneira equivalente (*b*) considerando que uma molécula tem diâmetro efetivo 2*d* e que a outra é um ponto material.

interage com os pontos materiais, este será o número de colisões que a molécula sofreu no intervalo de tempo *t*. O cilindro da Fig. 24-3 será, de fato, um cilindro quebrado, mudando de direção em cada colisão.

O livre percurso médio $\bar{l}$ é a **distância média percorrida entre colisões sucessivas.** Logo, $\bar{l}$ **será a distância total** *vt* **percorrida no tempo** *t*, **dividida pelo número de colisões que ocorrem neste tempo, ou seja,**

$$\bar{l} = \frac{vt}{\pi d^2 n_v vt} = \frac{1}{\pi n_v d^2}.$$

Essa equação se fundamenta no modelo acima referido, isto é, uma molécula que se choca com alvos estacionários. Na realidade, a molécula choca-se com alvos que se encontram em movimento. A freqüência das colisões neste caso é aumentada, resultando em uma redução do livre percurso médio, como é mostrado abaixo.

$$\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n_v d^2}. \qquad (24\text{-}1)$$

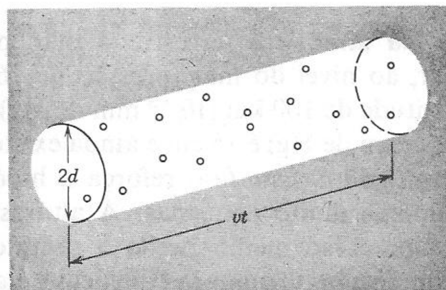


figura 24-3
Uma molécula de diâmetro equivalente 2*d*, que se move com velocidade *v*, descreve um cilindro de base πd^2 e comprimento *vt*, no tempo *t*. Essa molécula colide com todas as moléculas cujo centro está localizado dentro desse cilindro.

Quando as moléculas-alvo estão em movimento, os dois *v* na primeira equação acima não são iguais; o do numerador ($= \bar{v}$) é a velocidade molecular média em relação ao recipiente; o do denominador ($= \bar{v}_{rel}$) é a velocidade *relativa* média em relação às outras moléculas. A velocidade relativa é que determina a taxa de colisões.

Pode-se verificar qualitativamente que $\bar{v}_{rel} > \bar{v}$. Duas moléculas que se movam com velocidade *v*, na mesma direção e em sentidos opostos, têm velocidade relativa 2*v* (que é maior do que $\bar{v}$), duas moléculas com velocidades *v* perpendiculares entre si têm velocidade relativa $\sqrt{2}\,v$ (também maior do que $\bar{v}$); duas moléculas que se movem com velocidade *v* no mesmo sentido têm velocidade relativa nula. Desse modo as moléculas provenientes do *hemisfério anterior e em parte as do posterior* têm $\bar{v}_{rel} > \bar{v}$. As moléculas que partem do repouso no hemisfério posterior têm $\bar{v}_{rel} < \bar{v}$, mas, desde que seu número é menor, elas não determinam a natureza da velocidade média sobre os dois hemisférios, o que leva à conclusão $\bar{v}_{rel} > \bar{v}$. Um cálculo que tenha em conta a distribuição real de velocidades das moléculas conduz ao resultado $\bar{v}_{rel} = \sqrt{2}\,\bar{v}$.

EXEMPLO 1

Calculemos o livre percurso médio e a freqüência de colisão para moléculas do ar a 0ºC e à pressão de 1 atmosfera.

Consideraremos como de 2×10^{-8} cm o diâmetro molecular efetivo *d*. Nas condições acima estabelecidas, a velocidade média das moléculas de ar é cerca de 1×10^5 cm/s e há aproximadamente 3×19^{19} moléculas/cm³. O livre percurso médio é então:

$$\bar{l} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}\,n_v d^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{2} \times 3 \times 10^{19}/\text{cm}^3 \times (2 \times 10^{-8}\ \text{cm})^2} = 2 \times 10^{-5}\ \text{cm}.$$

Este resultado é aproximadamente igual a mil diâmetros moleculares.

A freqüência de colisão correspondente é:

$$\frac{v}{l} = 1 \times 10^5 \text{ cm/s}/2 \times 10^{-5} \text{ cm} = 5 \times 10^9/\text{s}.$$

Concluímos que *cada molécula* sofre em média cinco bilhões de colisões por segundo!

Na atmosfera terrestre o livre percurso médio das moléculas de ar, ao nível do mar (pressão de 760 mm de Hg), é 2×10^{-5} cm. À altitude de 100 km (10^{-3} mm de Hg), é 2 mm. À altitude de 300 km (10^{-6} mm de Hg) é 15 cm e ainda existem cerca de 10^8 moléculas/cm^3 nessa região. Este fato reforça a hipótese de que as moléculas são realmente muito pequenas. A alturas muito grandes o conceito de livre percurso médio perde o sentido, uma vez que as trajetórias das moléculas tornam-se balísticas e elas podem escapar da atmosfera.

No laboratório, o conceito de livre percurso médio é útil em situações semelhantes à que foi discutida no Exemplo 1. Entretanto, quando se trata de vácuo, mesmo os mais modestos, esse conceito perde seu significado, pois a quase totalidade dos choques serão contra as paredes do recipiente e não entre moléculas. Considere uma caixa cúbica de 10 cm de aresta, que contém ar à pressão de 10^{-7} mm-Hg. O livre percurso médio é 150 cm, de modo que as colisões entre moléculas são na realidade muito raras. E mesmo assim essa caixa conterá cerca de 10^{12} moléculas!

Mesmo em uma caixa de dimensões finitas, sob certas condições as partículas podem percorrer grandes distâncias sem chocar com as paredes. É o caso típico de um síncroton de prótons, utilizado para acelerar prótons até energias de bilhões de elétron-volts; os prótons são confinados, por um campo magnético, em trajetórias circulares e podem percorrer centenas de milhares de quilômetros durante o processo de aceleração. Considerações relativas ao livre percurso médio são nesse caso de grande importância, uma vez que os prótons praticamente não devem colidir com as moléculas do ar residual. A seção de choque dos prótons para esse processo é tão pequena, em relação à das moléculas residuais do ar, que, se o vácuo for da ordem 10^{-6} mm-Hg, praticamente não haverá perdas de prótons no feixe, devido ao espalhamento pelas moléculas do gás dentro da câmara.

24-2 *DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES MOLECULARES*

No Cap. 23 estudamos a velocidade quadrática média das moléculas de um gás. Entretanto, a velocidade de uma dada molécula varia em uma ampla faixa de valores; há, para cada gás, uma distribuição característica das velocidades moleculares que depende da temperatura, como será mostrado abaixo. Se todas as moléculas de um gás tivessem a mesma velocidade v, essa situação não persistiria por muito tempo, pois essa velocidade seria mudada pelas colisões. Entretanto, não é de esperar que muitas moléculas tenham velocidades muito menores do que v_{qm} (quer dizer, próximas de zero) e nem muito maiores do que v_{qm}, porque tais velocidades extremas exigiriam uma seqüência preferencial de colisões, extremamente improvável.

O problema da distribuição mais provável das velocidades de um número grande de moléculas de gás foi resolvido por Clerk

Maxwell, que obteve para uma amostra de gás constituída de N moléculas a lei de distribuição seguinte[1]:

$$N(v) = 4\pi N(m/2\pi kT)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}. \tag{24-2}$$

Nesta equação, $N(v)dv$ é o número de moléculas na amostra de gás cujas velocidades estão entre v e $v + dv$; T é a temperatura absoluta do gás, k a constante de Boltzmann e m a massa de uma molécula. Note que, para um dado gás, a distribuição de velocidades depende apenas da temperatura. O número total N de moléculas da amostra é determinado pela soma (isto é, por integração) do número de moléculas presentes em cada intervalo diferencial de velocidades dv, desde zero a infinito, ou seja,

$$N = \int_0^\infty N(v)dv. \tag{24-3}$$

A unidade de $N(v)$ é, digamos, moléculas/(cm/s).

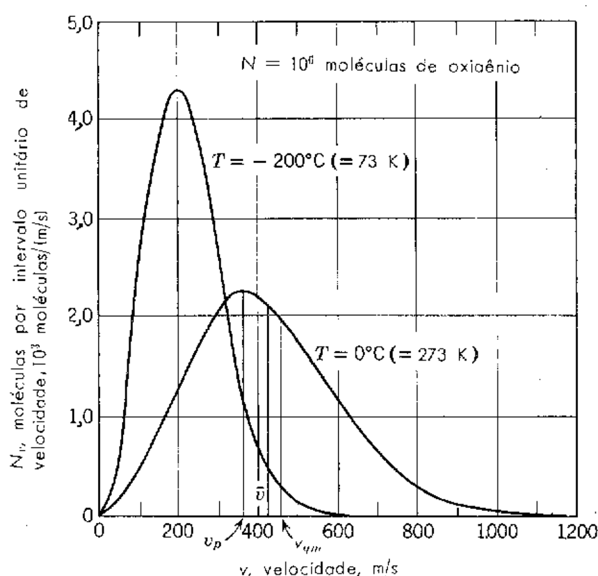


figura 24-4
A distribuição Maxwelliana de velocidades de 10^6 moléculas de oxigênio a duas temperaturas diferentes. O número de moléculas contidas em dado intervalo de velocidades (digamos, 300 a 600 m/s) é numericamente igual à área sob a curva nesse intervalo. A área completa sob a curva fornece o número total de moléculas (igual a 10^6); essa área deve ser a mesma para qualquer temperatura, desde que as curvas se refiram ao mesmo número de moléculas, como no caso acima.

Na Fig. 24-4 está representada a distribuição maxwelliana de velocidades para moléculas de oxigênio, em duas temperaturas diferentes. O número de moléculas cujas velocidades estão entre v_1 e v_2 é igual à área sob a curva, entre as linhas verticais que passam por v_1 e v_2. Como mostra a Eq. 24-3, essa área é a integral daquela função e igual ao número total de moléculas da amostra. A qualquer temperatura o número de moléculas em um dado intervalo[2] Δv aumenta até um máximo (a velocidade mais provável v_p) e a seguir decresce assintoticamente tendendo para zero. A curva de distribuição não é simétrica em relação ao valor mais provável da velocidade, porque a velocidade mais baixa deve ser nula, enquanto

[1] A dedução da Eq. 24-2 é apresentada no Tópico Suplementar IV.

[2] Não podemos simplesmente representar "o número de partículas que possuem velocidade v" como função de v, pelo fato de haver um número finito de partículas é um número infinito de velocidades possíveis. Portanto a probabilidade de que uma partícula possua uma velocidade de valor precisamente fixado – por exemplo, 279,343267. . . . m/s é exatamente nula. Todavia, podemos dividir o intervalo de velocidades em intervalos menores e a probabilidade de que uma partícula tenha velocidade em um dado intervalo (tal como de 279 m/s a 280 m/s) tem um valor finito não nulo.

que não existe limite superior, do ponto de vista clássico, para a velocidade de uma molécula. Neste caso, a *velocidade média* $\bar{v}$ é um pouco maior do que o valor mais provável. A velocidade quadrática média v_{qm}, que é a raiz quadrada da soma dos *quadrados* das velocidades, será maior ainda.

Quando a temperatura aumenta, a velocidade quadrática média v_{qm} (assim como $\bar{v}$ e $\bar{v}_p$) também aumenta de acordo com nossa interpretação microscópica de temperatura. A amplitude de valores típicos das velocidades é então maior e a curva de distribuição se alarga. Desde que a área sob a curva (que é o número total de moléculas da amostra) permanece a mesma, a curva de distribuição deve conseqüentemente achatar-se com o aumento de temperatura. Logo, o número de moléculas cujas velocidades são maiores do que uma dada velocidade aumenta quando a temperatura aumenta (veja Fig. 24-4). Isso explica muitos fenômenos, tais como o aumento da rapidez de reações químicas com o aumento da temperatura.

As velocidades das moléculas de um líquido obedecem a leis de distribuição semelhantes às representadas pelas curvas da Fig. 24-4. Isso explica por que algumas moléculas do líquido (as mais rápidas) podem escapar através da superfície (evaporação) a temperaturas bem inferiores ao ponto normal de ebulição do líquido. Apenas essas moléculas rápidas podem vencer a atração molecular na superfície e escapar por evaporação. A energia cinética média das moléculas remanescentes cai, resultando em um abaixamento subseqüente da temperatura do líquido. Isso explica por que a evaporação é um processo de resfriamento.

A Eq. 24-2 mostra que a distribuição de velocidades moleculares depende tanto da massa das moléculas como de sua temperatura. Quanto menor for a massa das moléculas, maior será o número de moléculas com altas velocidades a uma dada temperatura. Logo, o hidrogênio tem maior probabilidade de escapar da atmosfera, a grandes altitudes, do que o oxigênio ou o nitrogênio. A Lua tem uma atmosfera tênue. Para que as moléculas dessa atmosfera não tenham grande probabilidade de escapar do campo gravitacional fraco da Lua, mesmo às temperaturas baixas que lá existem, é de esperar que sejam moléculas e átomos de elementos pesados. Há alguma evidência a favor da existência, na atmosfera lunar, de gases inertes pesados, tais como criptônio e xenônio, que resultariam de decaimento radioativo nos primórdios da história lunar. Acredita-se que a pressão atmosférica da Lua seja cerca de 10^{-13} da pressão atmosférica terrestre.

EXEMPLO 2

As velocidades de dez partículas, em metros por segundo, são: 0; 1,0; 2,0; 3,0; 3,0; 3,0; 4,0; 4,0; 5,0; e 6,0. Determine: (*a*) a velocidade média, (*b*) a velocidade quadrática média e (*c*) a velocidade mais provável dessas partículas.

(*a*) A velocidade média é:

$$\bar{v} = \frac{0 + 1,0 + 2,0 + 3,0 + 3,0 + 3,0 + 4,0 + 4,0 + 5,0 + 6,0}{10} = 3,1 \text{ m/s}.$$

(*b*) A média dos quadrados das velocidades é

$$\overline{v^2} = \frac{0 + 1,0^2 + 2,0^2 + 3,0^2 + 3,0^2 + 3,0^2 + 4,0^2 + 4,0^2 + 5,0^2 + 6,0^2}{10} = 12,5 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

e a velocidade quadrática média é

$$v_{qm} = \sqrt{12{,}5\ m^2/s^2} = 3{,}5\ m/s.$$

(c) Das dez partículas, três têm velocidades iguais a 3,0 m/s, duas têm 4,0 m/s e as cinco restantes têm velocidades diferentes. Logo a velocidade mais provável de uma partícula é:

$$v_p = 3{,}0\ m/s.$$

EXEMPLO 3

Utilize a Eq. 24-2 para determinar a velocidade média $\bar{v}$, a velocidade quadrática média v_{qm} e a velocidade mais provável v_p das moléculas de um gás, em função dos parâmetros deste.

A quantidade $N(v)\,dv$ representa o número de partículas da amostra que têm velocidades entre v e $v + dv$; $N(v)$ é dado pela Eq. 24-2. Usaremos o modo ordinário de calcular médias: multiplica-se o número de partículas, em cada intervalo de velocidades, pela velocidade v característica deste intervalo; somam-se esses produtos em todos os intervalos de velocidade e divide-se o resultado pelo número total de partículas. Substituindo a somatória por uma integral obtemos:

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty N(v)\,v\,dv}{N}.$$

O valor de $N(v)$ é dado pela Eq. 24-2, integrando[3] obtemos

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} = 1{,}59\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad \text{(velocidade média).}$$

A média dos quadrados das velocidades é dada por:

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty N(v)\,v^2\,dv}{N},$$

o que leva a

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1{,}73\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad \text{(velocidade quadrática média).}$$

A velocidade mais provável v_p é a velocidade para a qual $N(v)$ é máxima, atendida a condição

$$\frac{dN(v)}{dv} = 0.$$

Substituindo $N(v)$ pelo valor dado na Eq. 24-2 obtemos, como o estudante deve verificar,

---

[3] Seja $\lambda = m/2kT$. Das tabelas de integrais temos:

$$\int_0^\infty v^2 e^{-\lambda v^2}\,dv = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}\,;\quad \int_0^\infty v^3 e^{-\lambda v^2}\,dv = \frac{1}{2\lambda^2}\,;\quad \int_0^\infty v^4 e^{-\lambda v^2}\,dv = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}}.$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 1{,}41\sqrt{\frac{kT}{m}} \quad \textbf{(velocidade mais provável).}$$

A Fig. 24-4 mostra v_p, $\bar{v}$ e v_{qm} a 0°C, para uma distribuição de velocidades moleculares do oxigênio.

24-3 *CONFIRMAÇÃO EXPERIMENTAL DA DISTRIBUIÇÃO MAXWELLIANA*

A lei de distribuição de velocidades de Maxwell (Eq. 24-2) foi deduzida por ele em 1859. Naquela data não era possível verificá-la experimentalmente por medições diretas, e na realidade esta situação perdurou até 1920, quando a primeira tentativa séria de verificação dessa lei foi feita por Stern. As técnicas foram melhoradas rapidamente por vários perquisadores, mas apenas em 1955 Miller e Kusch fizeram uma verificação experimental de alta precisão daquela lei para moléculas de um gás.

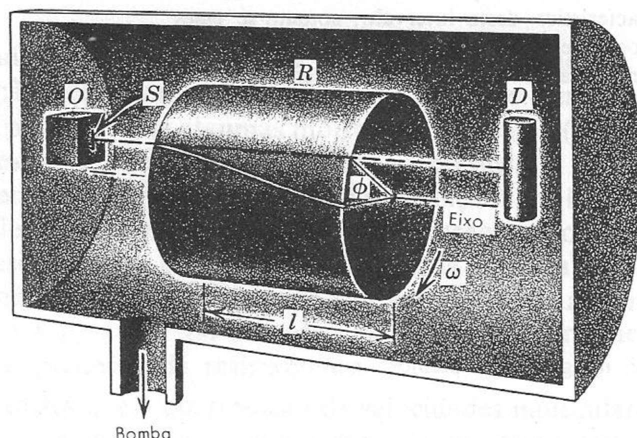


figura 24-5
Aparelho usado por Miller e Kusch para verificar a lei de distribuição de velocidades de Maxwell. O mecanismo que produz a rotação do cilindro não está representado. O aparelho é altamente evacuado, a fim de reduzir as colisões entre as moléculas de tálio, do feixe emergente da fenda *S*, e as moléculas do gás residual.

Na Fig. 24-5 está representado o aparelho usado por Miller e Kusch. As paredes de um forno *O* foram aquecidas em uma série de experiências, à temperatura uniforme de (870 ± 4) K e uma amostra de tálio sendo colocada no forno. A esta temperatura, o forno fica cheio de vapor de tálio, à pressão de $3{,}2 \times 10^{-3}$ mm-Hg. Algumas moléculas de vapor de tálio escapam pela fenda *S*, passando para o espaço altamente evacuado exterior ao forno e incidem no cilindro girante *R*, de comprimento *l*, que tem um certo número de sulcos helicoidais, um dos quais é mostrado na Fig. 24-5. Para uma dada velocidade angular ω do cilindro, apenas as moléculas que têm velocidade bem definida v podem passar ao longo do sulco, sem chocar contra a parede. Essa velocidade v pode ser determinada assim:

$$\text{tempo de percurso de um sulco} = \frac{l}{v} = \frac{\phi}{\omega}$$

ou

$$v = l\omega/\phi, \tag{24-4}$$

onde ϕ (veja Fig. 24-5) é o deslocamento angular entre a entrada e a saída de um sulco helicoidal. Desse modo, o cilindro em rotação constitui um *seletor de velocidades*, a velocidade selecionada sendo proporcional à angular (controlável) ω, como mostra a Eq. 24-4. Observa-se a intensidade do feixe, registrada por *D*, em função da velocidade selecionada v. A Fig. 24-6 mostra a concordância notável, entre a teoria (linha contínua) e o resultado experimental (os triângulos e círculos) para o vapor de tálio.

A distribuição de velocidade no *feixe* (diferente da distribuição de velocidades no *forno*) não é proporcional a $v^2 e^{-mv^2/2kt}$, como na Eq. 24-2, mas a $v^3 e^{-mv^2/2kT}$. Consideremos um grupo de moléculas, no forno, cujas velocidades estão compreendidas entre v_1 e $v_1 + \Delta v$, sendo v_1 menor que a velocidade mais provável v_p. Podemos sempre achar um outro intervalo de velocidades igual a Δv. compreendido entre v_2 e $v_2 + \Delta v$, em que $v_2 > v_p$ é escolhida de modo que os dois intervalos de velocidades

contenham o mesmo número de moléculas. Entretanto, escapará através da fenda, para formar o feixe, maior número de moléculas do segundo intervalo do que do primeiro, porque as moléculas do último bombardeiam a fenda com maior freqüência, ou seja, sua freqüência é multiplicada pelo fator v_2/v_1. Desse modo, mantidas iguais todas as outras características, as moléculas mais rápidas têm maior probabilidade de escapar do forno, justamente na proporção de suas velocidades. As moléculas do feixe terão pois uma distribuição "v^3" ao invés de "v^2". Esse efeito foi levado em conta no cálculo da curva teórica da Fig. 24-6.

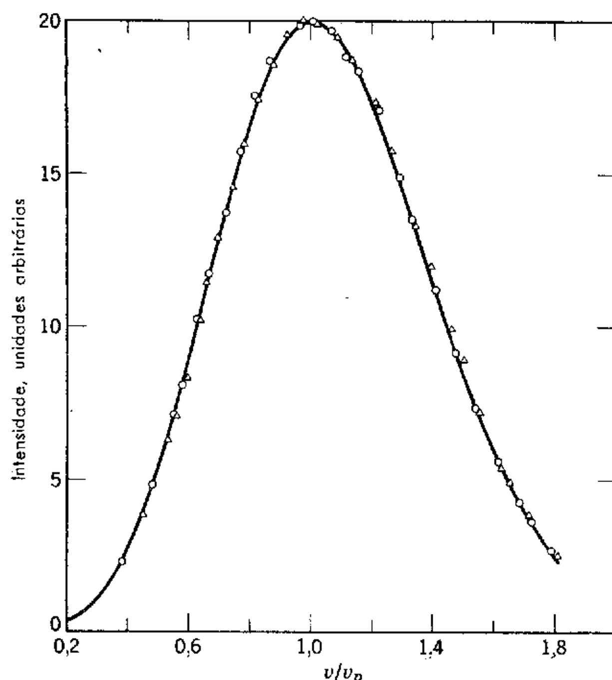


figura 24-6
A linha contínua representa a distribuição de velocidades moleculares de Maxwell. Os círculos (○) são pontos experimentais para átomos de tálio emergentes de um forno a 870 K: os triângulos (△) correspondem à temperatura de 944 K. No eixo horizontal está representada a razão v/v_p, sendo v_p a velocidade mais provável. Quando as velocidades são representadas desse modo, as distribuições para temperaturas diferentes devem cair na mesma curva. A 870 K, v_p = 376 m/s e a 944 K é 395 m/s. Extraído do artigo de Miller e Kusch, *Physical Review*, 99, 1314 (1955).

Em 1946 Rainwater e Havens obtiveram também uma verificação experimental convincente da lei de distribuição de velocidades de Maxwell usando um gás de nêutrons. Os nêutrons eram produzidos (como nêutrons rápidos), em uma série contínua de pulsos curtos, por um cíclotron, e bombardeavam blocos de parafina. Os nêutrons chocam-se repetidamente com os núcleos do bloco de parafina, diminuindo rapidamente suas velocidades, e entram em equilíbrio térmico com o bloco; nestas condições, eles se comportam como um "gás de nêutrons" em um recipiente, que neste caso é aberto, porque os nêutrons difundem-se através das paredes do bloco e se propagam no laboratório. Por intermédio de aparelhos eletrônicos é possível medir o intervalo de tempo que decorre entre a produção dos nêutrons no cíclotron e sua chegada a um detector distante, depois de terem escapado do bloco de parafina. Desse modo, determina-se a distribuição de velocidades dos nêutrons no feixe colimado. A comparação dessa distribuição com a de Maxwell mostra concordância excelente entre a teoria e a experiência.

Apesar de a distribuição de velocidades de Maxwell para os gases concordar otimamente com a observação, nas condições ordinárias, ela falha no caso de densidades elevadas, quando as hipóteses básicas da teoria cinética não são mais válidas. Em tais condições, as distribuições de velocidade aplicáveis fundamentam-se nos princípios da mecânica quântica; são elas as distribuições de Fermi-Dirac e de Bose-Einstein. As distribuições quânticas estão em ótima concordância com a Lei de Maxwell na região clássica (baixa densidade) e com a experiência, nas condições em que é falha a distribuição clássica. Existem portanto limites à validade da distribuição de Maxwell, como de resto acontece a qualquer teoria física.

24-4 *MOVIMENTO BROWNIANO*

Muitos cientistas capazes deploraram a importância dada à teoria atômica e molecular durante o último quarto do século XIX. Apesar de haver sido comprovada a concordância entre a teoria cinética e o comportamento dos gases, nenhuma prova independente da existência de átomos e moléculas havia sido obtida, assim como

não havia nenhum resultado de observação que demonstrasse a existência de movimento contínuo das moléculas. Ernst Mach (1838-1916) dizia: "não há nada que justifique pensar que o mundo seja um mosaico, pois não podemos examiná-lo pedra por pedra". Estabelecera-se, nos primórdios da teoria cinética, que um átomo deveria ter diâmetro de cerca de 10^{-7} a 10^{-8} cm; ninguém, portanto, esperava ver um átomo ou detectar o efeito de um átomo único.

O líder da oposição à teoria atômica foi Wilhelm Ostwald, considerado, com razão, o "pai da Físico-química". Ele foi um dos principais defensores do princípio de conservação da energia e considerava a energia como sendo a última realidade. Ostwald afirmava que, com o tratamento termodinâmico de um processo, obteríamos todas as informações essenciais necessárias e que qualquer suposição mecânica relativa aos mecanismos das reações seriam hipóteses sem fundamento. Ele abandonou a teoria atômica e molecular e lutou por uma ciência livre de "conceitos hipotéticos que não levam a conclusões imediatamente verificáveis pelas experiências". Outros físicos proeminentes relutaram em admitir o átomo como fato científico estabelecido.

Ludwig Boltzmann sentiu-se compelido a contestar essa atitude e, em um artigo publicado em 1897, salientou a indispensabilidade do atomismo nas ciências naturais. O progresso da ciência é freqüentemente guiado por analogias com os processos naturais, que são concebidas pelos pesquisadores. A teoria cinética é uma analogia mecânica desse tipo. Como acontece com a maioria das analogias, elas sugerem experiências destinadas a verificar a validade de nossos modelos, provocam outras investigações e ampliam o conhecimento.

Como sempre ocorre nas controvérsias científicas, a decisão repousa na experiência. A primeira e mais direta evidência experimental da existência dos átomos resultou dos estudos quantitativos sobre o movimento browniano. Essas observações convenceram tanto a Mach como a Ostwald da validade da teoria cinética e da descrição atômica da matéria, na qual essa teoria se fundamenta. A teoria atômica obteve aceitação indiscutível em anos posteriores, devido à ampla variedade de experiências em que foram obtidos os mesmos valores para as constantes atômicas fundamentais.

O movimento browniano é assim chamado por causa do botânico inglês Robert Brown; este descobrira, em 1827, que os grãos de pólen suspensos em água movimentam-se continuamente de modo caótico, quando observados ao microscópio. Inicialmente esse movimento foi considerado como uma forma de vida, mas logo verificou-se que pequenas partículas inorgânicas apresentavam o mesmo comportamento. Não houve explicação quantitativa desse fenômeno até o desenvolvimento da teoria cinética. Apenas em 1905 Albert Einstein desenvolveu a teoria do movimento browniano.[4] Nas suas *Notas Autobiográficas*, Einstein escreveu: "Meu objetivo principal nesse trabalho era encontrar fatos que garantissem tanto quanto possível a existência de átomos de tamanho definido. No decorrer do trabalho descobri que, de acordo com a teoria atômica, partículas microscópicas em suspensão deveriam ser dotadas de movimento observável, sem saber que observações relativas ao movimento browniano já eram há muito conhecidas."

[4] A teoria de Einstein sobre o movimento browniano foi publicada na mesma edição no *Annalen der Physik* que continha seu artigo famoso sobre a teoria da relatividade e também o seu trabalho sobre o efeito fotelétrico. Foi graças a este último trabalho que ele recebeu o Prêmio Nobel em 1921.

A suposição básica de Einstein era que as partículas suspensas em um líquido ou gás participam do movimento térmico do meio e que em média a energia cinética de translação de cada partícula é $(3/2)kT$, de acordo com o princípio de eqüipartição da energia. Segundo esse ponto de vista, o movimento browniano resulta do impacto das moléculas do fluido com as partículas suspensas, que adquirem desse modo a mesma energia cinética que as moléculas.

As partículas suspensas são extremamente grandes, em comparação com as moléculas do fluido, e são continuamente bombardeadas por elas em todas as direções. Se as partículas e o número de moléculas são suficientemente grandes, o mesmo número de moléculas se choca contra elas em todos os lados, a cada instante. Se forem pequenas as partículas e poucas as moléculas, o número destas que se chocam a cada instante com as partículas, nas várias direções, é uma questão de acaso e pode não ser igual, quer dizer, ocorrerão flutuações. Então em cada instante atua na partícula uma resultante não nula que a acelera ao acaso. As partículas, portanto, comportam-se como enormes moléculas do fluido, seu movimento devendo ser qualitativamente o mesmo dessas últimas. Se o número de Avogadro fosse infinito não haveria desequilíbrio estatístico (flutuações) e conseqüentemente não existiria o movimento browniano. Se o número de Avogadro fosse muito pequeno, o movimento browniano seria muito grande. Então, a partir de observações do movimento browniano deve ser possível obter o número de Avogadro. A idéia de movimento molecular e da pequenez das moléculas está profundamente enraizada neste modelo. O movimento browniano, proporciona por isso uma importante verificação experimental das hipóteses da teoria cinética.

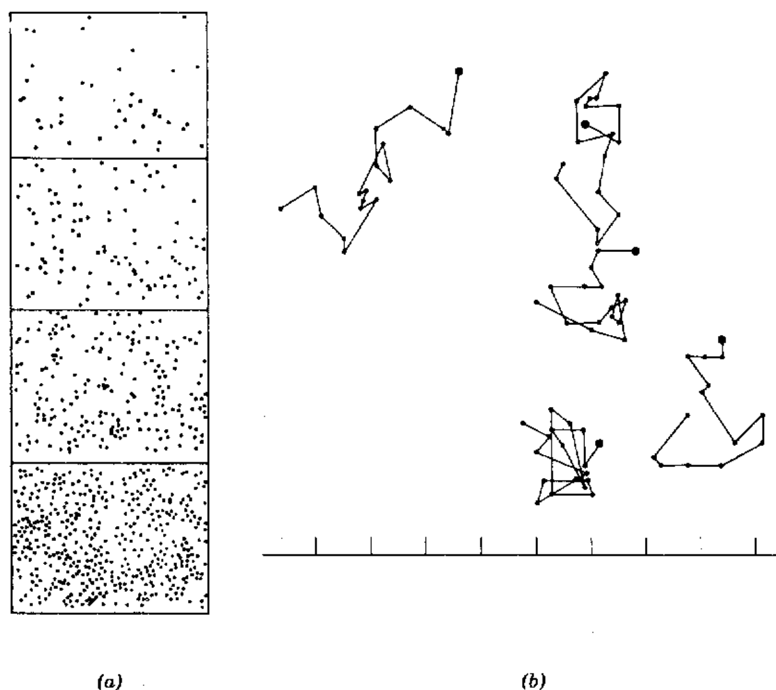


figura 24-7
(*a*) Resina em suspensão em um recipiente, vista ao microscópio por Perrin em 1909. Inicialmente a distribuição de partículas era uniforme, mas com o tempo elas se arranjaram na distribuição que é mostrada aqui. O diâmetro das partículas é de $0,6 \times 10^{-3}$ cm e a distância entre as linhas horizontais de 10×10^{-3} cm. (*b*) Esquema feito por V. Henri em 1908, a partir de seu estudo cinematográfico do movimento browniano. Henri usou um microscópio munido de câmara cinematográfica que registrava 20 imagens por segundo: cada exposição durava $\frac{1}{320}$ do segundo. As linhas em ziguezague representam as trajetórias de cinco partículas de borracha como foram registradas por imagens sucessivas. As linhas não representam as trajetórias reais das partículas porque, nos intervalos entre as exposições, elas podem ter-se movimentado em trajetórias erráticas semelhantes. A escala inferior é dividida em microns (10^{-4} cm).

As partículas suspensas estão sob a influência da gravidade; não fosse o bombardeio molecular, que se opõe a essa tendência, elas se depositariam no fundo do recipiente. Desde que as partículas suspensas comportam-se como as moléculas de um gás, não nos

deve surpreender que, como acontece com as moléculas da atmosfera, a densidade de partículas em suspensão decresça exponencialmente com a altura no fluido; elas constituem uma "atmosfera em miniatura", veja Exemplo 1, Cap. 17; Probl. 26, Cap. 23, e Probl. 21 deste capítulo. Jean Perrin, eminente químico francês, confirmou essa predição em 1908, determinando o número de pequenas partículas de resina suspensas em um líquido, a diferentes alturas (Fig. 24-7, à esquerda). A partir de seus dados, obteve para o número de Avogadro o valor $N_0 = 6 \times 10^{23}$ partículas/mol. Perrin mediu também os deslocamentos das partículas brownianas durante vários intervalos iguais de tempo e verificou que esses deslocamentos apresentavam a distribuição estatística exigida pela teoria cinética e que o deslocamento quadrático médio correspondia ao que era previsto por Einstein (Fig. 24-7*b*).

Entre as muitas experiências subseqüentes, podemos citar os trabalhos de Kappler em 1931, que observou o movimento browniano de um objeto relativamente grande, isto é, um pequeno espelho (de área 0,7 mm²) suspenso de uma fina fibra de torção. Um feixe de luz refletido no espelho móvel era registrado por um filme fotográfico móvel. O espelho era montado em uma câmara de gás de baixa pressão (10^{-2} mm de Hg). A função $\theta(t)$ (deslocamento angular em função do tempo) era registrada no filme fotográfico móvel. Verificou-se claramente um movimento rotacional browniano do espelho, consistindo de uma série de deslocamentos angulares, produzidos pelos choques desequilibrados das moléculas com o mesmo. Quando a pressão do gás era reduzida observava-se uma redução gradual do movimento. A partir do registro fotográfico podem ser determinados o deslocamento angular θ e a velocidade angular ω. O princípio de eqüipartição da energia exige que

$$\tfrac{1}{2}I\overline{\omega^2} = \tfrac{1}{2}\kappa\overline{\theta^2} = \tfrac{1}{2}kT,$$

porque $\frac{1}{2}I\overline{\omega^2}$ é a energia cinética média rotacional do sistema e $\frac{1}{2}\kappa\overline{\theta^2}$ sua energia potencial média; I é o momento de inércia do sistema e k a constante de torção do fio. A partir de suas observações, Kappler calculou a constante de Boltzmann k e, pela relação $N_0 = R/k$, obteve o número de Avogadro. Os valores por ele obtidos foram $k = 1{,}36 \times 10^{-23}$ J/molécula K $\pm 3\%$ (o valor aceito atualmente é $1{,}380 \times$ $\times\ 10^{-23}$ J/K molécula, concordante com aquele dentro dos limites de erro) e $N_0 = 6{,}1 \times 10^{23}$ partículas/mol.

24-5 *EQUAÇÃO DE ESTADO DE VAN DER WAALS*

No capítulo precedente discutimos o comportamento de um gás ideal. Na escala macroscópica, sua relação fundamental é a equação de estado

$$pV = nRT.$$

Com base nessa equação e nos princípios da Termodinâmica, pode-se mostrar que a energia interna U de gás depende apenas da temperatura. Os gases reais obedecem a essa relação muito bem a baixas densidades, mas afastam-se nitidamente do comportamento previsto por ela quando sua densidade aumenta. Em trabalhos científicos de precisão essas discrepâncias não podem ser ignoradas. Por exemplo, para estabelecer a escala termodinâmica, Kelvin no laboratório, precisamos saber como introduzir as correções necessárias na escala de um termômetro de gás a volume constante. É necessário portanto conhecer o comportamento dos gases reais mais acuradamente. Ainda mais importante, talvez, é que o comportamento dos gases reais dá-nos informações a respeito da natureza das forças intermoleculares e da estrutura das moléculas.

A teoria cinética proporciona uma descrição microscópica do comportamento de um gás ideal. Já sugerimos anteriormente como as hipóteses da teoria cinética poderiam perder sua validade se aplicadas aos gases reais. Sob certas condições não se justifica desprezar o fato de que as moléculas ocupam uma fração do volume disponível para o gás e que o alcance das forças moleculares sejam maior do que o tamanho da molécula. Esses efeitos não podem ser ignorados quando as densidades são elevadas.

J. D. van der Waals (1837-1923) deduziu uma equação de estado modificada, que considera esses fatores de maneira simples. Imaginemos as moléculas como esferas duras, de diâmetro d, correspondente à distância entre os seus centros quando entrem em jogo as poderosas forças de repulsão na colisão. Durante seu movimento o centro de uma molécula não pode aproximar-se a menos de $d/2$ de uma parede do recipiente, nem a menos de d do centro de outra molécula. Logo, o volume real disponível para uma molécula é tanto menor do que o volume do recipiente quanto maior o número de moléculas presentes. Representemos por v o volume por mol, V/n. Então o "volume livre" por mol seria inferior a esse volume de uma quantidade b chamada "covolume". Modifiquemos então a equação de estado de um gás ideal, de $pv = RT$ para

$$p(v - b) = RT.$$

Por causa da redução do volume, o número de choques com as paredes é aumentado, aumentando desse modo a pressão. Essa relação foi derivada, pela primeira vez, por Clausius.

Podemos também levar em conta o efeito das forças atrativas entre as moléculas, de maneira simples. Imaginemos um plano que passe através de um gás e consideremos, em qualquer instante, as forças intermoleculares que atuam através dele. Cada molécula à esquerda atrai um certo número pequeno n de moléculas à direita e é atraído por elas. Comparemos esta situação com uma outra semelhante sob todos os aspectos, exceto que o número de moléculas por unidade de volume é o dobro. Ora, qualquer molécula da esquerda vai interagir, em média, com $2n$ moléculas da direita, porque o alcance das forças moleculares permanece o mesmo e existe o dobro de moléculas nesse alcance. Como o número de moléculas à esquerda também foi dobrado, é claro que o número de pares de atração que cruza o plano foi quadruplicado. Logo, o efeito dessas forças varia com o quadrado do número de partículas por unidade de volume ou inversamente com o quadrado do volume por mol, isto é, com $(1/v)^2$. Devido a essas forças intermoleculares de ligação, o gás, para uma dada pressão externa, deveria ocupar um volume menor do que o volume que ele ocuparia como gás ideal, quando tais forças de atração não existem. Ora, isso equivale a dizer que o gás age como se estivesse sujeito a uma pressão superior à pressão externa aplicada. Esse excesso de pressão é proporcional a $(1/v)^2$, ou seja, igual a a/v^2, sendo a uma constante. Desta maneira obtemos a *equação de estado de Van der Waals* para o gás:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \qquad (24\text{-}5)$$

Os valores de a e b devem ser determinados experimentalmente, tratando-se portanto de uma equação empírica. Devemos reco-

nhecer que essas correções na equação de estado dos gases ideais são simples demais; as falhas apresentadas pela equação de Van der Waals, em qualquer uma situação particular, é uma evidência que nossas hipóteses são muito simplificadas para esse caso. Não se conhece nenhuma fórmula simples que se aplique a todos os gases e em quaisquer condições.[5]

Vimos que os gases reais não obedecem exatamente à lei dos gases ideais. Nossa discussão sugere também que, para os gases reais, a energia interna U depende tanto do volume quanto da temperatura. De fato, se existirem forças atrativas (de longo alcance) entre as moléculas, a energia potencial aumentará com a distância média entre elas. Logo, deveríamos esperar que a energia interna da maioria dos gases reais aumentasse levemente com o volume, a temperaturas ordinárias, o que aliás é observado experimentalmente. As colisões podem, sem dúvida, ser consideradas como decorrentes de forças repulsivas. Se as moléculas se movem rapidamente de forma que sofram muitas colisões, a energia potencial devida às forças repulsivas (de curto alcance) pode tornar-se mais importante do que a energia potencial devida às forças atrativas e a energia interna, neste caso, poderia decrescer com o volume. Isso é verdade para o caso do hidrogênio e do hélio a temperaturas ordinárias. Em ambos os casos, entretanto, a energia interna não será função apenas da temperatura, mas dependerá também do volume. A dependência entre a energia interna de um gás e o volume pode ser deduzida imediatamente de resultados observados na experiência de expansão livre, discutida no Cap. 22.

EXEMPLO 4

Compare o comportamento de um gás ideal, a temperatura constante, com o comportamento de um gás de Van der Waals, em um diagrama pressão-volume.

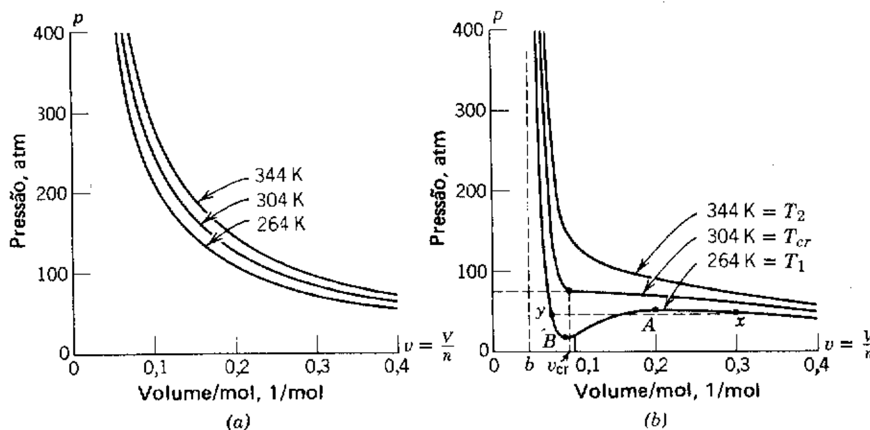


figura 24-8
(*a*) Isotermas de um gás ideal.
(*b*) Isotermas de um gás de Van der Waals. Supusemos $a = 3{,}59\ l^2$ atmosfera/mol^2 e $b = 0{,}0427$ l/mol na Eq. 24-4. Esses valores correspondem à melhor ajustagem dessa equação aos dados experimentais de p-V-T para o gás real CO_2. T_{cr} $(= 304\text{ K})$ é a temperatura crítica.

Na Fig. 24-8*a* traçamos isotermas (curvas de temperatura constante) de acordo com a lei $pv = RT$. A Fig. 24-8*b* mostra isotermas de acordo com a lei

$$(p + a/v^2)(v - b) = RT.$$

As isotermas de um gás ideal são ramos de hipérboles eqüiláteras, pv = constante. Para um gás de Van der Waals a pressão varia com o volume segundo a relação:

[5] Para uma discussão interessante deste assunto e outros correlatos, ver "Liquids — The Awkward In-between" por J. G. Powles, em *Contemporary Physics*, setembro, 1974.

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}. \qquad (24\text{-}6)$$

Quando o volume por mol, v, decresce a partir de valores grandes, a pressão aumenta mas o termo a/v^2, que diminui a pressão, cresce rapidamente; assim sendo, para temperaturas suficientemente baixas a pressão passa por um máximo no ponto A. Diminuindo v ainda mais, o termo $RT/(v - b)$ cresce mais rapidamente, de modo que a pressão passa por um mínimo em B e sobe rapidamente sem limite quando v tende para o valor b. Nas vizinhanças de temperaturas mais elevadas, os máximos e os mínimos são menos acentuados e mais próximos do ponto de inflexão que fica entre eles. Na chamada temperatura crítica ($T = T_{cr}$) estes pontos coincidem em um ponto denominado ponto crítico. Para temperaturas mais altas do que a temperatura crítica, as isotermas de Van der Waals não têm ponto de inflexão e aproxima-se da hipérbole eqüilátera característica dos gases ideais. Para o dióxido de carbono a temperatura crítica é 340 K e a pressão no ponto crítico é 72,9 atm.

Podemos obter a pressão crítica p_{cr}, o volume molar crítico v_{cr} e n temperatura crítica T_{cr}, de modo geral, a partir da condição de que a tangente à isoterma, no ponto crítico, é horizontal, isto é, $dp/dv = 0$ quando T = constante, e de que esse ponto é um ponto de inflexão, $d^2p/dv^2 = 0$ quando T = constante. Obtemos

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{RT}{(v - b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0 \quad (T = \text{constante})$$

e

$$\frac{d^2p}{dv^2} = \frac{2RT}{(v - b)^3} - \frac{6a}{v^4} = 0 \quad (T = \text{constante}).$$

Resulta então

$$v_{cr} = 3b$$

e

$$T_{cr} = \frac{8a}{27bR}$$

Levando esses valores à Eq. 24-6 obtemos

$$p_{cr} = \frac{a}{27b^2}.$$

As isotermas sugerem o comportamento real de líquidos e gases. O máximo e o mínimo das isotermas, abaixo do ponto crítico, não são usualmente observados na experiência, porque em um dado ponto x o gás começa a condensar. Quando o volume decresce, a pressão permanece constante (linha tracejada) até o ponto y, em que todo o gás é transformado em líquido. Além de y, quando diminui o volume estaremos comprimindo um líquido e haverá conseqüentemente um aumento enorme e bem definido de pressão para pequenas variações de volume. Na realidade, as porções xA e By das isotermas podem ser obtidas experimentalmente usando gases e líquidos muito puros. Denomina-se ao fluido nessas situações de vapor supersaturado e líquido super-resfriado,[6] eles se encontram em estados metastáveis. A porção AB não pode ser obtida experimentalmente, sendo instável.

As constantes a e b da equação de Van der Waals podem ser calculadas a partir dos valores experimentais das grandezas críticas. O termo a/v^2 é chamado *pressão interna*. É interessante apresentar alguns valores correspondentes para o ar: a 0°C e à pressão externa p = 1,00 atm, a pressão interna é 0,0028 atm; a 0°C e pressão externa p = 100 atm, a pressão interna é de 26 atmosferas; a −75°C os valores correspondentes da pressão tornam-se 0,0056 atm e 84,5 atm. Quando um gás se expande sob pressão e realiza trabalho

[6] Ver "The Undercooling of Liquids" por David Turnbull em *Scientific American*, janeiro, 1965.

contra as forças externas de compressão, ele deve realizar trabalho também contra as forças internas. Para o ar a $-75°C$ e 100 atm, o trabalho realizado contra as forças internas é aproximadamente igual ao trabalho realizado contra as forças externas. Há, entretanto, uma distinção importante entre trabalho interno e trabalho externo. No caso do trabalho externo a energia é transferida do corpo para um corpo externo; e no caso do trabalho interno há uma mera transformação de um tipo de energia em outro dentro do corpo, como por exemplo de potencial para cinética. A constante b varia de um gás a outro mas é geralmente da ordem de $30\,cm^3/mol$. Logo, o covolume é de cerca de 0,15 % do volume livre disponível para um gás, nas condições normais de temperatura e pressão.

Apesar de a fórmula de Van der Waals ser um bom guia qualitativo, os dados experimentais quantitativos não podem ser ajustados em todo ponto com valores constantes para a e b. A razão é que o modelo em que a fórmula se fundamenta é ainda uma supersimplificação. Ao invés de supor que as moléculas têm sempre um diâmetro bem definido, poderíamos, por exemplo, usar as forças intermoleculares verdadeiras (Fig. 23-3). Desse modo obteríamos uma correção mais acurada para as leis dos gases ideais; Van der Waals reconhecia que isso seria necessário em trabalhos quantitativos de precisão.

---

questões

1. Considere o caso em que o livre percurso médio é maior do que o maior segmento possível dentro do recipiente. Isso constitui um vácuo perfeito para uma molécula nesse recipiente?
2. Faça uma lista de maneiras efetivas de produzir o crescimento do número de colisões por segundo em um gás.
3. Explique, qualitativamente, a ligação existente entre o livre percurso médio das moléculas de amônia no ar e o tempo que decorre entre o instante em que se abre uma garrafa de amônia e o instante em que o cheiro é sentido.
4. Considere o princípio de Arquimedes aplicado a um gás. É verdade que uma vez que aceitemos o modelo de um gás da teoria cinética, nós necessitamos uma nova explanação para este princípio? Por exemplo, admitamos que o livre percurso médio de uma molécula do gás seja comparável, ou maior, que a profundidade do corpo imerso no gás; qual é então a origem de força de empuxo? (Ver "Archimedes Principle in Gases" por Alan J. Walton em *Contemporary Physics*, março, 1969.)
5. Duas paredes opostas de um recipiente são mantidas a temperaturas diferentes. Descreva o mecanismo de condução de calor através do gás.
6. Um gás só transmite ondas sonoras cujo comprimento de onda seja maior do que o livre percurso médio. Você consegue explicar esse fato? Onde ocorre essa limitação?
7. Se as moléculas não forem esféricas, que significado daremos a d na Eq. 24-1, expressão do livre percurso médio? Em que gases as moléculas se comportariam, mais aproximadamente, como esferas rígidas?
8. Suponha que a hipótese de colisões elásticas seja eliminada da teoria cinética e consideremos as moléculas como centros de força de ação à distância. O conceito de livre percurso médio teria sentido nessas circunstâncias?
9. Como a força intermolecular real é função da distância entre as moléculas, ela pode provocar deflexão mesmo quando as moléculas estão afastadas entre si. Além disso, a deflexão resultante poderá depender do tempo de interação e portanto da velocidade relativa das moléculas. (*a*) Você esperaria que o livre percurso médio dependesse da temperatura, mesmo se a densidade fosse mantida constante? (*b*) Se respondeu afirmativamente, $\bar{l}$ deveria crescer ou decrescer com a temperatura? (*c*) Como essa dependência entra na Eq. 24-1?
10. Justifique a afirmação de que em uma mistura de moléculas de tipos diferentes em completo equilíbrio, cada tipo de molécula tem a mesma distribuição

Maxwelliana de velocidades que teria se os outros tipos de moléculas não estivessem presentes.

11. Que observação provê uma boa evidência de que nem todas as moléculas de um corpo se movem com a mesma velocidade, a uma dada temperatura?

12. A distribuição Maxwelliana representada na Fig. 24-4 refere-se aos *módulos* das velocidades das moléculas de um gás. Que aparência você esperaria para uma distribuição Maxwelliana do *vetor velocidade*? Qual seria o vetor velocidade médio?

13. A fração de moléculas correspondente a um dado intervalo Δv da velocidade quadrática média decresce quando a temperatura aumenta. Explique por que.

14. (*a*) Metade das moléculas de um gás em equilíbrio térmico têm velocidades maior do que v_p? E do que $\bar{v}$? E do que v_{qm}? (*b*) Qual das velocidades, v_p, $\bar{v}$ ou v_{qm}, corresponde à velocidade de uma molécula que tem a energia cinética média?

15. A fenda do sistema da Fig. 24-5 seleciona apenas as moléculas que se movem paralelamente ao semi-eixo positivo Ox. Isso destrói a validade da experiência como medida da distribuição de velocidade de moléculas que se movem em todas as direções?

16. Por que Rainwater e Havens, no seu trabalho sobre distribuição de velocidades dos nêutrons (Seç. 24-3), escolheram a parafina como material para desacelerar os nêutrons rápidos e levá-los ao equilíbrio térmico?

17. Faça uma relação de exemplos de movimento browniano em fenômenos físicos.

18. O movimento browniano em regiões do espaço livres de gravidade?

19. Uma bola de golfe está suspensa do teto por um fio longo. Explique em detalhe por que seu movimento browniano não é aparente, de imediato.

20. Definimos n_v como o número de moléculas por unidade de volume de um gás. Se definirmos n_v para um volume muito pequeno de gás, digamos dez vezes o volume de um átomo, então n_v flutuará com o tempo através de uma série de valores compreendidos entre zero e um máximo. Como justificaremos a afirmação feita de que n_v tem um valor definido para todos os pontos de um gás?

21. Mostre que, aumentando o volume por mol de um gás, a equação de Van der Waals tende para a equação de estado de um gás ideal.

22. O covolume b da equação de Van der Waals é em geral tomado como quatro vezes o volume real das moléculas. Que fatores deveriam ser levados em conta a fim de obter esse resultado?

23. Lembrando que a energia interna de um corpo consiste da energia cinética e potencial de suas partículas, como a energia interna de um corpo se distinguiria de sua temperatura?

problemas

SEÇÃO 24-1

1. Seja R o raio das partículas idênticas de um gás monoatômico. Ache a *seção de choque* ou *seção eficaz* das partículas em função de R.

2. O livre percurso médio das moléculas de nitrogênio, a 0ºC e 1 atm, vale $0{,}80 \times 10^{-5}$ cm. Nestas condições existem $2{,}7 \times 10^{19}$ moléculas por cm³. Estimar o diâmetro molecular do nitrogênio. *Resposta:* $3{,}2 \times 10^{-8}$ cm.

3. A freqüência das colisões pode ser definida como a razão entre a velocidade média das moléculas e o livre percurso médio. Calcule a freqüência entre as colisões moleculares do problema anterior.

4. A 2.500 km acima da superfície terrestre a densidade é de cerca de uma molécula/cm³. (*a*) Qual o livre percurso médio previsto pela Eq. 24-1, nessas condições? (*b*) Que significa esse resultado?
Resposta: (*a*) 7×10^9 km. (*b*) O resultado tem muito pouco significado porque a esta altitude quase todas as moléculas seguirão trajetórias balísticas, sem colisões, dentro do campo gravitacional terrestre e muitas outras escaparão da atmosfera.

5. O livre percurso médio das moléculas de um gás pode ser determinado a partir de medições (por exemplo, da viscosidade do gás). A 20ºC e à pressão de 75 cm-Hg, tais medições levam ao valor $\bar{l}_A$ (argônio) = $9{,}9 \times 10^{-6}$ cm e $\bar{l}_{N_2}$ (nitrogênio) = $27{,}5 \times 10^{-6}$ cm. (*a*) Determine a razão dos diâmetros efetivos das seções de choque do argônio e do nitrogênio. (*b*) Qual seria o livre percurso médio para o argônio, a 20ºC e a 15 cm-Hg? (*c*) Qual seria o livre percurso médio do argônio a −40ºC e 75 cm-Hg?

6. Uma molécula de hidrogênio (diâmetro 10^{-8} cm) escapa de um forno (T = 4.000 K) com a velocidade quadrática média e entra em uma câmara que contém átomos de argônio frio (diâmetro 3×10^{-8} cm), à densidade de 4×10^{19} átomos/cm³. (*a*) Qual a velocidade da molécula de hidrogênio? (*b*) Considerando a molécula de hidrogênio e o átomo de argônio como esferas, qual seria a distância mínima de aproximação de seus centros, em

uma colisão? (*c*) Qual o número inicial de colisões por unidade de tempo que sofre a molécula de hidrogênio?
Resposta: (*a*) 7,1 km/s. (*b*) $2{,}0 \times 10^{-8}$. (*c*) $5{,}0 \times 10^{10}$ colisões por segundo.

7. Obtenha uma expressão para estimar o número de moléculas que incidem, por segundo, sobre um elemento de área unitária da parede do recipiente que contém o gás.

8. Mostre que a velocidade relativa das moléculas de um gás cujas moléculas movem-se com a mesma velocidade $\bar{v}$, é dada por: $\bar{v}_{rel} = \frac{4}{3}\bar{v}$ e não por $\sqrt{2}\bar{v}$ (que é o resultado obtido quando se considera a distribuição real das velocidades moleculares). Veja a Seç. 24-1.

SEÇÃO 24-2

9. Seja N_i o número de partículas com velocidade v_i. Considere os seguintes valores:

N_i	v_i (m/s)
1	1,50
2	1,80
3	2,00
15	3,00
8	3,50
6	2,50
5	2,80

Calcule: (*a*) a velocidade média $\bar{v}$, (*b*) a velocidade quadrática média v_{qm}, (*c*) a velocidade mais provável v_p.

10. O desvio padrão σ de um conjunto de valores é definido como a *média dos quadrados dos desvios*. O *desvio* é a diferença entre o valor da grandeza e o valor médio do conjunto. Calcule o desvio padrão do conjunto de velocidades do problema anterior.
Resposta: $\sigma = 0{,}51$ m/s.

11. (*a*) Usando a distribuição de Maxwell obtenha os valores de $\bar{v}$, v_{qm} e v_p em função de *T*, da constante dos gases *R* e da massa molecular *M* do gás. (*b*) Ache o valor da razão $\bar{v}/v_{qm}$. (*c*) Ache o valor da razão $\bar{v}/v_p$. (*d*) As razões encontradas nos itens (*b*) e (*c*) dependem de *T* e de *M*?

12. Obtenha a razão entre a velocidade média $\bar{v}_1$ de um gás cuja massa molecular é M_1 e a velocidade média $\bar{v}_2$ de outro gás cuja massa molecular seja igual a M_2.
Resposta: $\bar{v}_1/\bar{v}_2 = (T_1M_2/T_2M_1)^{1/2}$.

13. A velocidade mais provável de um gás em equilíbrio à temperatura T_1 é igual à velocidade média quadrática das moléculas deste gás quando está em equilíbrio à temperatura T_2. Calcule T_2/T_1.

14. Um gás consiste de *N* partículas. (*a*) Mostre que $v_{qm} \geq \bar{v}$ independentemente da forma da distribuição das velocidades. (*b*) Quando vale o sinal de igualdade?
Resposta: (*b*) Quando todas as velocidades são iguais.

15. Um gás hipotético, com *N* partículas, tem a distribuição de velocidades como mostra a Fig. 24-9 ($N_v = 0$ para $v > 2v_0$). (*a*) Calcule *a* em função de *N* e v_0. (*b*) Calcule o número de partículas com velocidade entre $1{,}5v_0$ e $2{,}0v_0$. (*c*) Calcule a velocidade média das partículas.

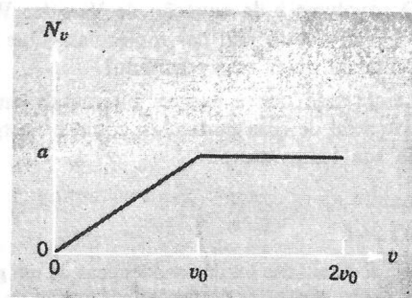


figura 24-9

16. Um recipiente de volume igual a 1.000 cm³ contém argônio à pressão de $3{,}0 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 300 K. O peso atômico do argônio é 40. (*a*) Quantos átomos de argônio existem no recipiente? (*b*) Qual é a velocidade média destes átomos? (*c*) Quantos átomos por segundo colidem numa área de $1{,}0 \times 10^{-7}$ cm² sobre uma das paredes do recipiente? (*d*) Se esta área for um orifício, e se todos os átomos que atingirem-no deixarem o recipiente, quanto tempo levará para que o número de átomos no recipiente decresça para $1/e$ do valor inicial?
Resposta: (*a*) $7{,}2 \times 10^{22}$. (*b*) 400 m/s. (*c*) $7{,}2 \times 10^{22}$. (*d*) 100 s.

17. Usando a distribuição de Maxwell, mostre que a velocidade relativa média é dada por: $\bar{v}_{rel} = \bar{v}(2)^{1/2}$. (Ver o Probl. 8).

18. (*a*) Deduza a expressão do *livre percurso médio*, usando a distribuição de Maxwell. (*b*) Verifique a lei da eqüipartição da energia para o caso da energia cinética de um gás monoatômico usando a distribuição de Maxwell. (*c*) Deduza a equação de estado de um gás ideal mediante a teoria cinética dos gases e pelo cálculo de v_{qm} de um gás manoatômico, usando a distribuição de Maxwell.

SEÇÃO 24-4

19. Calcule a velocidade quadrática média, no ar, de partículas de fumaça, cuja massa é de $5{,}0 \times 10^{-14}$ g, a 0ºC e à pressão de 1 atm.

20. Partículas de massa $6{,}2 \times 10^{-14}$ g estão suspensas em um líquido, a 27ºC e se observa que sua velocidade quadrática média é de 1,4 cm/s. Calcule o número de Avogadro a partir desses dados e do teorema da eqüipartição da energia.

21. A velocidade média das moléculas de hidrogênio é 1.694 m/s a 0ºC. Calcule a velocidade média de partículas coloidais de "peso molecular" $3{,}2 \times 10^6$ g/mol.

22. Partículas coloidais em solução flutuam na superfície de um líquido, no qual estão em suspensão. Seja ρ' a densidade do líquido, ρ a densidade das partículas e V o volume de uma partícula. Prove que o número de partículas por unidade de volume do líquido varia com a altura segundo a relação

$$n_v = n_{v0} \exp\left[-\frac{N_0}{RT} V(\rho - \rho')gh \right]$$

Essa equação foi verificada por Perrin nos seus estudos do movimento browniano.

SEÇÃO 24-5

23. A constante a da equação de Van der Waals é (*a*) 0,37 N · m⁴/mol² para o CO_2 e (*b*) 0,025 N · m^4/mol^2 para o hidrogênio. Calcule a pressão interna desses gases, para valores de v/v_0 (onde v_0 = 22,4 l/mol) iguais a 1, 0,01 e 0,001.

24. (*a*) A constante b da equação de Van der Waals é 43 cm^3/mol para o CO_2. Usando o valor de a do problema precedente, calcule a pressão, a 0ºC, para o volume específico de 0,55 l/mol, supondo que a equação de Van der Waals seja válida. (*b*) Qual a pressão nessas condições, considerando que o CO_2 se comporte como um gás ideal?
Resposta: (*a*) $3,3 \times 10^6$ Pa. (*b*) $4,1 \times 10^6$ Pa.

25. As constantes de Van der Waals para o acetileno são: a = 4,4 atm · l^2/mol^2; b = 0,5 10^{-2} l/mol. A equação de Van der Waals desenvolvida em potências do volume molar assume a seguinte forma:

$$pV^3 - (bp + RT)V^2 + aV - ab = 0$$

Estime o volume ocupado por um mol de acetileno sob pressão de 20 atmosferas e na temperatura de 300 K.

26. Calcule o trabalho realizado por mol em uma expansão isotérmica de um gás de Van der Waals, que passa do volume v_i ao volume v_f.

Resposta: $RT \ln \dfrac{v_f - b}{v_i - b} + a(1/v_f - 1/v_i)$.

25
entropia e segunda lei da termodinâmica

25-1 *INTRODUÇÃO*

A primeira lei da Termodinâmica estabelece que a energia se conserva. No entanto, podemos imaginar muitos processos (ou transformações) termodinâmicos em que a energia se conserva e que todavia nunca ocorrem. Por exemplo, quando estão em contato um corpo quente e um corpo frio, simplesmente não acontece que o primeiro fique mais quente e o segundo mais frio. Ou ainda, um lago não se congela repentinamente em um dia quente de verão, cedendo calor à sua vizinhança. *Contudo, nenhuma dessas transformações viola a primeira lei da Termodinâmica.* De modo semelhante, a primeira lei não restringe nossa capacidade de converter calor em trabalho ou trabalho em calor, desde que a energia seja conservada no processo. Todavia, na prática, embora possamos converter completamente em calor uma dada quantidade de trabalho, nunca se conseguiu imaginar um meio de transformar completamente uma dada quantidade de calor em trabalho. A segunda lei da Termodinâmica trata da questão de saber se as transformações, supostas consistentes com a primeira lei, ocorrem ou não na natureza. Embora as idéias contidas na segunda lei possam parecer sutis ou abstratas, suas aplicações são de natureza extremamente práticas.

25-2 *TRANSFORMAÇÕES REVERSÍVEIS E IRREVERSÍVEIS*

Consideremos um sistema típico em equilíbrio termodinâmico, digamos uma massa M de um gás (real), contido em um cilindro provido de pistão, de volume V; a pressão do gás é p e sua temperatura T. Em estado de equilíbrio, estas variáveis termodinâmicas permanecem constantes no tempo. Suponhamos que as paredes do

cilindro sejam de isolante térmico (ideal) e a base de condutor térmico (ideal); imaginemos o cilindro colocado sobre um grande reservatório térmico, mantido a esta mesma temperatura T, conforme a Fig. 22-9. Levemos o sistema a outro estado de equilíbrio, em que a temperatura T seja a mesma, mas o volume V seja reduzido à metade. Vamos discutir dois casos extremos dentre os muitos modos de realizar esta transformação.

I. Comprimimos o pistão muito rapidamente e aguardamos que o equilíbrio com o reservatório seja restabelecido. Durante este processo o gás mantém-se turbulento e sua pressão e sua temperatura não são bem definidos; não poderíamos representar a transformação como uma curva contínua em um diagrama p-V, pois não saberíamos que valor da pressão (ou da temperatura) associaríamos a um dado volume. O sistema passa de um estado de equilíbrio i a outro estado f através de uma sucessão de estados de não equilíbrio (Fig. 25-1*a*).

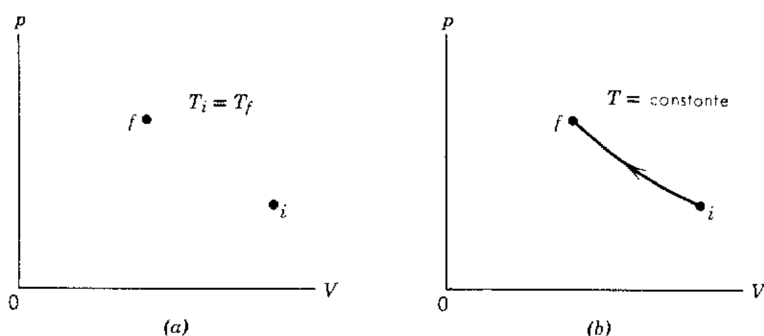


figura 25-1
Um gás real passa do estado inicial de equilíbrio i, descrito por p_i, V_i, T_i, ao estado final f, caracterizado por p_f, $V_f(=\frac{1}{2}V_i)$ e $T_f(=T_i)$. O processo é realizado (*a*) irreversivelmente e (*b*) reversivelmente.

II. Comprimimos muito lentamente o pistão (suposto sem atrito) — talvez acumulando areia sobre ele — de tal modo que a pressão, o volume e a temperatura do gás, a qualquer instante, sejam grandezas bem definidas. Primeiro deixamos cair no pistão alguns grãos de areia, o que reduzirá um pouco o volume do sistema e a temperatura tenderá a elevar-se; o sistema se afastará muito pouco do equilíbrio. Uma pequena quantidade de calor será transferida ao reservatório e em pouco tempo o sistema alcançará um novo estado de equilíbrio, sua temperatura sendo novamente a do reservatório. Jogamos então mais alguns grãos de areia no pistão, provocando nova redução do volume. Esperamos mais uma vez que se estabeleça novo estado de equilíbrio, e assim por diante. Mediante numerosas repetições desse procedimento conseguiremos reduzir o volume à metade. Durante toda a transformação o sistema nunca se encontrará em um processo que difira demasiadamente de um estado de equilíbrio. Imaginemos que tal processo se realize mediante acréscimos ainda menores da pressão; os estados intermediários se afastarão ainda menos do equilíbrio. Aumentando indefinidamente o número de variações e diminuindo em correspondência o valor de cada uma, atingiremos um processo ideal em que o sistema passa por uma sucessão de estados de equilíbrio que poderemos representar por uma curva contínua em um diagrama p-V (Fig. 25-1*b*). Durante tal processo certa quantidade de calor Q é transferida do sistema ao reservatório.

As transformações do tipo I denominam-se *irreversíveis* e as do tipo II são *reversíveis*. *Uma transformação reversível é aquela que,*

mediante uma variação diferencial no meio, possa ser realizada em sentido inverso. Assim, quando fazemos o pistão baixar lentamente, de acordo com II, a pressão externa sobre ele excede a pressão exercida pelo gás apenas de um valor diferencial dp. Se, a qualquer instante, reduzirmos a pressão externa, de muito pouco (removendo alguns grãos de areia) de modo que ela seja *inferior* à pressão interna do gás de um valor dp, este expandirá ao invés de contrair-se e o sistema voltará a passar pelos estados de equilíbrio que ocupou antes.[1] Na prática, todos os processos são irreversíveis, mas podemos aproximar-nos muito da reversibilidade mediante refinamentos experimentais. A transformação rigorosamente reversível é uma abstração simples e útil que mantém, com as transformações reais, uma relação semelhante à que existe entre a abstração do gás ideal e os gases reais.

A transformação descrita em II é não apenas reversível como *isotérmica*, porque supusemos que, a qualquer instante, a temperatura do gás difira apenas de um valor diferencial dT da temperatura (constante) do reservatório sobre o qual está o cilindro.

Poderíamos também reduzir *adiabaticamente* o volume do gás, retirando o cilindro do reservatório térmico e colocando-o em um suporte não condutor. Em um processo adiabático, o sistema não ganha nem perde qualquer quantidade de calor; ele pode ser reversível ou irreversível — a definição não exclui nenhum dos dois. Em um processo adiabático reversível, o movimento do pistão é extremamente lento — talvez usando a técnica de carregar com areia; se o processo adiabático for irreversível, o pistão é baixado rapidamente.

A temperatura do gás se elevará durante uma compressão adiabática porque de acordo com a primeira lei, sendo $Q = 0$, o trabalho W realizado ao empurrar o pistão deve aparecer como um aumento ΔU da energia interna do sistema. W terá diferentes valores para diferentes velocidades do pistão, sendo medido por $\int p\,dV$ — isto é, pela área sob a curva em um diagrama p-V — apenas se o processo for reversível (caso em que p tem valor bem definido). Portanto, ΔU e a variação correspondente de temperatura, ΔT, não serão iguais para processos adiabáticos reversíveis e irreversíveis.

25-3 O CICLO DE CARNOT

Suponhamos um sistema (por exemplo, um gás real) que esteja em equilíbrio em um cilindro com pistão. Como podemos alterar a vizinhança do sistema, podemos submetê-la a uma ampla variedade de transformações. Podemos permitir que o gás se dilate ou comprimi-lo, adicionar-lhe ou retirar-lhe energia sob a forma de calor; todos esses processos e outros podem ser realizados reversivelmente ou irreversivelmente. Podemos também preferir uma série tal de processos que o sistema retorne a seu estado de equilíbrio

[1] Nem todos os processos realizados muito lentamente são reversíveis. Por exemplo, se o pistão de nosso exemplo exercer uma força de atrito na parede do cilindro, ele não inverterá o sentido de seu movimento se produzirmos apenas uma variação diferencial dp na pressão externa. Teríamos de provocar uma variação Δp, que poderia ser uma fração apreciável de p. Portanto, nosso critério de reversibilidade, que envolve uma resposta do sistema a uma variação *diferencial* da vizinhança, não está atendida. A expressão *quase-estática* é utilizada para caracterizar transformações que sejam realizadas bastante lentamente para que o sistema passe por uma seqüência contínua de estados de equilíbrio; um processo quase-estático pode ou não ser reversível. Ver "Thermodynamics of an Irreversible Quasi-Static Process", por John S. Thomsen, *American Journal of Physics*, **28**, 119, 1960.

original; a esta seqüência denominamos *ciclo*. Se as transformações são todas reversíveis, teremos um *ciclo reversível*.

A Fig. 25-2 representa um ciclo reversível em um diagrama *p-V*. Ao longo da curva *abc* o sistema sofre expansão e a área sob esta curva representa o trabalho realizado pelo sistema durante a expansão. Ao longo da curva *cda*, ao fim da qual o sistema retorna a seu estado original, ele é comprimido e a área sob ela representa o trabalho que deve ser realizado sobre o sistema durante a compressão. Portanto o trabalho total realizado pelo sistema é representado pela área encerrada na curva fechada e é positivo. Se decidirmos percorrer o ciclo em sentido oposto, isto é, expandindo-o ao longo de *adc* e comprimindo-o ao longo de *cba*, o trabalho total realizado pelo sistema teria o oposto do valor anterior.

Um ciclo reversível importante é o *ciclo de Carnot*, introduzido por Sadi Carnot em 1824. Veremos depois que este ciclo determina o limite de nossa capacidade de converter calor em trabalho.

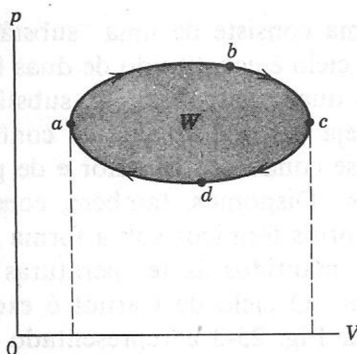


figura 25-2
Diagrama *p-V* de um gás que percorre um ciclo reversível. A área sombreada *W* representa o trabalho final realizado pelo gás durante o ciclo.

a $p_1 V_1 T_1$ — V_2 — V_1 — Q_1 — T_1 — b $p_2 V_2 T_1$

Transformação isotérmica

V_4 — V_1 — V_3 — V_2

Transformação adiabática

Transformação adiabática

d $p_4 V_4 T_2$ — V_3 — V_4 — Q_2 — T_2 — $p_3 V_3 T_2$ c

Transformação isotérmica

figura 25-3
Ciclo de Carnot. Os pontos *a*, *b*, *c* e *d* correspondem aos pontos de mesma designação na Fig. 25-4. Os dispositivos cilindro-e-pistão representam estágios intermediários nas transformações que ligam pontos adjacentes. As flechas nos pistões sugerem expansões (provocadas pela remoção de areia) e compressões (devidas a acréscimos de areia).

O sistema consiste de uma "substância de trabalho", tal como um gás, e o ciclo é constituído de duas transformações reversíveis isotérmicas e duas adiabáticas. A substância de trabalho, que podemos supor seja um gás ideal, está contida em um cilindro provido de uma base condutora de calor e de parede e êmbolo não condutores térmicos. Dispomos, também, como parte da vizinhança, de dois reservatórios térmicos sob a forma de corpos de grande capacidade térmica, mantidos às temperaturas T_1 e T_2 e de um suporte não condutor. O ciclo de Carnot é executado em quatro etapas, indicadas na Fig. 25-3 e representado no diagrama *p-V* da Fig. 25-4.

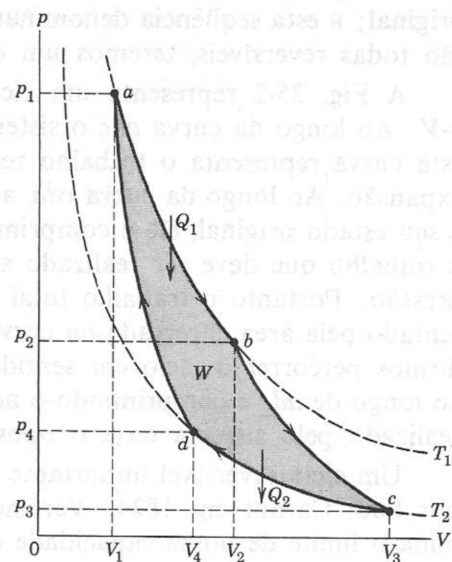


figura 25-4
O ciclo de Carnot ilustrado na figura anterior, desenhado em um diagrama *p-V* para um gás ideal.

Etapa 1. O gás encontra-se no estado inicial de equilíbrio, representado por p_1, V_1, T_1 (*a*, Fig. 25-4). Colocamos o cilindro sobre o reservatório térmico cuja temperatura é T_1 e permitimos que o gás se expanda lentamente até p_2, V_2, T_1 (*b*, Fig. 25-4). Durante esta transformação o gás absorve a quantidade de calor Q_1, conduzida através da base. A expansão é isotérmica em T_1 e o gás realiza trabalho ao empurrar o êmbolo e sua carga.

Etapa 2. Colocamos o cilindro sobre o suporte não condutor e permitimos que o gás se expanda lentamente até p_3, V_3, T_2 (*c*, Fig. 25-4). A expansão é adiabática, pois não há perda nem ganho de calor. O gás realiza trabalho ao elevar o pistão e sua temperatura diminui para T_2.

Etapa 3. Colocamos o cilindro no reservatório térmico T_2 (mais frio) e comprimimos lentamente até p_4, V_4, T_2 (*d*, Fig. 25-4). Durante o processo, haverá transferência da energia térmica Q_2 do gás para o reservatório, por condução através da base. A compressão é isotérmica em T_2 e o trabalho é realizado *sobre* o gás pelo pistão e sua carga.

Etapa 4. Colocamos o cilindro sobre o suporte não condutor e comprimimos lentamente o gás até ele voltar à condição inicial p_1, V_1, T_1. Esta compressão é adiabática, pois o sistema não pode ganhar nem perder calor. Realiza-se o trabalho sobre o gás, cuja temperatura aumenta para T_1.

O trabalho total *W* realizado pelo sistema durante o ciclo é representado pela área limitada pela curva *abcd*, Fig. 25-4. A quantidade total de energia térmica recebida pelo sistema no ciclo é $Q_1 - Q_2$, Q_1 sendo o calor absorvido na etapa 1 e Q_2 a que ele perde na etapa 3. Os estados inicial e final são os mesmos, portanto não haverá alteração na energia interna *U* do sistema e, de acordo com a primeira lei da Termodinâmica,

$$W = Q_1 - Q_2 \qquad (25\text{-}1)$$

para o ciclo, sendo Q_1 e Q_2 positivos. O resultado do ciclo é que houve conversão de calor em trabalho realizado pelo sistema. Qualquer quantidade desejada de trabalho pode ser conseguida simplesmente repetindo o ciclo. O sistema atua portanto como uma *máquina térmica.*

Usamos um gás ideal como exemplo de substância de trabalho, que pode ser qualquer, embora os diagramas *p-V* para outras substâncias fossem diferentes. As máquinas térmicas comuns utilizam como substância de trabalho o vapor d'água ou uma mistura de combustível e ar, ou de combustível e oxigênio. O calor pode ser conseguido mediante a queima de algum combustível, tal como gasolina ou carvão, ou pela aniquilação da massa em processos de

fissão nuclear, em um reator atômico. O calor pode ser expelido na descarga ou cedido a um condensador. Embora as máquinas térmicas reais não operem em um ciclo reversível, o ciclo de Carnot, que é reversível, fornece úteis informações sobre o comportamento de qualquer máquina térmica.

O rendimento ou eficiência *e* de uma máquina térmica é a razão entre o trabalho total realizado pela máquina, durante um ciclo, e o calor recebido da fonte de alta temperatura, no mesmo ciclo.[2] Portanto,

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (25\text{-}2)$$

Essa equação mostra que o rendimento de uma máquina térmica é sempre inferior a 100%, desde que o calor Q_2 fornecido na descarga não é nulo. Mostra a experiência que qualquer máquina térmica rejeita algum calor na fase de descarga; é a parte do calor absorvido pela máquina e não transformado em trabalho no processo.

Poderíamos ter preferido percorrer o ciclo de Carnot partindo de qualquer ponto, tal como *a* na Fig. 25-4 e atingindo cada processo em sentido oposto ao indicado pelas flechas da figura. Então, a quantidade de calor Q_2 seria *retirada* do reservatório à temperatura menor, T_2, e a quantidade Q_1 seria *fornecida* ao reservatório à temperatura mais elevada, T_1; nesse caso um agente externo deve realizar trabalho *sobre* o sistema. Em tal ciclo invertido devemos realizar trabalho *sobre* o sistema, que extrai calor do reservatório de menor temperatura. Qualquer quantidade de calor pode ser retirada desse reservatório simplesmente repetindo o ciclo oposto. Portanto, o sistema atua como *refrigerador*, transferindo calor de um corpo de temperatura menor (o congelador) para outro de temperatura maior (o ambiente) mediante trabalho fornecido ao sistema (a energia elétrica consumida).

EXEMPLO 1

Mostrar que o rendimento de uma máquina de Carnot que utilize um gás ideal como substância de trabalho é expresso por $e = (T_1 - T_2)/T_1$.

Ao longo da isoterma *ab* a temperatura, e portanto a energia interna, de um gás ideal permanece constante. De acordo com a primeira lei, o calor Q_1 absorvido pelo gás ao expandir-se deve ser igual ao trabalho W_1 realizado nesta expansão. De acordo com o Exemplo 2 do Cap. 23, temos

$$Q_1 = W_1 = nRT_1 \ln (V_2/V_1).$$

Analogamente, na compressão isotérmica ao longo da trajetória *cd* temos

$$Q_2 = W_2 = nRT_2 \ln (V_3/V_4).$$

Dividindo a primeira equação pela segunda obtemos

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1 \ln (V_2/V_1)}{T_2 \ln (V_3/V_4)}.$$

A equação que descreve uma transformação isotérmica de um gás ideal fornece para as trajetórias *ab* e *cd*

---

[2] A definição reflete a importância econômica das máquinas. O trabalho é o resultado desejado; o calor Q_1 é o consumo, que pode ter a forma, por exemplo, de uma conta de gás. Uma máquina térmica eficiente apresenta valor elevado para a razão W/Q_1.

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$
$$p_3 V_3 = p_4 V_4.$$

Do mesmo modo, a equação de um processo adiabático de um gás ideal nos dá para os caminhos *bc* e *da*

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma},$$
$$p_4 V_4^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma}.$$

Multiplicando membro a membro as quatro equações e simplificando resulta

$$V_1 V_2^{\gamma} V_3 V_4^{\gamma} = V_2 V_3^{\gamma} V_4 V_1^{\gamma}$$

ou ainda

$$(V_2 V_4)^{\gamma - 1} = (V_3 V_1)^{\gamma - 1}$$

e finalmente

$$V_2/V_1 = V_3/V_4.$$

Utilizando este resultado na expressão de Q_1/Q_2 vemos que

$$Q_1/Q_2 = T_1/T_2, \tag{25-3}$$

portanto

$$e = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - T_2/T_1$$

e enfim

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

As temperaturas T_1 e T_2 são medidas na escala de um gás ideal, descrita no Cap. 21.

25-4 A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

As primeiras máquinas térmicas construídas eram dispositivos muito ineficazes. Apenas uma pequena fração do calor absorvido podia ser convertida em trabalho útil. Mesmo com o aperfeiçoamento dos projetos técnicos, uma percentagem considerável do calor absorvido era ainda descarregada na saída de baixa temperatura, sem poder converter-se em energia mecânica. Permanecia a esperança de poder projetar uma máquina que pudesse retirar calor de um reservatório abundante, tal como o oceano, e convertê-lo completamente em trabalho útil. Nesse caso não seria necessário fornecer uma fonte de calor a temperatura superior à da vizinhança

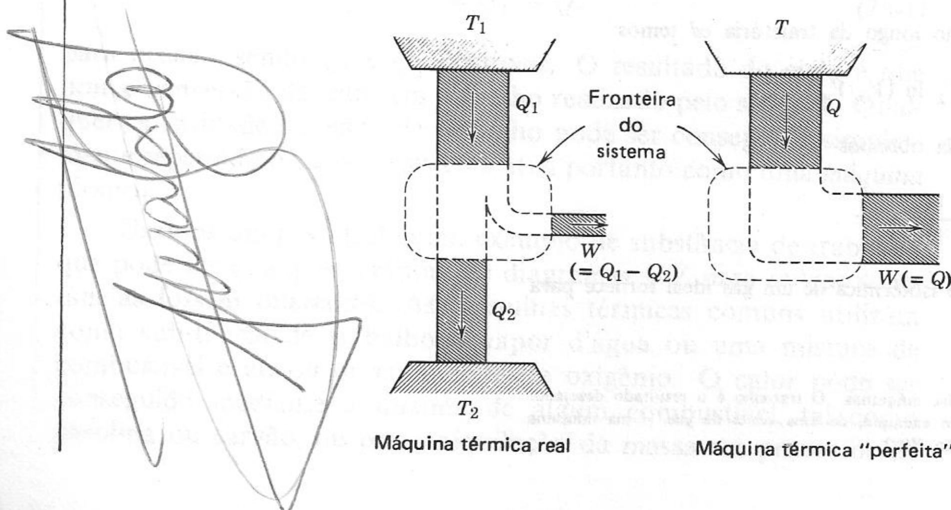


figura 25-5
Em uma máquina térmica real, parte do calor Q_1 retirado pela máquina é convertida em trabalho W e o restante é descarregado como calor Q_2. Em uma máquina térmica "perfeita" todo o calor absorvido seria convertido em trabalho cedido.

externa, mediante a queima de combustível (Fig. 25-5). De modo semelhante, poderíamos esperar conseguir projetar um refrigerador que simplesmente transmitisse calor de um corpo frio a um quente, sem exigir trabalho externo (Fig. 25-6). *Nenhuma dessas ambições viola a primeira lei da Termodinâmica.* A máquina térmica simplesmente converteria por completo a energia térmica em energia mecânica, conservando no processo a energia total. No refrigerador, a energia térmica seria simplesmente transferida do corpo frio ao corpo quente, sem qualquer perda de energia no processo. *Todavia, nenhuma dessas ambições jamais foi alcançada,* e existe razão para acreditar que jamais o serão.

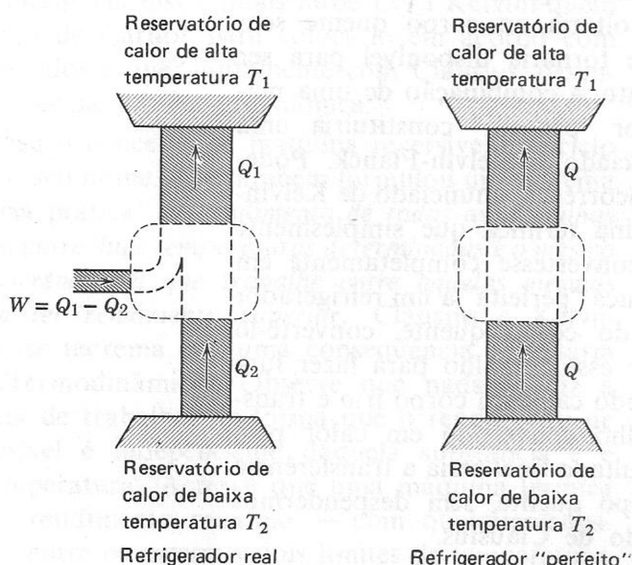


figura 25-6
Em um refrigerador real, é necessário trabalho para transferir calor de um reservatório a baixa temperatura a outro que esteja a alta temperatura. Em um refrigerador "perfeito", deveria haver fluxo de calor do reservatório a baixa temperatura para o de alta temperatura, sem que fosse realizado qualquer trabalho sobre a máquina.

A *segunda lei da Termodinâmica,* que constitui uma generalização da experiência, é uma afirmativa de que tais dispositivos não existem. Há muitos enunciados da segunda lei, cada um acentuando um aspecto dela, mas pode-se provar que são todos equivalentes. Clausius enunciou-a do modo seguinte: *É impossível a qualquer máquina cíclica produzir como único efeito a transmissão contínua de calor de um corpo a outro que esteja a maior temperatura.* Este enunciado exclui nosso ambicioso refrigerador, pois implica que, para transmitir continuamente o calor de um objeto frio a outro quente, é necessário que um agente externo realize trabalho. A experiência ensina que, quando dois corpos estão em contato, a energia térmica passa do corpo quente para o corpo frio. A segunda lei exclui a possibilidade de, em tal caso, a energia térmica transmitir-se do corpo frio para o quente e determina desse modo o sentido em que o calor se transmite. O sentido só pode ser invertido pelo consumo de trabalho.

Kelvin e Planck enunciaram a segunda lei em palavras equivalentes às seguintes: *Uma transformação cujo único resultado final seja transformar em trabalho o calor extraído de uma fonte que esteja em todos os pontos à mesma temperatura é impossível.*[3] Este enun-

[3] Este enunciado deve ser suplementado se estendermos a Termodinâmica à região das temperaturas Kelvin negativas. Todas as outras formulações da segunda lei, e na verdade todas as outras leis da Termodinâmica, aplicam-se às temperaturas negativas sem revisão. Ver o artigo "Thermodynamics and Statistical Mechanics at Negative Absolute Temperatures", por N. F. Ramsey, em *Temperature, Its measurement and Control in Science and Industry,* Vol. 3, parte 1, Reinhold Publishing Co., New York, 1962, ou "Negative Temperatures and Negative Dissipation" por Stefan Machlup em *American Journal of Physics,* novembro, 1975.

ciado elimina nossa ambiciosa máquina térmica, pois implica em que não podemos produzir trabalho mecânico extraindo calor de um único reservatório sem fornecer calor a um reservatório que esteja a temperatura inferior.

Para provar que os dois enunciados são equivalentes, necessitamos demonstrar que, se um deles for. falso, o outro também o será. Suponhamos que fosse falso o enunciado de Clausius, de forma que poderíamos ter um refrigerador que operasse sem necessidade de lhe fornecer trabalho. Poderíamos utilizar uma máquina comum para retirar calor de um corpo quente, realizar trabalho e devolver parte do calor a um corpo frio. Porém, se ligarmos ao sistema nosso refrigerador "perfeito", este calor voltaria ao corpo quente sem consumo de trabalho e de novo se tornaria disponível para ser usado pela máquina térmica. Portanto, a combinação de uma máquina comum e de um refrigerador "perfeito" constituiria uma máquina térmica que violaria o enunciado de Kelvin-Planck. Podemos inverter o argumento: se fosse incorreto o enunciado de Kelvin-Planck, poderíamos ter uma máquina térmica que simplesmente retirasse calor de uma fonte e o convertesse completamente em trabalho. Ligando esta máquina térmica "perfeita" a um refrigerador comum, poderíamos extrair calor do corpo quente, convertê-lo completamente em trabalho, utilizar esse trabalho para fazer funcionar o refrigerador comum, extraindo calor do corpo frio e transferindo-o juntamente com o trabalho convertido em calor pelo refrigerador, ao corpo quente. O resultado final seria a transferência de calor do corpo frio para o corpo quente, sem despendermos trabalho, o que violaria o enunciado de Clausius.

A segunda lei nos ensina que muitos processos são irreversíveis. Por exemplo, o enunciado de Clausius elimina explicitamente uma simples inversão do processo de transmissão do calor de um corpo quente para um corpo frio. Não apenas alguns processos não invertem espontaneamente seu curso, como também nenhuma combinação de processos pode desfazer o efeito de um processo irreversível sem provocar alhures outra variação correspondente. Em seções posteriores desenvolveremos essas idéias mais completamente e formularemos quantitativamente a segunda lei da Termodinâmica.

25-5 *O RENDIMENTO DAS MÁQUINAS*

Carnot foi o primeiro a abordar cientificamente a teoria das máquinas térmicas. Em 1824 ele publicou a obra *Reflexões sobre a Potência Motriz do Fogo.* Nessa época a máquina a vapor era de uso comum na indústria. Carnot escreveu:

> A despeito de todos os tipos de esforços relacionados com a máquina térmica e da perfeição que ela já alcançou, sua teoria progrediu muito pouco...
>
> A produção de movimento em uma máquina térmica está sempre acompanhada de uma circunstância que merece atenção particular. Esta circunstância é a passagem do calórico de um corpo em que a temperatura é mais ou menos elevada, para outro em que ela é mais baixa...
>
> A potência motriz do calor é independente dos agentes empregados em desenvolvê-la; sua quantidade é determinada apenas pela temperatura dos corpos entre os quais, como resultado final, ocorre a transferência de calórico.

Carnot, portanto, chamou a atenção para o fato de que a diferença de temperatura é a fonte real da "potência motriz"; de que a transmissão do calor desempenhava papel significativo e de que a escolha da substância de trabalho não apresentava importância teórica.

As conclusões de Carnot são notáveis, se lembrarmos que a equivalência entre calor e trabalho e o princípio de conservação da energia não eram conhecidos em 1824. Em trabalhos posteriores, publicados postumamente em 1872, tornou-se claro que Carnot havia previsto o princípio de conservação da energia e havia realizado uma determinação precisa do equivalente mecânico do calor. Ele planejara um programa de pesquisas que abrangia todos os desenvolvimentos importantes nesse campo do conhecimento e que foram realizados por outros investigadores durante os vários decênios seguintes. Ele morreu durante uma epidemia de cólera em 1832, com a idade de 36 anos, deixando a outros a tarefa de continuar seu trabalho. Foi William Thomson (mais tarde Lord Kelvin) quem modificou o raciocínio de Carnot para colocá-lo em acordo com a teoria mecânica do calor e que, juntamente com Clausius, desenvolveu com êxito a ciência da Termodinâmica.

Carnot estabeleceu o conceito de máquina reversível e o ciclo reversível que levam o seu nome. Ele também formulou um teorema de grande importância prática: *O rendimento de todas as máquinas reversíveis que operam entre duas temperaturas determinadas é o mesmo e nenhuma máquina irreversível que trabalhe entre aquelas mesmas temperaturas poderia ter rendimento superior.* Clausius e Kelvin demonstraram que esse teorema era uma conseqüência necessária da segunda lei da Termodinâmica. Observe que nada se diz a respeito da substância de trabalho, de forma que o rendimento de uma máquina reversível é independente daquela substância e é função apenas da temperatura. Acresce que uma máquina térmica reversível opera com rendimento máximo — com qualquer substância de trabalho – entre os mesmos dois limites de temperatura. A seguir apresentamos a demonstração deste teorema.

Chamemos H e H' as duas máquinas térmicas reversíveis. Elas operam entre as temperaturas T_1 e T_2, sendo $T_1 > T_2$. Elas podem diferir, por exemplo, em suas substâncias de trabalho, ou em suas pressões iniciais, ou na duração de seus tempos. Suponhamos que H funcione para a frente e H' para trás (como refrigerador). A máquina H absorve a energia térmica Q_1 à temperatura T_1 e perde a energia térmica Q_2 à temperatura T_2. A máquina H' (o refrigerador) absorve a quantidade de calor Q_2' à T_2 e cede o calor Q_1' à T_1. Liguemos mecanicamente as duas máquinas e ajustemos a duração de seus tempos de forma que o trabalho realizado por H, em cada ciclo, é exatamente suficiente para operar H' (Fig. 25-7). Suponhamos que o rendimento e de H fosse superior ao rendimento e' de H'. Nesse caso,

$$e > e' \quad \text{(suposição)}$$

ou ainda

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} > \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'}.$$

Como o trabalho por ciclo realizado por uma das máquinas é igual ao trabalho por ciclo realizado pela outra,

$$W = W'$$

ou

$$Q_1 - Q_2 = Q_1' - Q_2'.$$

Comparando essas relações, vemos que, sendo $Q_1 - Q_2 > 0$,

$$\frac{1}{Q_1} > \frac{1}{Q_1'}$$

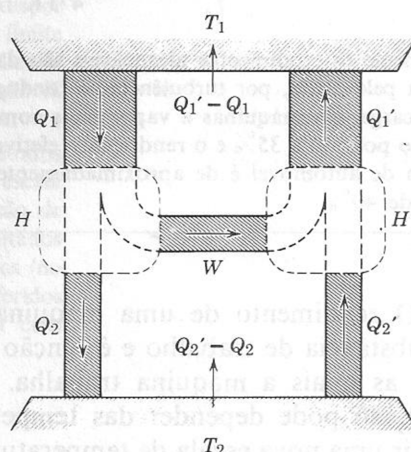


figura 25-7
Demonstração do teorema de Carnot.

ou

$$Q_1 < Q_1'$$

logo, devido à igualdade de trabalho,

$$Q_2 < Q_2'.$$

A fonte quente, portanto, absorve o calor $Q_1' - Q_1$ (positivo) e a fonte fria perde o calor $Q_2' - Q_2$ (positivo). Mas nenhum trabalho é realizado no processo pelo sistema combinado $H + H'$, portanto transferimos calor de um corpo a determinada temperatura para outro corpo a temperatura superior, sem realizar trabalho — em contradição direta com o enunciado de Clausius para a segunda lei. Concluímos disso que e não pode ser maior que e'. De modo semelhante, se invertermos as máquinas, podemos usar o mesmo raciocínio para provar que e' não pode ser maior que e, e portanto

$$e = e',$$

o que demonstra a primeira parte do teorema de Carnot.

Suponhamos agora que H seja uma máquina *irreversível*. Poderemos então provar, exatamente pelo mesmo processo, que e_{ir} não pode ser maior que e'. Porém H não pode ser invertida e por isso é impossível demonstrar que e' não possa ser maior que e_{ir}, que deverá por isso ser igual ou inferior a e'. Como $e' = e = e_{\text{reversível}}$, teremos

$$e_{\text{irreversível}} \leq e_{\text{reversível}},$$

o que prova a segunda parte do teorema de Carnot.

EXEMPLO 2

Uma máquina a vapor absorve calor da caldeira a 200°C (pressão de 15 atm) e o descarrega diretamente no ar (pressão de 1 atm) a 100°C. Qual o rendimento máximo possível?

Usando o resultado do Exemplo 1 (que se aplica ao caso presente em virtude do teorema de Carnot, acima demonstrado) temos

$$e = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{473\text{ K} - 373\text{ K}}{473\text{ K}} \times 100\,\% = 21{,}1\,\%.$$

Geralmente os rendimentos alcançáveis são da ordem de 15%, devido às perdas de energia pelo atrito, por turbulências e condução do calor. Temperaturas inferiores na descarga, em máquinas a vapor mais complicadas, podem elevar o rendimento máximo possível a 35% e o rendimento efetivo a 20%. O rendimento de um motor comum de automóvel é de aproximadamente 20% e de um grande motor a óleo diesel de 40%.

25-6 *A ESCALA TERMODINÂMICA DE TEMPERATURA*

O rendimento de uma máquina térmica reversível independe da substância de trabalho e é função apenas das duas temperaturas entre as quais a máquina trabalha. Como $e = 1 - Q_2/Q_1$, então Q_2/Q_1 só pode depender das temperaturas, o que levou Kelvin a sugerir uma nova escala de temperaturas. Representemos por θ_1 e θ_2 essas temperaturas, definidas pela relação

$$\theta_1/\theta_2 = Q_1/Q_2,$$

isto é, a razão de duas temperaturas nessa escala é igual à razão entre as quantidades de calor absorvida e liberada, respectivamente, por uma máquina de Carnot que opere entre tais temperaturas. Essa escala denomina-se *escala termodinâmica* (ou *Kelvin*).

Para completar a definição da escala termodinâmica, atribui-se o valor arbitrário 273,16 à temperatura do ponto triplo da água; portanto, $\theta_{tr} = 273{,}16$ K. Logo,

para uma máquina de Carnot que opere entre reservatórios mantidos às temperaturas θ e θ_{tr}, respectivamente, teremos

$$\frac{\theta}{\theta_{tr}} = \frac{Q}{Q_{tr}}$$

ou ainda

$$\theta = 273{,}16\,\mathrm{K}\,\frac{Q}{Q_{tr}}. \tag{25-4}$$

Comparando esta relação com a equação correspondente para a temperatura T de um gás ideal, isto é,

$$T = 273{,}16\,\mathrm{K}\,\lim_{p_{tr}\to 0} \frac{p}{p_{tr}} \tag{25-5}$$

vemos que, na escala termodinâmica, Q desempenha a função de propriedade termométrica. Todavia, Q não depende das características de qualquer substância, pois uma máquina de Carnot independe da natureza da substância de trabalho. Obtém-se desse modo uma escala de temperaturas isenta da objeção que pode ser feita à escala de gás ideal (Cap. 21) e de fato chegamos a uma definição fundamental de temperatura.

A definição de temperatura termodinâmica permite reescrever a equação do rendimento de uma máquina reversível como

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}. \tag{25-6}$$

Mostramos, porém (Exemplo 1), que o rendimento de uma máquina de Carnot, que utilize um gás ideal como substância de trabalho, é expressa por

$$e = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{25-7}$$

sendo T_1 a temperatura medida por um termômetro a volume constante que contém o gás ideal. Logo, $Q_1/Q_2 = T_1/T_2$ e $Q_1/Q_2 = \theta_1/\theta_2$. Como $\theta_{tr} = T_{tr} = 273{,}16$ e $\theta/\theta_{tr} = T/T_{tr}$, segue-se que $\theta = T$. Conseqüentemente, *se dispuséssemos de um gás ideal para utilizar em um termômetro de volume constante, este forneceria a escala termodinâmica (ou Kelvin) de temperaturas.* Vimos que, embora não possamos dispor de um gás ideal, as medidas realizadas mediante o processo de passagem ao limite (Eq. 25-5) com gases reais, corresponde ao comportamento de um gás ideal. Consideremos idênticas a escala de gás ideal e a escala termodinâmica; a designação K será empregada para qualquer delas, indiferentemente, como de fato já foi feito.

Na prática não podemos dispor de um gás abaixo de 1 K. Um dos métodos utilizados para medir temperaturas inferiores a 1 K emprega diretamente a escala termodinâmica. A razão de duas temperaturas termodinâmicas é igual à razão de duas quantidades de calor transferidas durante dois processos isotérmicos limitados pelas mesmas duas adiabáticas (Fig. 25-8). A localização dos limites adiabáticos (no diagrama p-V) pode ser determinada experimentalmente e os calores transferidos durante duas transformações isotérmicas quase reversíveis pode ser medida com grande precisão.

As equações

$$T = 273{,}16\,\mathrm{K}\,\frac{Q}{Q_{tr}} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{T_{tr}} = \frac{Q}{Q_{tr}}$$

tornam claro que o calor Q transferido em uma transformação isotérmica entre duas adiabáticas decresce com a diminuição de temperatura T e inversamente, quanto menor Q, menor a temperatura correspondente T. Ora, o menor valor possível para Q é zero e a temperatura T correspondente é nula. Isto é, *se um sistema passa por uma transformação isotérmica reversível sem transmissão de calor, a temperatura em que esta transformação ocorre é o zero absoluto.* Logo, no zero absoluto, coincidem os processos adiabático e isotérmico (Fig. 25-8).

Essa definição de zero absoluto aplica-se a todas as substâncias e independe das propriedades de qualquer delas. Note que não se faz qualquer referência às moléculas ou à energia molecular e que obtivemos uma definição puramente macroscópica do zero absoluto.

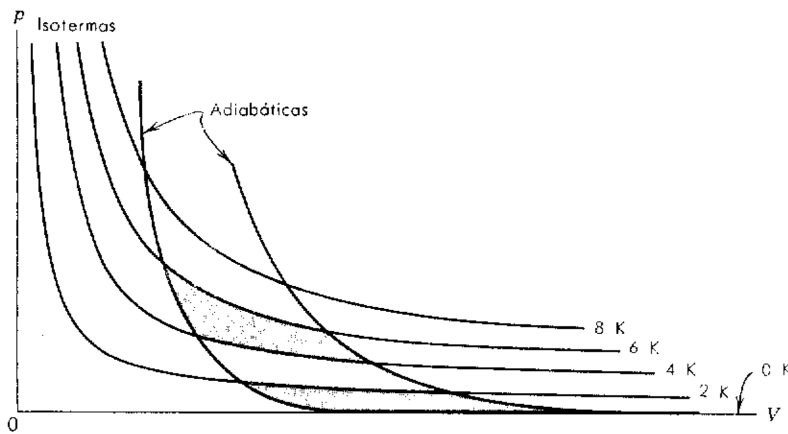


figura 25-8
Uma série de ciclos de Carnot que tendem para a temperatura de zero absoluto e utilizada para estabelecer a escala termodinâmica de temperaturas. A diferença de inclinação entre as isotermas e as adiabáticas foi exagerada para maior clareza.

O rendimento de uma máquina de Carnot é

$$e = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

que é o rendimento máximo possível de qualquer máquina que opere entre as temperaturas T_1 e T_2. Para obter o rendimento de 100%, T_2 deve ser nula. Apenas quando o reservatório a baixa temperatura estiver no zero absoluto haverá conversão integral em trabalho do calor absorvido do reservatório a alta temperatura.

O aspecto fundamental de todos os processos de esfriamento é que, quanto mais baixa a temperatura, mais difícil torna-se baixá-la ainda mais. Esta experiência levou à formulação da *terceira lei da Termodinâmica*, que pode ser enunciada sob a seguinte forma: *É impossível, por qualquer procedimento, não importa quão idealizado, reduzir qualquer sistema a temperatura do zero absoluto mediante um número finito de operações.* Por isso, como não podemos obter um reservatório à temperatura do zero absoluto, uma máquina térmica cujo rendimento seja de 100% é uma impossibilidade prática.

25-7 *ENTROPIA — PROCESSOS REVERSÍVEIS*

A lei zero da Termodinâmica está relacionada com o conceito de *temperatura T* e a primeira lei com o conceito de *energia interna U*. Nesta seção e nas seguintes mostraremos que a segunda lei da Termodinâmica está relacionada com uma variável termodinâmica denominada *entropia*, *S*, e que podemos exprimir quantitativamente a segunda lei em função desta variável. Partimos do ciclo de Carnot, para o qual já vimos (Eq. 25-3) que

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

onde os Q são considerados números positivos, isto é, lidamos apenas com os módulos ou valores positivos dos Q. Se agora os interpretarmos como números algébricos, positivos quando o sistema absorve calor e negativos quando o sistema perde calor, aquela relação pode ser escrita como

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Esta equação estabelece que a soma dos números algébricos Q/T é nula para um ciclo de Carnot.

O passo seguinte consiste em afirmar que *qualquer* ciclo reversível é equivalente a um conjunto de ciclos de Carnot, com aproximação tão boa quanto quisermos. A Fig. 25-9*a* mostra um ciclo

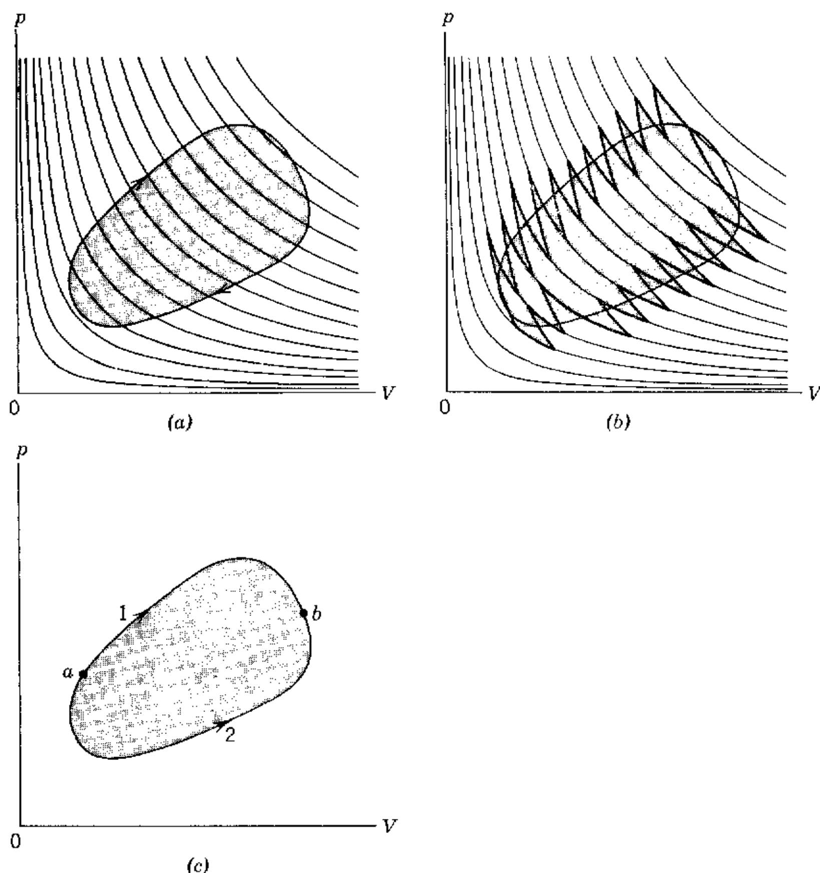


figura 25-9
(*a*) Um ciclo reversível superposto a uma família de isotermas. (*b*) As isotermas são ligadas por adiabáticas, formando um conjunto de ciclos que se aproxima de um ciclo dado. (*c*) *a* e *b* são dois pontos arbitrários no ciclo; 1 e 2 são trajetórias reversíveis que ligam esses pontos.

reversível arbitrário, superposto a uma família de isotermas. Podemos aproximar-nos do ciclo real ligando as isotermas mediante curvas adiabáticas escolhidas convenientemente (Fig. 25-9*b*), formando assim um conjunto de ciclos de Carnot. O estudante deve convencer-se de que percorrer os ciclos de Carnot individuais da Fig. 25-9*b* é exatamente equivalente, em termos de calor transmitido e trabalho realizado, a percorrer a sucessão de curvas isotermas e adiabáticas em ziguezague que se aproximam do ciclo real. Resulta isso de os ciclos de Carnot adjacentes terem uma isoterma comum e as duas travessias, em sentidos opostos, cancelarem-se mutuamente na região de superposição, no que se refere ao calor transmitido e ao trabalho realizado. Tornando suficientemente pequeno o intervalo de temperaturas entre as isotermas da Fig. 25-9*b*, podemos aproximar-nos tanto quanto quisermos do ciclo real, mediante uma seqüência de curvas isotérmicas e adiabáticas alternadas.

Podemos escrever, portanto, para a seqüência de curvas isotérmicas e adiabáticas da Fig. 25-9*b*:

$$\sum \frac{Q}{T} = 0,$$

ou, tomando o limite quando as diferenças de temperatura entre as isotermas da Fig. 25-9*b*[4] são infinitesimais:

$$\oint \frac{\bar{d}Q}{T} = 0, \tag{25-8}$$

[4] Ver rodapé da Seç. 22-7. $\bar{d}Q$ representa uma diferencial inexata porque, Q não é uma função do estado do sistema. O ponto central desta seção é que embora $\bar{d}Q$ não seja uma diferencial exata $\bar{d}Q/T\,(= dS)$ é exata de modo que S, como p, V, T etc. (mas não Q ou W), é uma variável de estado.

em que o símbolo $\oint$ indica que a integral é calculada em um percurso completo do ciclo, começando (e terminando) em um de seus pontos, arbitrariamente escolhido.

Se a integral de uma grandeza ao longo de qualquer caminho fechado for nula, esta grandeza denomina-se variável de estado, isto é, tem um valor que é característico apenas do estado do sistema, independente de como esse estado foi atingido. No presente caso a variável é denominada *entropia*, designada por S; conforme a Eq. 25-8, temos

$$dS = \frac{đQ}{T} \quad \text{e} \quad \oint dS = 0. \tag{25-9}$$

As unidades habituais de entropia são joule/K e cal/K.

A energia potencial gravitacional, U_g, a energia interna U, a pressão p e a temperatura T são outras variáveis de estado; para cada uma delas são válidas equações do tipo $\oint đX = 0, X$ representando a variável apropriada a cada caso. O calor Q e o trabalho W *não* são variáveis de estado, e de modo geral sabemos que $\oint đQ \neq 0$ e $\oint đW \neq 0$, como o estudante poderá provar facilmente para o caso especial do ciclo de Carnot.

A propriedade de uma variável de estado expressa por $\oint dX = 0$ pode ser expressa também dizendo que $\oint dX$, entre dois estados de equilíbrio quaisquer, tem o mesmo valor para todos os caminhos (reversíveis) que liguem esses estados. Provemos isto para a variável de estado denominada entropia. A Eq. 25-9 (vide Fig. 25-9*c*) pode ser escrita como

$${}_1\int_a^b dS + {}_2\int_b^a dS = 0, \tag{25-10}$$

sendo a e b pontos arbitrários; 1 e 2 descrevem os caminhos que ligam esses pontos. Desde que o ciclo é reversível, essa última equação pode ser escrita sob a forma

$${}_1\int_a^b dS - {}_2\int_a^b dS = 0$$

ou ainda

$${}_1\int_a^b dS = {}_2\int_a^b dS. \tag{25-11}$$

A equação acima significa que decidimos descrever o caminho 2 no sentido oposto, isto é, de a para b ao invés de b para a. Conseguimos isso simplesmente invertendo a ordem dos limites da segunda integral da Eq. 25-10; isto exige que alteremos também o sinal da integral, resultando daí a Eq. 25-11. Esta equação significa que $\int_a^b dS$ entre dois quaisquer estados de equilíbrio do sistema, tais como a e b, é independente do caminho que liga esses estados, uma vez que os caminhos 1 e 2 são totalmente arbitrários. O estudante deve lembrar-se da discussão quase idêntica na Seç. 8-2, onde foi introduzido o conceito de força conservativa.

A variação de entropia entre a e b na Fig. 25-9c é, portanto,

$$S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T} \quad \text{(processo reversível)}, \quad (25\text{-}12)$$

sendo a integral calculada ao longo de *qualquer caminho reversível* que ligue esses dois estados.

25-8 ENTROPIA — PROCESSOS IRREVERSÍVEIS

Na seção anterior falamos apenas de processos reversíveis. A entropia, no entanto, tal como outras variáveis de estado, depende apenas do estado do sistema e devemos conseguir calcular a variação de entropia quando as transformações são irreversíveis, com a única condição de que eles comecem e terminem em estados de equilíbrio. Consideremos dois exemplos.

1. *Expansão livre.* Como na Seç. 22-7 (vide Fig. 22-14) suponhamos que um gás dobre seu volume ao expandir-se em um recipiente onde se fez o vácuo. Como nenhum trabalho é realizado contra o vácuo, $W = 0$ e, uma vez que o gás está contido em paredes não-condutoras, $Q = 0$. De acordo com a primeira lei, portanto, $\Delta U = 0$, isto é,

$$U_i = U_f, \quad (25\text{-}13)$$

i e f referindo-se aos estados (de equilíbrio) inicial e final. Se o gás for ideal, U dependerá apenas da temperatura e não da pressão ou do volume; conseqüentemente resulta da Eq. 25-13 que $T_i = T_f$.

A expansão livre é certamente irreversível, pois não temos controle sobre a vizinhança do sistema quando abrirmos a válvula da Fig. 22-14. Há, entretanto, uma diferença $S_f - S_i$ de entropia entre os estados final e inicial, porém não a podemos calcular pela Eq. 25-12, pelo fato de esta relação aplicar-se apenas a processos reversíveis; se tentarmos utilizar tal relação, teríamos a dificuldade imediata de ser $Q = 0$ para a expansão livre e, ademais, não saberíamos que valor atribuir a T nos estados intermediários, de não-equilíbrio.

Como, portanto, calcular $S_f - S_i$ para uma expansão livre? Devemos para isso encontrar um caminho *reversível* (*qualquer*) que ligue os estados i e f e calcular a variação de entropia para esse caminho. Na expansão livre, um caminho reversível conveniente (supondo que o gás seja ideal) é uma expansão isotérmica realizada entre os pontos a e b do ciclo de Carnot da Fig. 25-4. Ela representa uma série de operações completamente diferentes da expansão livre e tem em comum com esta *somente* o fato de ligar os mesmos dois estados de equilíbrio, i e f. De acordo com a Eq. 25-12 e o Exemplo 1 temos

$$S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} = nR \ln V_f/V_i$$
$$= nR \ln 2.$$

Este resultado positivo significa que a entropia *aumenta* neste processo adiabático irreversível.

2. *Condução do calor.* Consideremos, como segundo exemplo, dois corpos semelhantes sob todos os aspectos, exceto que um deles encontra-se à temperatura T_1 e o outro à temperatura T_2, sendo

$T_1 > T_2$. Se os dois corpos entrarem em contato dentro de uma caixa de paredes não-condutoras, eles eventualmente atingirão uma temperatura comum T_m, entre T_1 e T_2. Como no caso de expansão livre, este processo também é irreversível, pois não temos controle sobre a vizinhança dos corpos, uma vez colocados em contato na caixa. Ainda como no caso de expansão livre, este processo é também (irreversivelmente) adiabático, uma vez que o sistema não ganha nem perde calor durante a transformação.

Para calcular a variação de entropia do sistema durante este processo, devemos ainda encontrar uma transformação *reversível* que ligue os mesmos estados inicial e final e calcular a variação de entropia aplicando-lhe a Eq. 25-12. Podemos fazer isso se imaginarmos que temos à nossa disposição um reservatório térmico de grande capacidade térmica, cuja temperatura T esteja sob nosso controle girando um botão, por exemplo. A temperatura do reservatório pode ser ajustada em T_1, por exemplo; colocamos então o primeiro objeto (mais quente) em contato com o reservatório. Baixamos então lentamente (reversivelmente) a temperatura do reservatório de T_1 para T_m, retirando calor do corpo quente, enquanto isso. O corpo quente *perde* entropia neste processo, seu valor sendo aproximadamente

$$\Delta S_1 = -\frac{Q}{T_{1,m}};$$

$T_{1,m}$ é a média de T_1 e T_m, Q o calor retirado.

Ajustamos então a temperatura do reservatório em T_2 e colocamos o segundo corpo (mais frio) em contato com ele. Elevamos então *lentamente* (reversivelmente) a temperatura do reservatório, que passa de T_2 a T_m, adicionando calor ao corpo frio no processo. O corpo frio *ganha* entropia, cujo valor aproximado é

$$\Delta S_2 = +\frac{Q}{T_{2,m}},$$

$T_{2,m}$ sendo a média de T_2 e T_m e Q o calor absorvido.

Os dois corpos encontram-se agora à mesma temperatura T_m e o sistema, constituído destes dois corpos, está agora em seu estado final de equilíbrio. A variação de entropia para o sistema completo é portanto

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= -\frac{Q}{T_{1,m}} + \frac{Q}{T_{2,m}}. \end{aligned}$$

Como $T_{1,m} > T_{2,m}$ temos $S_f > S_i$. Como no caso da expansão livre, temos de novo que a entropia *aumentou* durante a transformação adiabática irreversível.

Em cada um desses exemplos devemos distinguir cuidadosamente entre o processo (irreversível) real (expansão livre ou condução do calor) e o processo reversível que introduzimos apenas para podermos calcular a variação de entropia da transformação real. Podemos escolher *qualquer* processo reversível, desde que ele relacione os mesmos estados inicial e final que o processo real; todos esses processos reversíveis fornecerão a mesma variação de

entropia, porque eles dependem apenas dos estados inicial e final e não do processo que os liga, seja ele reversível ou irreversível.

25-9 ENTROPIA E SEGUNDA LEI

Estamos agora em condições de formular a segunda lei da Termodinâmica em termos de entropia. Como essa lei é uma generalização da experiência, não podemos *prová-la* mas apenas enunciá-la e demonstrar que está de acordo com a experiência e que é equivalente às demais formulações que foram apresentadas antes. É nesse contexto que enunciamos a segunda lei nos seguintes termos: *Um processo natural que comece em um estado de equilíbrio e termina em outro desenvolve-se em um sentido que provoca o aumento da entropia do sistema e sua vizinhança.*

De acordo com o que dissemos ao estudar a lei zero e a primeira lei da Termodinâmica (vide Seç. 22-7) a essência da segunda lei, em termos não rigorosos, é a seguinte: *Existe uma variável termodinâmica útil chamada entropia.* A segunda lei permite-nos também usar essa variável para predizer se uma determinada transformação ocorrerá na natureza.

As duas experiências citadas na Seç. 25-8 (expansão livre e condução do calor) são compatíveis com a segunda lei. A entropia do sistema *aumentou* em cada um desses processos irreversíveis. Note que nesses dois casos a entropia da vizinhança permanece inalterável, pois, como ambos foram realizados em recipientes adiabáticos, não havia intercâmbio de calor entre o sistema e a vizinhança. Portanto, a entropia do sistema mais vizinhança, como é exigido nesse enunciado da segunda lei, aumentou em cada um desses processos (naturais).

Sob a forma em que a escrevemos, a segunda lei aplica-se apenas a transformações irreversíveis, pois apenas tais processos possuem um "sentido natural". Com efeito (ver Seç. 25-1), a compreensão do sentido natural de tais processos é a preocupação fundamental da segunda lei. Os processos reversíveis, todavia, podem desenvolver-se tão bem em um sentido como no outro e *para processos reversíveis, a entropia do sistema mais vizinhança permanece invariável.* Deve-se isso ao fato de que, se o calor dQ é transmitido da vizinhança para o sistema, a entropia da vizinhança *decresce* de dQ/T e a do sistema *aumenta* de dQ/T; a variação total para o sistema mais vizinhança é nula. O fato de o processo ser reversível significa que a diferença de temperatura entre a vizinhança e o sistema só pode ser diferencial, dT, quando ocorre a transmissão do calor; isto está em nítido contraste com nosso problema de condução irreversível do calor, da seção precedente, em que era grande a diferença de temperatura dos dois corpos em contato.

Um outro tipo de transformação de particular interesse são os processos adiabáticos (reversíveis ou irreversíveis), que não envolvem intercâmbio de calor com a vizinhança, por isso a única variação possível de entropia é a do sistema. De nosso enunciado para a segunda lei e das observações relativas aos processos reversíveis no parágrafo precedente concluímos que

$$S_f = S_i \text{ (processo adiabático reversível)}$$

e

$$S_f > S_i \text{ (processo adiabático irreversível),}$$

S_i e S_f sendo as entropias inicial e final do sistema.

Nosso enunciado da segunda lei é coerente com o enunciado de Clausius (Seç. 25-4), que declara não haver o refrigerador "perfeito" (vide Fig. 25-6). Se houvesse, a entropia do reservatório de menor temperatura *diminuiria* de Q/T_2; a do reservatório de temperatura maior *aumentaria* de Q/T_1; a do sistema permaneceria inalterável, porque o sistema percorre um ciclo, retornando do ponto de partida. Portanto, a variação final na entropia do sistema mais vizinhança é um *decréscimo*, pois $T_2 < T_1$. Este resultado viola o enunciado da segunda lei que acabamos de dar e, se o quisermos manter, devemos concluir (com Clausius) que não existe um refrigerador "perfeito".

Nosso enunciado também está de acordo com o enunciado de Kelvin-Planck (Seç. 25-4), o qual estabelece que não existe máquina térmica "perfeita" (vide Fig. 25-5). Se houvesse, a entropia do reservatório à temperatura T *diminuiria* de Q/T; a do sistema permaneceria inalterada porque o sistema percorre um ciclo e retorna do ponto de partida, portanto a variação total da entropia do sistema mais vizinhança é um *decréscimo*. Isto viola o enunciado da segunda lei que foi apresentado acima e, para o manter, devemos concluir (com Kelvin) que não existe a máquina térmica "perfeita".

EXEMPLO 3

Calcular a variação de entropia de um sistema constituído de 1,00 kg de gelo a 0°C, que se funde (reversivelmente) em água à mesma temperatura. O calor de fusão do gelo é 79,6 cal/g.

A exigência de que o gelo se funda *reversivelmente* significa que devemos colocá-lo em contato com um reservatório térmico cuja temperatura seja superior a 0°C de apenas um valor diferencial; se a temperatura do reservatório diminuir e tornar-se menor que 0°C de um valor diferencial, a água começará a congelar. Como o processo é reversível, podemos utilizar a Eq. 25-12 para calcular a variação de entropia do sistema. A temperatura permanece constante a 273 K. Portanto,

$$S_{\text{água}} - S_{\text{gelo}} = \int_0^Q \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_0^Q dQ = \frac{Q}{T}.$$

Como $Q = 10^3 \text{ g} \times 79{,}6 \text{ cal/g} = 7{,}96 \times 10^4 \text{ cal}$, resulta

$$S_{\text{água}} - S_{\text{gelo}} = \frac{7{,}96 \times 10^4}{273} \text{ cal/K} = 292 \text{ cal/K}$$

$$= 1.220 \text{ J/K}.$$

Neste exemplo de fusão reversível, é nula a variação de entropia do *sistema mais vizinhança*, como deve acontecer em todos os processos reversíveis. A variação de entropia calculada acima refere-se apenas ao *sistema*; corresponde-lhe um decréscimo exatamente igual na entropia da vizinhança (−1.220 J/K), associada com o calor que sai do reservatório (vizinhança), a 273 K, para fundir o gelo.

Na prática, é provável que a fusão seja um processo irreversível, como acontece ao colocarmos um cubo de gelo em um copo de água, à temperatura ambiente. Tal transformação tem um só sentido natural: o gelo fundirá. A entropia do sistema mais vizinhança aumentará nesse processo, como exige a segunda lei. O exemplo da condução térmica (irreversível), da seção anterior, deve tornar isto compreensível.

EXEMPLO 4

Calcular a variação de entropia de um gás ideal, quando ele passa por uma expansão isotérmica reversível, do volume V_i ao volume V_f.

De acordo com a primeira lei,

$$dU = dQ - p\,dV.$$

Porém $dU = 0$, pois U depende apenas da temperatura do gás ideal, que se mantém fixa. Logo,

$$dQ = p\,dV$$

e

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{p\,dV}{T}.$$

Como

$$pV = nRT,$$

resulta

$$dS = nR\frac{dV}{V}$$

e

$$S_f - S_i = \int_{V_i}^{V_f} nR\frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}. \qquad (25\text{-}14)$$

Como $V_f > V_i$ resulta $S_f > S_i$ e *a entropia do gás aumenta.*

Para realizar esta transformação, devemos ter um reservatório à temperatura T que esteja em contato com o sistema e forneça calor ao gás. Logo, a *entropia do reservatório diminui de* $\int đQ/T$ $[= nR \ln (V_f/V_i)]$ e neste processo a entropia do sistema mais vizinhança não muda. Como no exemplo precedente, isto é, característico de uma transformação reversível.

25-10 *ENTROPIA E DESORDEM*

Entropia está associada com desordem e o enunciado da segunda lei que em processos naturais a entropia do (sistema + + vizinhança) tende a aumentar é equivalente a dizer que a desordem do (sistema + vizinhança) tende a aumentar.

Existem dois tratamentos para este ponto de vista e discutimos um de cada vez. O primeiro é qualitativo e dá um sentido intuitivo de equivalência entre entropia e desordem. O segundo é bastante formal e dá uma base sólida quantitativa para esta equivalência.

Do ponto de vista qualitativo vamos considerar três exemplos; os dois primeiros já foram discutidos na Seç. 25-8. Todos são "processos naturais" onde não existe dúvida quanto ao sentido que ocorrem. Vamos tratá-los qualitativamente considerando que o estado final (equilibrado) é mais desordenado que o estado inicial.

1. *Expansão livre.* Em uma expansão livre (Seç. 22-7) permite-se que as moléculas do gás contidas em metade de uma caixa espalhem-se por toda ela. Qualquer que seja a definição razoável de desordem, está evidente que o sistema tornou-se mais desordenado, no mesmo sentido em que a desordem aumenta se o lixo acumulado em um lote vazio for espalhado em dois lotes. Mais precisamente, a desordem aumentou porque perdemos em parte nossa capacidade de classificar as moléculas. A afirmativa: "As moléculas estão na caixa" é mais fraca, sob este ponto de vista, do que esta outra: "As moléculas estão na metade esquerda da caixa."

2. *Condução do calor.* Neste exemplo, dois corpos a diferentes temperaturas T_1 e T_2 alcançam uma temperatura uniforme intermediária T_m quando colocados em contato. De novo o sistema tornou-se mais desordenado devido a esse processo natural, porque perdemos em parte nossa capacidade de classificar as moléculas. A afirmativa: "Todas as moléculas do sistema correspondem, graças à Eq. 23-6, à temperatura T" é mais fraca, sob este ponto de vista, do que a afirmativa: "Todas as moléculas do corpo A correspondem à temperatura T_1 e todas as moléculas do corpo B correspondem à temperatura T_2."

3. *Agitar uma xícara com café.* Suponha que você "mexa com uma colher" uma xícara de café e então remove a colher. No estado inicial existe um movimento ordenado de rotação do café. No estado final de equilíbrio existe um movimento caótico molecular. Certamente neste processo natural e irreversível a desordem aumentou.

Vamos discutir a relação *quantitativa* entre entropia e desordem. Em mecânica estatística a desordem adquire significado preciso e é expressa, em conexão com a entropia, pela relação

$$S = k \ln w. \qquad (25\text{-}15)$$

k é a constante de Boltzmann, S a entropia do sistema e w, que podemos chamar de *parâmetro de desordem*, é a probabilidade de que o sistema existirá no estado em que se encontra, relativamente a todos os estados possíveis em que poderia encontrar-se. Esta equação relaciona uma grandeza termodinâmica ou macroscópica, a entropia, com uma grandeza estatística ou microscópica, a probabilidade.

Vamos ilustrar calculando a variação de entropia de um gás ideal em uma expansão isotérmica. Neste caso o número de moléculas e a temperatura não variam e sim o volume. A probabilidade de que uma dada molécula possa ser encontrada em uma região volume V é proporcional a V; isto é, quanto maior V, maior a probabilidade de encontrá-la em V. Logo, a probabilidade de encontrar uma *única* molécula em V é

$$w_1 = cV,$$

sendo c uma constante. A probabilidade de encontrar simultaneamente N moléculas no volume V é igual ao produto de N fatores w_1, isto é, a probabilidade de um estado constituído de N moléculas contidas no volume V é

$$w = w_1{}^N = (cV)^N. \qquad (25\text{-}16)$$

Por exemplo, se a probabilidade de encontrar uma única molécula em V for 1/2 (isto é, existe 50% de probabilidade de ela estar em V e 50% de não estar aí) a probabilidade de encontrar duas moléculas em V é 1/4. Existem aqui quatro estados igualmente prováveis (ambas dentro; ambas fora; uma dentro e a outra fora; e uma fora e a outra dentro) e apenas um deles é um estado em que ambas as moléculas encontram-se em V.

Se agora combinarmos as Eqs. 25-15 e 25-16, obtemos

$$S = kN\ (\ln c + \ln V).$$

Portanto a diferença de entropia entre um estado de volume V_f e outro de volume V_i (mantidas constantes a temperatura e o número de moléculas) é

$$S_f - S_i = kN(\ln c + \ln V_f) - kN(\ln c + \ln V_i) =$$

$$= kN \ln \frac{V_f}{V_i} = \frac{RN}{N_0} \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln \frac{V_f}{V_i},$$

em completa concordância com o resultado exclusivamente termodinâmico da Eq. 25-14.

Foi com base na Eq. 25-16 que afirmamos acima que a desordem aumenta durante uma expansão livre; essa equação fornece $(cV)^N$ para o parâmetro de desordem antes da expansão e $(c2V)^N$ para esse parâmetro, após a expansão.

Deve-se ter cuidado na identificação de idéias qualitativas intuitivas de "desordem" como "bagunça" com o significado quantitativo que apresentamos neste estudo. Existe uma *correlação*, sem dúvida, entre a idéia qualitativa de "desordem" e entraria definida quer no nível macroscópico ou microscópico, porém a *identidade* só existe para o significado preciso que apresentamos de desordem.[5]

A definição estatística de entropia, Eq. 25-15, relaciona as descrições da Termodinâmica e da Mecânica Estatística, permitindo-nos fundar a segunda lei sobre base estatística. O sentido em que decorrem os processos naturais (o de maior entropia) é determinado pelas leis da probabilidade (o sentido do estado mais provável). O estado de equilíbrio é, termodinamicamente, o estado de entropia máxima e estatisticamente o estado mais provável. Vimos, no entanto, que podem ocorrer flutuações em torno da distribuição de equilíbrio (por exemplo, o movimento browniano). Deste ponto de vista, portanto, não é absolutamente certo que a entropia aumente em qualquer processo espontâneo. A entropia pode decrescer algumas vezes. Se esperássemos suficientemente, mesmo os estados mais improváveis poderiam ocorrer: a água de um lago poderia congelar em um dia quente de verão ou ocorrer repentinamente um vácuo local em uma sala. Embora tais acontecimentos sejam possíveis, o cálculo dá para a probabilidade de sua ocorrência um valor incrivelmente pequeno. Portanto,

---

[5] Para exemplos específicos, ver "Entropy and Disorder" por P. G. Wright, em *Contemporary Physics*, novembro, 1970.

a segunda lei da Termodinâmica indica-nos o curso mais provável dos acontecimentos, não os únicos possíveis. Porém sua área de aplicação é tão ampla e a eventualidade de contradição na natureza tão pequena, que ela desfruta a distinção de ser uma das leis mais úteis e gerais de todas as ciências.

questões

1. Que condições devem ser satisfeitas por um sistema a fim de estar em equilíbrio termodinâmico?
2. Dentre os fenômenos descritos a seguir, existe algum reversível? (*a*) a quebra de uma garrafa vazia; (*b*) a mistura de um coquetel; (*c*) o derreter de um cubo de gelo em um copo de refrigerante; (*d*) a queima de um pedaço de lenha; (*e*) a perfuração de um pneu; (*f*) acabar a "Sinfonia Inacabada"; (*g*) escrever esse livro.
3. Dê alguns exemplos de processos irreversíveis que ocorram na natureza.
4. Na transformação irreversível da Fig. 25-1*a* podemos calcular o trabalho realizado como uma área em um diagrama *p-V*? Algum trabalho é realizado?
5. Uma dada quantidade de energia mecânica pode ser completamente convertida em energia térmica? Em caso afirmativo, dê um exemplo.
6. Você pode sugerir um processo reversível pelo qual o calor possa ser cedido a um sistema? Fornecer calor mediante um bico de Bunsen constitui um processo reversível?
7. Dê uma explicação qualitativa de como as forças de atrito entre superfícies móveis produz energia térmica. Ocorre o processo inverso (energia térmica produzindo movimento relativo das superfícies)? Você pode dar uma explicação plausível?
8. Um bloco retorna à sua posição inicial depois de dissipar em calor, através do atrito, a sua energia mecânica. Este processo é termodinamicamente reversível?
9. Para percorrer o ciclo de Carnot não é necessário partir do ponto *a*, Fig. 25-4; pode-se partir de um ponto como *b*, *c*, *d* ou qualquer ponto intermediário. Explicar.
10. Se a máquina de Carnot é independente da substância de trabalho, também as máquinas reais talvez fossem independentes dela, pelo menos até certo ponto. Por que então, no caso de máquinas reais, temos tanta preocupação em encontrar combustíveis adequados, tais como carvão, gasolina ou material físsil? Por que não usar pedras como combustíveis?
11. O rendimento de uma máquina térmica não poderia ser definido como $e = W/Q_2$, ao invés de $e = W/Q_1$? Por que não?
12. Em que condições uma máquina térmica ideal teria um rendimento igual a 100%?
13. Que fatores reduzem o rendimento de uma máquina térmica, em relação a seu valor ideal?
14. A fim de aumentar o rendimento de uma máquina de Carnot, com maior eficácia, deveríamos aumentar T_1, mantendo T_2 constante, ou manter T_1 constante e diminuir T_2?
15. Uma cozinha poderia ser esfriada deixando aberta a porta do refrigerador? Explicar.
16. Uma máquina térmica, operando entre a superfície morna de um oceano e a água mais fria abaixo da superfície, é conceitualmente possível? É uma idéia prática? (Ver "Solar Sea Power" por Clarence Zener em *Physics Today*, janeiro, 1973.)
17. Há variação de entropia em movimentos permanentemente mecânicos?
18. Duas amostras de um gás encontram-se inicialmente à mesma temperatura e pressão; elas são comprimidas desde o volume V ao volume $V/2$, uma delas isotermicamente e a outra adiabaticamente. Em qual dos processos a pressão final é maior? A entropia do gás varia em algumas dessas transformações?
19. Suponha que preferimos representar o estado de um sistema pela sua entropia e sua temperatura absoluta, ao invés de o representarmos pela sua pressão e seu volume. (*a*) O ciclo de Carnot teria a mesma forma em um diagrama *T-S*? (*b*) Qual o significado físico que deve ser dado a área sob a curva em um diagrama *T-S*?
20. Considere uma caixa que contém um número muito pequeno de moléculas, digamos cinco. Algumas vezes acontecerá por acaso que todas estas moléculas

estejam na metade esquerda da caixa, ficando a metade direita completamente vazia. Esta situação é a oposta de uma expansão livre, processo este que declaramos *irreversível*. Qual sua explicação?

21. Prove que a entropia total aumenta quando há conversão de trabalho em calor por atrito entre superfícies deslizantes. Descrever o aumento de desordem.
22. Comentar a afirmativa: "Uma máquina térmica converte movimento mecânico desordenado em movimento mecânico organizado."
23. Quando juntamos as cartas de um baralho ou quando construímos uma casa de tijolos, por exemplo, estamos aumentando a ordem do mundo físico. Isto viola a segunda lei da Termodinâmica? Explique.
24. O processo do nascimento humano parece envolver um crescimento na ordem. Este processo viola, então, a regra que governa a entropia de um sistema? (Ver "Thermodynamics of Evolution" por Prigogine, Nicolis e Babloyantz em *Physics Today*, novembro, 1972.)
25. Uma tira de borracha parece mais quente do que sua vizinhança imediata depois de esticada rapidamente; ela se torna notavelmente mais fria quando se contrai rapidamente; e se estiver suportando uma carga ela se contrai ao ser aquecida. Explique estas observações utilizando a informação de que as moléculas da borracha consistem de longas cadeias de átomos, entrelaçadas e cruzadas, cuja orientação é mais ou menos caótica.
26. Explique a afirmativa: "Os raios cósmicos *diminuem continuamente a entropia da Terra*, sobre a qual eles incidem." Isto contradiz a segunda lei da Termodinâmica?
27. Energia térmica flui do Sol (temperatura na superfície 6.000 K) para a Terra (temperatura na superfície 300 K). Mostre que a entropia do sistema Sol-Terra cresce durante este processo.
28. É verdade que a energia térmica do universo está continuamente se tornando menos disponível? Por quê?
29. Pode-se usar a termodinâmica terrestre, que se sabe ser aplicável para corpos limitados e isolados, para todo o universo? Se a resposta é afirmativa, então o universo é limitado? e do que ele é isolado?
30. A primeira, segunda e terceira leis da Termodinâmica podem ser parafraseadas como se segue: 1) Você não pode vencer; 2) Você não pode nem mesmo empatar; 3) Você não pode abandonar o jogo. Explique em que sentido estas são afirmações permissíveis.
31. Discuta o seguinte comentário de Panofsky e Phillips: "Do ponto de vista formal da Física, existe apenas um conceito assimétrico no tempo, a saber, a entropia. Mas isto torna razoável admitir que a segunda lei da Termodinâmica possa ser usada para verificar o sentido do tempo, independentemente de qualquer referencial; isto é, consideramos como sentido positivo do tempo o da desordem crescente ou da entropia crescente..." (Ver, "The Arrow of Time" por David Layzer, em *Scientific American*, dezembro, 1975.)

problemas

SEÇÃO 25-3

1. Mostre que, no plano *TS*, o ciclo de Carnot é representado por um *retângulo*. (*a*) Qual é o significado da área do retângulo? (*b*) Encontre a expressão do rendimento do ciclo de Carnot, usando este diagrama.
2. Uma máquina térmica de gás ideal opera em um ciclo de Carnot, entre 227°C e 127°C. Ela absorve $6{,}0 \times 10^4$ cal à temperatura superior. (*a*) Que trabalho por ciclo esta máquina é capaz de realizar? (*b*) Qual é o rendimento da máquina?
Resposta: (*a*) $1{,}2 \times 10^4$ cal. (*b*) 20%.
3. Num ciclo de Carnot, a expansão isotérmica do gás ocorre a 500 K e a compressão isotérmica ocorre a 300 K. Durante a expansão, 700 calorias de energia térmica são transferidas para o gás. Determine: (*a*) o trabalho realizado pelo gás durante a expansão isotérmica, (*b*) o calor rejeitado pelo gás durante a compressão isotérmica, (*c*) o trabalho realizado sobre o gás durante a compressão isotérmica.
4. Se o ciclo de Carnot for percorrido no sentido inverso, teremos um refrigerador ideal. Uma quantidade de calor Q_2 é absorvida à temperatura inferior T_2 e a quantidade Q_1 é descarregada à temperatura superior T_1. A diferença é o trabalho W que deve ser fornecido para que o refrigerador funcione. Mostre que

$$W = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2}.$$

5. Num refrigerador, a câmara de baixa temperatura encontra-se a −15°C e o gás no compressor está a uma temperatura de 37°C. (*a*) Encontre o rendimento deste ciclo. (*b*) Se a

quantidade de calor fornecida ao refrigerador for igual a 30 J, qual seria o trabalho fornecido ao refrigerador?

6. (*a*) Uma máquina de Carnot opera entre um reservatório quente a 320 K e um reservatório frio a 260 K. Ela absorve 500 J de calor no reservatório quente; que trabalho ela pode fornecer? (*b*) Se a mesma máquina, trabalhando ao contrário, funcionar como refrigerador entre os mesmos dois reservatórios, quanto trabalho deve ser fornecido para retirar 1.000 J de calor do reservatório frio? *Resposta:* (*a*) 94 J; (*b*) 230 J.

7. Um refrigerador é mantido a −13°C e a temperatura da fonte quente é igual a 127°C. Calcule o trabalho mínimo que precisa ser fornecido ao refrigerador para extrair 2 J de calor do reservatório frio.

SEÇÃO 25-5

8. O chamado *moto contínuo de primeira espécie* é um dispositivo que viola o primeiro princípio da Termodinâmica. O *moto contínuo de segunda espécie* é um dispositivo que viola a segunda lei da Termodinâmica. Um engenheiro alega ter inventado uma certa máquina térmica tal que, operando em ciclos, consumia uma quantidade de calor igual a $1{,}06 \times 10^8$ Joules de uma fonte a 480 K e rejeitava uma quantidade de calor igual a $4{,}2 \times 10^7$ J a uma temperatura de 240 K. Alega o inventor que esta máquina térmica produz um trabalho de 16 kWh. Verifique se esta máquina viola: (*a*) a primeira lei da Termodinâmica, (*b*) a segunda lei da Termodinâmica.
Resposta: (*a*) Não. (*b*) Sim.

9. Mostrar, mediante o diagrama *TS*, que o rendimento de qualquer ciclo reversível de uma dada máquina térmica, entre dois extremos de temperatura T_1 e T_2, é sempre *menor* do que o rendimento do ciclo de Carnot entre os mesmos extremos de temperatura.

10. Em uma máquina térmica de dois estágios, uma quantidade de calor Q_1 é absorvida à temperatura T_1, realiza-se o trabalho W_1 e a quantidade de calor Q_2 é expelida à temperatura T_2 pelo primeiro estágio. O segundo estágio absorve o calor expelido pelo primeiro, realiza o trabalho W_2 e expele a quantidade de calor Q_3 à temperatura inferior T_3. Prove que o rendimento do conjunto é $(T_1 - T_3)/T_1$.

11. No problema anterior você verificou que o aproveitamento de uma fonte de temperatura *intermediária* entre dois extremos não contribui para aumentar o rendimento máximo teórico do sistema. Entretanto, em certas operações industriais, como, por exemplo, num *evaporador*, o sistema é aquecido por um vapor com uma temperatura muito elevada T_1 (muito maior do que a temperatura ambiente T_a). Este vapor, depois de ser usado para aquecer a solução do *evaporador*, é *rejeitado* para a atmosfera a uma temperatura T_2 ainda muito maior do que T_a. O vapor rejeitado na atmosfera poderia ser usado para alimentar um *segundo estágio* em outro *evaporador*. Qual seria o número máximo de estágios para o aproveitamento integral do calor da fonte quente à temperatura T_1? Qual seria o rendimento máximo teórico deste conjunto de evaporadores?

12. Uma usina hidroelétrica gera eletricidade através de uma turbina acoplada a um gerador que converte a energia mecânica em energia elétrica. A turbina é movida pela energia cinética da água proveniente de uma represa. (*a*) O rendimento máximo de uma usina hidroelétrica é limitado pelo rendimento do ciclo de Carnot? (*b*) Calcule o rendimento de uma usina hidroelétrica, sabendo que a vazão da água é igual a 800 m³/s, que a água cai de uma altura de 100 m e que a potência elétrica gerada é igual a $6{,}5 \times 10^8$ W.
Resposta: (*a*) Não. (*b*) 82,8%.

13. Um aparelho que liquefaz hélio se encontra numa sala cuja temperatura ambiente é de 305 K. O hélio no interior do aparelho está a uma temperatura de 4 K. Calcule a razão entre a energia térmica transmitida à sala e a energia térmica extraída do hélio, admitindo que o ciclo de refrigeração para a obtenção do hélio a 4 K tenha um rendimento máximo possível para os extremos de temperatura considerados.

14. Uma turbina combinada, a mercúrio e vapor de água, absorve vapor saturado de mercúrio de uma caldeira a 470°C e o descarrega para aquecer uma caldeira a vapor, a 238°C. A turbina recebe vapor a esta temperatura e lança-o em um condensador a 38°C. Qual o rendimento máximo da combinação? *Resposta:* 58%.

15. Em um aquecedor de ar transfere-se calor do exterior, que está a −5°C, para o ambiente interno, a 17°C; a energia é proporcionada por um motor elétrico. Quantos joules de calor serão idealmente fornecidos ao ambiente para cada joule de energia elétrica consumida?

16. Um motor de *combustão interna* à gasolina pode ser aproximado pelo *ciclo Otto* indicado na Fig. 25-10. Suponha um gás ideal e uma *razão de compressão* $V_4/V_1 = 4$. Suponha $p_2 = 3p_1$. (*a*) Calcule a temperatura em cada um dos vértices do diagrama pV indicado em termos de p_1, T_1 e da razão $\gamma = C_p/C_V$. (*b*) Ache o rendimento deste ciclo.
Resposta: (*a*) $T_2 = 3T_1$; $T_3 = 3(4)^{1-\gamma}\, T_1$; $T_4 = (4)^{1-\gamma}\, T$. (*b*) $1 - (4)^{1-\gamma}$.

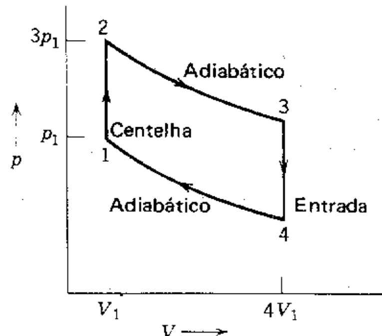


figura 25-10

17. O *ciclo Diesel* é o ciclo ideal das *máquinas de combustão interna* nas quais, em vez da explosão (como no *ciclo Otto* indicado no problema anterior) ocorrer por *centelhamento*, a inflamação é provocada por uma compressão adiabática. O ciclo Diesel é análogo ao ciclo Otto com relação às duas transformações adiabáticas (uma compressão e uma expansão); outra etapa análoga ao do ciclo Otto corresponde a um resfriamento *isocórico*. Entretanto, em vez do aquecimento isocórico (que ocorre no ciclo Otto), no ciclo Diesel esta etapa de aquecimento é *isobárica*. (*a*) Represente o ciclo Diesel num

plano pV. (*b*) Determine o rendimento do ciclo Diesel em função da *razão de compressão* e em função da razão entre os calores específicos do gás (considerado ideal).

SEÇÃO 25-6

18. Usando a equação de estado de um gás ideal e a equação de uma transformação adiabática para um gás ideal, demonstre que a inclinação dp/dV de uma adiabática, em um diagrama p-V, é $-\gamma p/V$ e que a de uma isoterma é $-p/V$. Partindo destes resultados prove que as adiabáticas são curvas mais inclinadas que as isotermas.

SEÇÃO 25-7

19. Num certo sistema ocorre uma transformação isotérmica reversível. A variação de entropia ocorrida nesta transformação foi igual a 0,2 J/K. Calcule a temperatura da transformação, sabendo que o calor fornecido durante a transformação foi igual a 20 calorias.

20. Determine a variação de entropia que ocorre durante a vaporização de um quilograma de água sob pressão de 1 atm. O calor de vaporização da água vale aproximadamente 540 cal/g. *Resposta:* 6,06 kJ/K.

21. Nos Probls. 41 e 42 do Cap. 23 você fez alguns cálculos sobre uma transformação *politrópica reversível* de um gás ideal. Suponha que um gás ideal sofra uma compressão politrópica reversível; seja $a = 1,1$ o expoente da politrópica. Dados: número de moles: 0,05; pressão inicial = 1,5 atm; $C_V = 5$ cal/mol · K; temperatura final = 137°C; temperatura inicial = 37°C. Calcule a variação de entropia e a pressão final do gás.

SEÇÃO 25-8

22. Um mol de um gás ideal se expande isotérmica e irreversivelmente contra a pressão atmosférica. Seja V_1 o volume inicial, V_2 o volume final e T a temperatura do gás. Calcule a variação de entropia: (*a*) do sistema, (*b*) do exterior, (*c*) do universo. (*d*) Qual é o sinal da variação de entropia do universo?
Resposta: (*a*) $R \ln (V_2/V_1)$. (*b*) $-p_{ext}(V_2 - V_1)/T$. (*c*) A variação de entropia do universo é dada pela soma da variação da entropia do sistema (*a*) mais a variação da entropia do exterior (*b*). (*d*) Positivo.

23. Em uma experiência para determinação de calor específico misturam-se 100 g de alumínio (c_p = 0,215 cal/g°C) a 100°C com 50 g de água a 20°C. Calcule a diferença de entropia entre o estado final e o estado antes da mistura.

24. Um cubo de gelo de 8,00 g está a −10,0°C e é lançado em uma garrafa térmica que contém 100 cm³ de água a 20,0°C. Qual a variação de entropia do sistema, ao ser alcançado o estado final de equilíbrio? O calor específico do gelo é 0,52 cal/g°C.
Resposta: +0,15 cal/K.

25. Um cubo de gelo de 10 g e a −10°C é colocado em um lago cuja temperatura é + 15°C. Calcule a mudança de entropia do sistema enquanto o cubo de gelo entra em equilíbrio térmico com o lago.

SEÇÃO 25-9

26. (*a*) Prove que, quando uma substância de massa m e calor específico c é aquecida de T_1 a T_2, a variação de entropia é

$$S_2 - S_1 = mc \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

(*b*) Se a substância esfriar, sua entropia decrescerá? (*c*) Em caso afirmativo, a entropia total do universo decresce neste processo? *Resposta:* (*b*) Sim. (*c*) Não.

27. Quatro moles de um gás ideal expandem-se desde o volume V_1 ao volume V_2 (= $2V_1$). (*a*) A expansão é isotérmica à temperatura T = 400 K; deduzir uma expressão para o trabalho realizado pelo gás ao expandir-se. (*b*) Deduza, para a expansão isotérmica acima referida, uma expressão para a variação de entropia, se houver. (*c*) Se a expansão fosse reversível e adiabática e não isotérmica, a variação de entropia seria positiva, negativa ou nula?

28. Uma haste de latão encontra-se em contato térmico, por uma das extremidades, com um reservatório de calor a 127°C, e na outra extremidade com um reservatório a 27°C. (*a*) Calcular a variação total de entropia proveniente do processo de condução de 1.200 cal de calor através da haste. (*b*) A entropia da haste varia nesse processo?
Resposta: (*a*) + 1,0 cal/K. (*b*) Não.

29. 1,0 mol de hidrogênio e 1,0 mol de nitrogênio estão em recipientes adjacentes, à mesma pressão p e temperatura T, tais que os gases se comportam praticamente como gases ideais. (*a*) Se a velocidade quadrática média das moléculas de H_2 é 1.850 m/s à temperatura T, qual será o valor da mesma velocidade para as moléculas de N_2? (*b*) Qual dos gases terá maior percentagem de suas moléculas possuindo velocidades que difiram em ± 50 m/s da velocidade quadrática média? (*c*) Se os recipientes forem ligados, de forma que H_2 e N_2 se misturem, a variação de entropia será positiva, negativa ou nula?

30. Considere o problema anterior. Determine a variação de entropia quando o hidrogênio e o nitrogênio se misturarem. *Resposta:* $2R \ln 2$.

31. (*a*) Um corpo de massa finita está originalmente à temperatura T_2, superior à de um reservatório térmico cuja temperatura é T_1. Uma máquina opera em ciclos infinitesimais entre o corpo e o reservatório, até que baixa a temperatura do corpo de T_2 para T_1. Prove que o trabalho máximo que pode ser obtido da máquina é $W_{máx.} = Q - T_1 (S_2 - S_1)$, sendo $S_1 - S_2$ a variação de entropia do corpo e Q a quantidade de calor retirada dele pela máquina. (*b*) Um corpo de massa finita está inicialmente à mesma temperatura T_1 que o reservatório térmico. Um refrigerador opera em ciclos infinitesimais entre o corpo e o reservatório, até conseguir baixar a temperatura do corpo de T_1 para T_0. Provar que a quantidade mínima de trabalho que deve ser fornecida ao refrigerador é $W_{mín.} = T_1 (S_1 - S_0) - Q$, onde $S_0 - S_1$ é a variação de entropia do corpo e Q o calor retirado dele pelo refrigerador.

SEÇÃO 25-10

32. Em geral, a probabilidade w_{12} de um evento complexo, que consiste de dois eventos não relacionados, é igual ao produto de suas respectivas probabilidades w_1 e w_2. A entropia S_{12} de um sistema complexo, que consiste de dois sistemas simples, é exatamente a soma das respectivas entropias, S_1 e S_2. Prove que, para um sistema complexo, a Eq. 25-15, que relaciona probabilidade e entropia, é coerente com a propriedade aditiva da entropia e com a propriedade multiplicativa da probabilidade.

tópicos suplementares

TÓPICO SUPLEMENTAR IV
EQUAÇÃO DE ONDA PARA UMA CORDA ESTICADA

A Fig. IV-1 representa uma seção de uma corda longa que está sob a tensão F. A corda foi puxada transversalmente, na direção Oy, de modo que uma onda de deslocamento propaga-se por ela ao longo da direção Ox. Consideremos um elemento diferencial dx da corda e apliquemos a segunda lei de Newton, com o fito de determinar como a onda se move ao longo da corda.

Seja μ a massa por unidade de comprimento da corda; a massa do elemento dx será portanto μdx. O componente y da força resultante que atua nesse elemento é

$$F \operatorname{sen} \theta_{x+dx} - F \operatorname{sen} \theta_x.$$

Consideremos somente pequenos deslocamentos transversais da corda, de forma que a força restauradora variará linearmente com o comprimento e o princípio de superposição será válido (*v.* Seç. 19-4). Significa isto que θ na Fig. IV-1 será pequeno e poderemos substituir sen θ por tg θ; ora, tg θ é o coeficiente angular da corda, ou seja, $\partial y/\partial x$. Devemos usar derivadas parciais porque o deslocamento y depende não apenas de x mas também de t. A componente y da força resultante será pois

$$F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x,$$

que podemos escrever como

$$F \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx$$

ou ainda

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

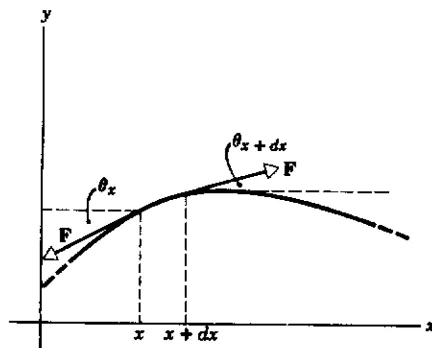


figura IV-1

A massa do elemento da corda é μdx e sua aceleração $\partial^2 y/\partial t^2$. Portanto, a aplicação da segunda lei de Newton ao movimento transversal da corda fornece

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad \text{(IV-1)}$$

Esta equação, denominada *equação de onda*, é a equação diferencial que descreve a propagação de uma onda ao longo de uma corda cuja massa por unidade de comprimento é μ e que se encontra sob a tensão F.

A fim de o provar, bastará demonstrar que as Eqs. 19-2 e 19-3, isto é,

$$y = f(x \pm vt), \qquad \text{(IV-2)}$$

a equação geral que representa uma onda de qualquer forma que se propaga ao longo de x, é uma solução da Eq. IV-1. Lembremos que v na Eq. IV-2 é a velocidade do distúrbio ondulatório e que f é uma função *qualquer* de $x \pm vt$.

Vejamos se a Eq. IV-2 é realmente solução de IV-1, mediante a substituição da primeira na segunda. Para esse fim, notemos que as duas derivadas parciais de segunda ordem de y são

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f'' \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f'',$$

sendo f'' a derivada segunda da função f da Eq. IV-2 em relação a $x \pm vt$. Substituindo essas derivadas na Eq. IV-1 resulta

$$f'' = \frac{\mu}{F} v^2 f'',$$

que podemos escrever ainda (ver Eq. 19-12) como

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \qquad \text{(IV-3)}$$

Concluímos assim que a Eq. IV-2 é com efeito uma solução da equação diferencial parcial IV-1, se a velocidade do distúrbio ondulatório descrito por esta equação for expressa pela Eq. IV-3.

Verifiquemos, em particular, se a Eq. 19-10,

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t), \qquad \text{(19-10)}$$

é solução da Eq. IV-1. Sabemos que deve ser, pois a Eq. 19-10 é apenas um caso particular da relação geral, Eq. IV-2, que acabamos de provar ser uma solução. Ainda assim, é instrutivo averiguar esta importante função de $x \pm vt$, por substituição na Eq. IV-1.

As derivadas segundas da Eq. 19-10 são

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$$

e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t).$$

A substituição na Eq. IV-1 fornece

$$-k^2 y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t) = \frac{\mu}{F} [-\omega^2 y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)]$$

ou seja,

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Como $\omega/k = v$ (vide Eq. 19-11), esta relação é idêntica à Eq. IV-3, e, como esperávamos, a Eq. 19-10 é de fato solução da Eq. IV-1.

TÓPICO SUPLEMENTAR V
DEDUÇÃO DA LEI DE MAXWELL PARA A DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES

Boltzmann, em 1876, deduziu a lei de Maxwell para a distribuição das velocidades das moléculas de um gás mediante o raciocínio apresentado a seguir. Suponhamos que um campo gravitacional uniforme g atue sobre um gás mantido à temperatura constante T. O número de moléculas por unidade de volume n decrescerá então com a altura z, de acordo com a lei das atmosferas (Vide Ex. 1, Cap. 17). Do que sabemos sobre a interpretação estatística da temperatura, entretanto, concluímos que a lei de distribuição das velocidades — cuja forma supomos ainda não conhecida — deve permanecer a mesma em todas as alturas, pois depende unicamente da temperatura. Todavia, esta lei determina a taxa segundo a qual as moléculas se movem verticalmente na atmosfera, a qualquer altura, e deve estar diretamente relacionada com o decréscimo de n_v com z. Explorando minuciosamente esta relação, poderemos, com efeito, deduzir a lei de distribuição das velocidades.

O peso de gás por unidade de área, entre os níveis z e $z + dz$ (Fig. V-1) é $n_v mg\, dz$, sendo m a massa de uma molécula. Para haver equilíbrio, este peso por unidade de área deve ser igual à diferença de pressão entre z e $z + dz$, isto é,

$$n_v mg\, dz = -\, dp, \qquad \text{(V-1)}$$

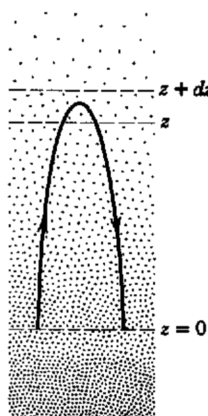


figura V-1

em que o sinal negativo indica decréscimo de p com o aumento de z.

A equação de estado de um gás ideal, $pV = nRT$, pode ser escrita sob a forma

$$p = n_v kT, \qquad \text{(V-2)}$$

pois $n = n_v V/N_0$, sendo N_0 $(= R/k)$ o número de Avogadro, isto é, o número de moléculas por mol, e k é a constante de Boltzmann. Combinando as Eqs. V-1 e V-2 resulta

$$\frac{dp}{p} = \frac{dn_v}{n_v} = -\frac{mg}{kT}\, dz.$$

Se a temperatura for constante, esta equação poderá ser integrada, resultando

$$n_v = \text{constante} \cdot e^{-mgz/kT} \qquad \text{(V-3)}$$

relação que, devido à Eq. V-2, está em acordo com o resultado do Ex. 1, Cap. 17.

Podemos achar a mudança em n_v à medida que vamos de z para $z + dz$, diferenciando a Eq. V-3, ou

$$dn_v = -\ \text{constante}\ e^{-mgz/kT}\, dz. \qquad \text{(V-4)}$$

Associamos o decréscimo de n_v no intervalo dz com o fato de, em $z = 0$ (o nível que escolhermos), existirem algumas moléculas que se movem para cima — as quais, temporariamente, por conveniência, chamaremos "moléculas especiais" — cujas componentes verticais da velocidade encontram-se no intervalo particular de v_z a $v_z + dv_z$, tal que (desprezando as colisões, cf. abaixo) elas podem elevar-se até a altura z mas não até $z + dz$. Essas moléculas ultrapassam o nível z, invertem o sentido de seu movimento e baixam novamente, conforme indica a Fig. V-1. Vemos agora, mais claramente, a relação entre a Eq. V-3 e a lei de distribuição das velocidades. As moléculas que atravessam esse intervalo dz (vindas de cima ou de baixo), ou as moléculas que jamais alcançam o intervalo, não podem contribuir para o decréscimo dn_v, da Eq. V-4.

A taxa, por unidade de área, em que as "moléculas especiais" deixam o nível $z = 0$ (ou em que chegam a ele) é $V_z n_v(v_z)\, dv_z$; o produto $n_v(v_z)\, dv_z$ é o número de moléculas por unidade de volume cujos componentes verticais da velocidade encontram-se entre v_z e $v_z + dv_z$.

Ora, a taxa por unidade de área em que as "moléculas especiais" chegam ao nível z, mas não ao nível $z + dz$, é proporcional ao valor da diferença de densidade dn_v entre z e $z + dz$, ou seja, de acordo com a Eq. V-4,

$$v_z n_v(v_z)\, dv_z = \text{constante} \cdot e^{-mgz/kT}\, dz, \qquad \text{(V-5)}$$

sendo a constante independente de z. A Eq. V-5 exige que a variação dn_v seja explicada pelas "moléculas especiais" e é, de fato, a equação de definição de $n_v(v_z)$.

De acordo com o princípio de conservação da energia, as "moléculas especiais" têm a seguinte propriedade[1]:

$$\tfrac{1}{2} m v_z^{\,2} = mgz$$

ou

$$m v_z dv_z = mg\, dz.$$

Usamos estas duas relações para eliminar z e dz da Eq. V-5, obtendo, como o estudante deve verificar,

$$n_v(v_z)\, dv_z = \text{constante} \cdot e^{-mvz^2/2kT}\, dv_z, \qquad \text{(V-6}a\text{)}$$

sendo $n_v(v_z)\, dv_z$ o número de moléculas por unidade de volume cujos componentes verticais de velocidade estão entre v_z e $v_z + dv_z$. Note a Eq. V-6*a* não contém g nem z. O campo gravitacional da Fig. V-1, introduzido para permitir-nos calcular a distribuição de velocidades, serviu a este propósito. Podemos aplicar a Eq. V-6*a* a um gás mesmo se o $g = 0$ ou se os efeitos gravitacionais forem desprezíveis. Em tal caso, a direção vertical, que identificamos com o eixo Oz, não possui mais qualquer significado especial. Isto é, a distribuição de velocidades para um dos componentes da velocidade seria a mesma para qualquer outro componente, pois que não existe direção especial ou preferida em um gás que esteja em equilíbrio, livre de forças externas. Podemos portanto escrever

$$n_v(v_x)\, dv_x = \text{constante} \cdot e^{-mvx^2/2kT}\, dv_x \qquad \text{(V-6}b\text{)}$$

e

$$v_v(v_y)\, dv_y = \text{constante} \cdot e^{-mvy^2/2kT}\, dv_y, \qquad \text{(V-6}c\text{)}$$

para os dois outros componentes da velocidade.

Procuremos agora estabelecer a lei de distribuição de velocidades, de Maxwell (Eq. 24-2); ela é expressa em função da velocidade v e não dos componentes individuais v_x, v_y e v_z. Não estamos preocupados agora com a velocidade **v**, pois supomos que ela seja completamente aleatória. Qualquer velocidade **v** pode ser expressa por um vetor traçado a partir da origem, na Fig. V-2; as projeções desse vetor nas direções Ox, Oy e Oz são respectivamente, v_x, v_y e v_z. Dizemos comumente que os eixos da Fig. V-2 definem o "espaço das velocidades", o qual apresenta muitas semelhanças formais com o espaço comum (de coordenadas), cujos eixos são Ox, Oy e Oz.

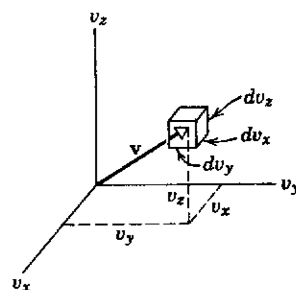


Figura V-2

Na Fig. V-2 está representado também um pequeno elemento de "volume", cujas arestas são dv_x, dv_y e dv_z; dizemos que o volume deste elemento é $dv_x dv_y dv_z$, no espaço das velocidades. Um ponto em tal elemento corresponde a uma partícula cujos componentes da velocidade estão entre v_x e $v_x + dv_x$ e $v_y + dv_y$, v_z e $v_z + dv_z$. Podemos interpretar $n_v(v_z)$ na Eq. V-6*a* como exprimindo a *probabilidade* de que uma dada molécula tenha componente no intervalo indicado v_z a $v_z + dv_z$, com interpretações análogas para $n_v(v_x)$ e $n_v(v_y)$. A probabilidade de que uma dada molécula tenha *todos os três* componentes de sua velocidade nos intervalos mencionados, ou seja, a probabilidade de que a ponta do vetor **v** esteja dentro do elemento de volume da Fig. V-2, é o *produto* das três probabilidades independentes, expressas pelas Eqs. V-6, isto é,

$$\text{constante} \; . \; e^{-mvx^2/2kT}\; e^{-mvy^2/2kT}\; e^{-mvz^2/2kT}\; dv_x\, dv_y\, dv_z.$$

[1] Se levarmos em conta as colisões, este resultado é ainda válido *em média* para as muitas moléculas que partem de $z = 0$ com um dado valor de v_z e se movem no intervalo $z + dz$, onde sua velocidade é $v_z = 0$, mesmo que tais moléculas sigam trajetórias muito desordenadas, devido às colisões.

Como $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, esta expressão transforma-se em

$$\text{constante} \cdot e^{-mv^2/2kT}(dv_x dv_y dv_z). \qquad \text{(V-7)}$$

A grandeza entre parênteses é um elemento de volume no espaço das velocidades. Na Lei de Maxwell para a distribuição das velocidades não estamos interessados na direção das velocidades moleculares, mas apenas em seus valores. É por isso mais conveniente substituir o elemento de volume acima por um outro, correspondente ao número de moléculas contidas entre v e $v + dv$, *a despeito de suas direções.* Este elemento de volume não é um "cubo" e sim o espaço limitado por duas esferas concêntricas, uma de raio v e a outra de raio $v + dv$. O volume desse elemento, no espaço das velocidades, é $4\pi v^2 dv$; substituindo por este valor o parênteses da expressão V-7, obtém-se o número de moléculas por unidade de volume, cujas velocidades estão contidas entre v e $v + dv$,

$$n_v(v)\, dv = \text{constante} \cdot e^{-mv^2/2kT}(4\pi v^2\, dv)$$

ou ainda

$$n_v(v) = Cv^2 e^{-mv^2/2kT},$$

sendo C uma constante. Se estendermos este resultado a todas as velocidades possíveis, simplesmente obteremos o número total de moléculas por unidade de volume, qualquer que seja a velocidade. Podemos portanto determinar C exigindo que

$$\int_0^\infty n_v(v)\, dv = n_v,$$

sendo n_v o número total de partículas por unidade de volume, independentemente da velocidade. Guiado pelos métodos expostos no Exemplo 3 do Cap. 24, o estudante pode provar que

$$C = 4\pi n_v (m/2\pi kT)^{3/2}$$

e portanto

$$n_v(v) = 4\pi n_v (m/2\pi kT)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}. \qquad \text{(V-8)}$$

Consideremos um número finito N de moléculas, contidas em uma caixa de volume V. Se multiplicarmos por V cada membro da equação precedente, poderemos substituir $n_v V$, no segundo membro, por N e $n_v(v)V$ no primeiro por $N(v)$, resultando na Eq. 24-2.

apêndices

APÊNDICE A
*O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)**

Unidades SI Fundamentais[a]

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
Comprimento	metro	m	"... o comprimento igual a 1 650 763,73 comprimentos de onda no vácuo da radiação correspondente à transição entre os níveis $2p_{10}$ e $5d_5$ do átomo de Criptônio 86." (1960)
Massa	quilograma	kg	"... este protótipo [um certo cilindro de platina iridiada] será considerado a unidade de massa." (1889)
Tempo	segundo	s	"... a duração de .... 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do Césio-133." (1967)

*Adaptado do "The International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 330, edição de 1972.

[a] As definições destas unidades básicas foram adotadas pela "Conferência Geral de Pesos e Medidas", um organismo internacional, nas datas apresentadas. Neste livro não usaremos a candela.

Unidades SI Fundamentais (Continuação)

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
Corrente elétrica	Ampère	A	"... a corrente constante que, se mantida em dois condutores retos paralelos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível, e colocados a 1 metro de separação um do outro, no vácuo, produziria entre estes condutores uma força de 2×10^{-7} N por metro de comprimento." (1946)
Temperatura termodinâmica	Kelvin	K	"... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
Quantidade de substância	mol		"... a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos são os átomos presentes em 0,012 quilogramas de Carbono-12." (1971)
Intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, em direção perpendicular, de uma superficie de ...... 1/600.000 m^2 de um corpo negro à temperatura de fusão da Platina, sob a pressão de 101 325 N/m^2." (1967)

Algumas unidades SI derivadas com nomes especiais

Grandeza	Unidade SI			
	Nome	Símbolo	Expressão em função de outras unidades	Expressão em função das unidades SI fundamentais
Freqüência	Hertz	Hz		s^{-1}
Força	Newton	N		$m \cdot kg/s^2$
Pressão	Pascal	Pa	N/m^2	$kg/m \cdot s^2$
Energia, trabalho, quantidade de calor	Joule	J	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
Potência, fluxo radiante	Watt	W	J/s	$kg \cdot m^2/s^3$
Quantidade de eletricidade, carga elétrica	Coulomb	C		$A \cdot s$
Potencial elétrico, diferença de potencial, força eletromotriz	Volt	V	W/A	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Capacitância	Farad	F	C/V	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$
Resistência elétrica	Ohm	Ω	V/A	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$
Condutância	Siemens	S	A/V	$A^2 \cdot s^3/kg \cdot m^2$
Fluxo magnético	Weber	Wb	$V \cdot s$	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$
Campo magnético	Tesla	T	Wb/m^2	$kg/A \cdot s^2$
Indutância	Henry	H	Wb/A	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$

Alguns símbolos para unidades de grandezas físicas

Símbolos SI		Outros símbolos não SI comumente usados	
Nome	Abreviatura	Nome	Abreviatura
Ampère	A	Angstrom	Å
Candela	cd	Unidade térmica britânica	Btu
Coulomb	C	Caloria	cal
Farad	F	Dia	d
Henry	H	Grau	°
Hertz	Hz	Dina	dyn
Joule	J	Elétron volt	Elétron-Volt
Kelvin	K	Pé	ft
Quilograma	kg	Gauss	G
Metro	m	Grama	g
Mol	mol	Cavalo-vapor	hp
Newton	N	Hora	h
Ohm	Ω	Polegada	in
Pascal	Pa	Milha	mi
Radiano	rad	Minuto (de arco)	′
Segundo	s	Minuto (de tempo)	mi
Siemens	S	Libra	lb
Esferorradiano	sr	Revolução	rev
Tesla	T	Segundo (de arco)	″
Volt	V	Atmosfera padrão	atm
Watt	W	Unidade de massa atômica	um
Weber	Wb	Ano	a

APÊNDICE B
*ALGUMAS CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA**

Durante anos, centenas de medidas de grandezas físicas fundamentais, sozinhas ou em combinação, foram feitas por centenas de coentistas em muitos países. Estas medidas tem precisões diferentes e são independentes. Por exemplo, as medidas diretas de e, e/m, h/e, etc., são obviamente inter-relacionadas. Escolher os melhores valores de e, m, h, etc., de uma extensa quantidade de dados superpostos não é simples.**

Para a maior parte dos problemas deste livro, pode-se usar três algarismos significativos.

Constante	Símbolo	Valor calculado	Melhor valor (1973)	
			Valor[a]	Incerteza[b]
Velocidade da luz no vácuo	c	$3,00 \times 10^{8}$ m/s	2,99792458	0,004
Carga elementar	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,6021892	2,9
Massa de repouso do elétron	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,109534	5,1
Constante de permissividade do vácuo	ε_0	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854187818	0,008
Constante de permeabilidade do vácuo	μ_0	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	4π (exatamente)	—
Razão carga/massa do elétron	e/m_e	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,7588047	2,8
Massa de repouso do próton	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,6726485	5,1
Razão massa do próton massa do elétron	m_p/m	1 840	1 836,15152	0,38
Massa de repouso do nêutron	m_n	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,6749543	5,1
Massa de repouso do muon	m_μ	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,883566	5,6
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626176	5,4
Comprimento de onda Compton do elétron	λ_C	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,4263089	1,6
Constante molar dos gases	R	8,31 J/mol · K	8,31441	31
Constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23}$/mol	6,022045	5,1
Constante de Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380662	32
Volume molar do gás ideal nas CNTP[c]	V_m	$2,24 \times 10^{-2}$ m³/mol	2,241383	31
Constante de Faraday	F	$9,65 \times 10^{-}$ C/mol	9,648456	2,8
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m² · K⁻	5,67032	125
Constante de Rydberg	R	$1,10 \times 10^{7}$/m	1,097373177	0,075
Constante gravitacional	G	$6,67 \times 10^{-11}$ m³/s² · kg	6,6726	75
Raio de Bohr	a_0	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,2917706	0,82
Momento magnético do elétron	μ_e	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284832	3,9
Momento magnético do próton	μ_p	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,4106171	3,9
Magneton de Bohr	μ_B	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274078	3,9
Magneton nuclear	μ_N	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050824	3,9

[a] Mesma unidade e potência de dez que o valor calculado.
[b] Partes por milhão.
[c] Condições normais de temperatura e pressão = 0°C e 1,0 atm.

* Os valores nesta tabela foram selecionados de uma extensa listagem desenvolvida por E. Richard Cohen e B. N. Taylor, *Journal of Physical and Chemical Reference Date*, vol. 2, nº 4 (1973).

** Ver "A Pilgrim's Progress in Search of Fundamental Constants", por J. W. M. Du Mond, *Physics Today*, outubro 1965, e "The Fundamental Physical Constants" por Taylor, Langenberg, e Parker, *Scientific American*, outubro, 1970.

APÊNDICE C
DADOS SOBRE A TERRA, A LUA E O SOL

O Sol

Massa	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Raio	$6{,}96 \times 10^{5}$ km
Massa específica média	1 410 kg/m³
Gravidade superficial	274 m/s²
Temperatura superficial	6 000 K
Taxa de radiação total	$3{,}92 \times 10^{26}$ W

A Terra

Massa	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Raio equatorial	$6{,}378 \times 10^{6}$ m
Raio polar	$6{,}357 \times 10^{6}$ m
Raio de uma esfera de mesmo volume	$6{,}371 \times 10^{6}$ m
Massa específica média	5 522 kg/m³
Aceleração de gravidade[a]	9,80665 m/s²
	32,1740 ft/s²
Velocidade orbital média	29 770 m/s
Velocidade angular	$7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s
Constante solar[b]	1 340 W/m²
Campo magnético (em Washington, D.C.)	$5{,}7 \times 10^{-5}$ T
Momento de dipólo	$8{,}1 \times 10^{22}$ A · m²
Atmosfera padrão	$1{,}013 \times 10^{5}$ Pa
	14,70 lb/in²
	760,0 mm-Hg
Massa específica do ar seco nas CNTP[c]	1,29 kg/m³
Velocidade do som no ar seco nas CNTP	331,4 m/s

[a] Este valor, adotado pelo Comitê Geral de Pesos e Medidas, em 1901, aproxima o valor a 45° de latitude, ao nível do mar.

[b] Esta é a taxa por unidade de área segundo a qual a energia solar atinge a atmosfera terrestre, com incidência normal.

[c] CNTP = Condições normais de temperatura e pressão = 0°C e 1 atm.

A Lua

Massa	$7{,}36 \times 10^{22}$ kg
Raio	1 738 km
Massa específica média	3 340 kg/m³
Gravidade superficial	1,67 m/s²
Distância média Terra-Lua	$3{,}80 \times 10^{5}$ km

APÊNDICE D
*O SISTEMA SOLAR**

	MERCÚRIO	VÊNUS	TERRA	MARTE	JÚPITER	SATURNO	URANO	NETUNO	PLUTÃO
Distância máxima do Sol (10^6 km)	69,7	109	152,1	249,1	815,7	1 507	3 004	4 537	7 375
Distância mínima do Sol (10^6 km)	45,9	107,4	147,1	206,7	740,9	1 347	2 735	4 456	4 425
Distância média do Sol (10^6 km)	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1 427	2 869,6	4 496,6	5 900
Distância média do Sol (unidades astronômicas)	0,387	0,723	1	1,524	5,203	9,539	19,18	30,06	39,44
Período de revolução	88 d	224,7 d	365,26 d	687 d	11,86 a	29,46 a	84,01 a	164,8 a	247,7 a
Período de rotação	59 d	– 243 d retrógrado	23 h 56 min 4 s	24 h 37 min 23 s	9 h 50 min 30 s	10 h 14 min	– 11 h retrógrado	16 h	6 d 9 h
Velocidade orbital (km/s)	47,9	35	29,8	24,1	13,1	9,6	6,8	5,4	4,7
Inclinação do eixo	< 28°	3°	23°27′	23°59′	3°05′	26°44′	82°5′	28°48	?
Incl. da órbita em relação à eclíptica	7°	3,4°	0°	1,9°	1,3°	2,5°	0,8°	1,8°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,047	0,009	0,25
Diâmetro equatorial (km)	4 880	12 104	12 756	6 787	142 800	120 000	51 800	49 500	6 000 (?)
Massa (Terra = 1)	0,055	0,815	1	0,108	317,9	95,2	14,6	17,2	0,1 (?)
Volume (Terra = 1)	0,06	0,88	1	0,15	1 316	755	67	57	0,1 (?)
Densidade (água = 1)	5,4	5,2	5,5	4,0	1,3	0,7	1,2	1,7	(?)
Achatamento	0	0	0,003	0,009	0,06	0,1	0,06	0,02	?
Atmosfera (principais componentes)	nenhuma	CO_2	N_2, O_2	CO_2, Ar	H_2, He	H_2, He	H_2, He, CH_4	H_2, He CH_4	nenhum detectado
Temperatura média na superfície visível (°C) S = sólido, C = nuvens	350(S) d –170(S) noite	– 33 (e) 480(S)	22(S)	– 23(S)	– 150(C)	–180 (C)	–210(C)	–220(C)	–230(?)
Pressão atmosférica na superfície (milibares)	10^{-9}	90 000	1 000	6	(?)	(?)	(?)	(?)	(?)
Gravidade na superfície (Terra = 1)	0,37	0,88	1	0,38	2,64	1,15	1,17	1,18	(?)
Diâmetro aparente médio do Sol visto do Planeta	1°22′40″	44′15″	31′59″	21′	6′09″	3′22″	1′41″	1′04″	49″
Satélites conhecidos	0	0	1	2	13	10	5	2	0

* Reimpresso com permissão de "The Solar System", *Scientific American*, setembro, 1975.

APÊNDICE E
A TABELA PERIÓDICA DOS ELEMENTOS

1
H
1.0079

← número atômico (1); ← número de massa (1.0079)

GASES NOBRES

PERÍODOS	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII	VIII	VIII	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIIA	O
1	1 H 1.00797																	2 He 4.00260
2	3 Li 6.941	4 Be 9.01218											5 B 10.81	6 C 12.01115	7 N 14.0067	8 O 15.9994	9 F 18.99840	10 Ne 20.179
3	11 Na 22.98977	12 Mg 24.305											13 Al 26.98154	14 Si 28.086†	15 P 30.97376	16 S 32.06	17 Cl 35.453	18 Ar 39.948
4	19 K 39.098	20 Ca 40.08	21 Sc 44.9559	22 Ti 47.90	23 V 50.9414	24 Cr 51.996	25 Mn 54.9380	26 Fe 55.847	27 Co 58.9332	28 Ni 58.71	29 Cu 63.546	30 Zn 65.38	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.9216	34 Se 78.96	35 Br 79.904	36 Kr 83.80
5	37 Rb 85.4678	38 Sr 87.62	39 Y 88.9059	40 Zr 91.22	41 Nb 92.9064	42 Mo 95.94	43 Tc 98.9062	44 Ru 101.07	45 Rh 102.9055	46 Pd 106.4	47 Ag 107.868	48 Cd 112.40	49 In 114.82	50 Sn 118.69	51 Sb 121.75	52 Te 127.60	53 I 126.9045	54 Xe 131.30
6	55 Cs 132.9054	56 Ba 137.34	57 *La 138.9055	72 Hf 178.49	73 Ta 180.9479	74 W 183.85	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 192.22	78 Pt 195.09	79 Au 196.9665	80 Hg 200.59	81 Tl 204.37	82 Pb 207.19	83 Bi 208.9804	84 Po (210)	85 At (210)	86 Rn (222)
7	87 Fr (223)	88 Ra 226.0254	89 †Ac (227)	104 (261)	105 (260)	106 (263)												

*	58 Ce 140.12	59 Pr 140.9077	60 Nd 144.24	61 Pm (147)	62 Sm 150.4	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.9254	66 Dy 162.50	67 Ho 164.9304	68 Er 167.26	69 Tm 168.9342	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97
†	90 Th 232.0381	91 Pa 231.0359	92 U 238.029	93 Np 237.0482	94 Pu (244)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (247)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (255)	103 Lr (256)

APÊNDICE F
*AS PARTÍCULAS DA FÍSICA**

Nome da família	Nome da partícula	Símbolo: Partícula	Símbolo: Antipartícula	Spin	Carga, e	Estranheza	Massa de repouso, Mev	Vida Média, segundos	Modo típico de decaimento
–	Fóton	γ	γ	1	0	0	0	Estável	–
LÉPTONS	Elétron	e^-	$\overline{e^-}$	$\frac{1}{2}$	∓ 1	0	0,5110	Estável	–
LÉPTONS	Muon	μ^+	$\overline{\mu^+}$	$\frac{1}{2}$	± 1	0	105,7	$2{,}197 \times 10^{-6}$	$e + \nu + \overline{\nu}$
LÉPTONS	Neutrino do elétron	ν_e	$\overline{\nu_e}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	Estável	–
LÉPTONS	Neutrino do muon	ν_μ	$\overline{\nu_\mu}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	Estável	–
HÁDRONS – MÉSONS	Píon	π^+ π^0	$\overline{\pi^+}$ π^0	0 0	± 1 0	0 0	139,6 135,0	$2{,}603 \times 10^{-8}$ $8{,}28 \times 10^{-17}$	$\mu + \nu$ $\gamma + \gamma$
HÁDRONS – MÉSONS	Méson K	K^+	$\overline{K^+}$	0	± 1	± 1	493,7	$1{,}237 \times 10^{-8}$	$\mu + \nu$
HÁDRONS – MÉSONS	Méson K	K^0	$\overline{K^0}$	0	0	± 1	497,7	$8{,}930 \times 10^{-11}$ $5{,}181 \times 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$
HÁDRONS – MÉSONS	Méson eta	η^0	η^0	0	0	0	548,8	?	$\gamma + \gamma$
HÁDRONS – BÁRIONS – NÚCLEON	Próton	p	$\overline{p}$	$\frac{1}{2}$	± 1	0	938,3	Estável	–
HÁDRONS – BÁRIONS – NÚCLEON	Nêutron	n	$\overline{n}$	$\frac{1}{2}$	0	0	939,6	918	$p + e^- + \nu$
HÁDRONS – BÁRIONS	Lambda	Λ^0	$\overline{\Lambda^0}$	$\frac{1}{2}$	0	∓ 1	1116	$2{,}578 \times 10^{-10}$	$p + \pi^-$
HÁDRONS – BÁRIONS	Sigma	Σ^+	$\overline{\Sigma^+}$	$\frac{1}{2}$	+1	∓ 1	1189	$8{,}00 \times 10^{-11}$	$p + \pi^0$
HÁDRONS – BÁRIONS	Sigma	Σ^0	$\overline{\Sigma^0}$	$\frac{1}{2}$	0	∓ 1	1192	$< 1{,}0 \times 10^{-14}$	$\Lambda^0 + \gamma$
HÁDRONS – BÁRIONS	Sigma	Σ^-	$\overline{\Sigma^-}$	$\frac{1}{2}$	−1	∓ 1	1197	$1{,}482 \times 10^{-10}$	$n + \pi^-$
HÁDRONS – BÁRIONS	Partícula Cascata	Ξ^0	$\overline{\Xi^0}$	$\frac{1}{2}$	0	∓ 2	1315	$2{,}96 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$
HÁDRONS – BÁRIONS	Partícula Cascata	Ξ^-	$\overline{\Xi^-}$	$\frac{1}{2}$	∓ 1	∓ 2	1321	$1{,}652 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$
HÁDRONS – BÁRIONS	Ômega	Ω^-	$\overline{\Omega^-}$	$\frac{3}{2}$	∓ 1	∓ 3	1672	$1{,}3 \times 10^{-10}$	$\Xi^0 + \pi^-$

* Ver (1) "Review of Particle Properties", *Reviews of Modern Physics*, vol. 48, n.º 2, Parte II, abril (1976).
(2) "Quarks with Color and Flavor", por Sheldon Lee Glashow, *Scientific American*, outubro (1975).
(3) "The New Elementary Particles and Charm", por Lewis Ryder, *Physics Education*, janeiro (1976), para maiores informações sobre Física de Partículas.

APÊNDICE G
FATORES DE CONVERSÃO

Fatores de conversão podem ser lidos diretamente das tabelas. Por exemplo, 1 grau = $2{,}778 \times 10^{-3}$ rotações, de modo que $16{,}7° = 16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ rotações. As unidades SI estão em letras maiúsculas. O prefixo "ab" se refere a unidades eletromagnéticas (emu); "stat" se refere a unidades eletrostáticas (esu). Adaptada de *Elements of Physics*, de G. Shortley e D. Williams, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

Ângulo plano

	°	′	″	RADIANO	rot
1 grau =	1	60	3600	$1{,}745 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-3}$
1 minuto =	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60	$2{,}909 \times 10^{-4}$	$4{,}630 \times 10^{-5}$
1 segundo =	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	$4{,}848 \times 10^{-6}$	$7{,}716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO =	57,30	3438	$2{,}063 \times 10^{5}$	1	0,1592
1 rotação =	360	$2{,}16 \times 10^{4}$	$1{,}296 \times 10^{6}$	6,283	1

Ângulo sólido

1 esfera = 4π esferorradianos = 12,57 esferorradianos

Comprimento

	cm	METRO	km	in	ft	mi
1 centímetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39,3	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro =	10^{5}	1000	1	$3{,}937 \times 10^{4}$	3281	0,6214
1 polegada =	2,540	$2{,}540 \times 10^{-2}$	$2{,}540 \times 10^{-5}$	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pé =	30,48	0,3048	$3{,}048 \times 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milha terrestre =	$1{,}609 \times 10^{5}$	1609	1,609	$6{,}336 \times 10^{4}$	5280	1

1 ângstron (Å) = 10^{-10} m   1 ano-luz = $9{,}4600 \times 10^{12}$ km
1 parsec = $3{,}084 \times 10^{13}$ km   1 jarda = 3 ft
1 milha marítima = 1 852 metros = 1,1508 milhas terrestres = 6 076,10 ft

Área

	METRO²	cm²	ft²	in²
1 METRO QUADRADO =	1	10^{4}	10,76	1 550
1 centímetro quadrado =	10^{-4}	1	$1{,}076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado =	$9{,}290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada =	$6{,}452 \times 10^{-4}$	6,452	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

1 milha quadrada = $2{,}788 \times 10^{7}$ ft² = 640 acres   1 acre = 43.560 ft²
1 barne = 10^{-28} m²

Volume

	METRO³	cm³	l	ft³	in³
1 METRO CÚBICO =	1	10^6	1000	35,31	$6,102 \times 10^4$
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	$1,000 \times 10^{-3}$	$3,531 \times 10^{-5}$	$6,102 \times 10^{-2}$
1 litro =	$1,000 \times 10^{-3}$	1000	1	$3,531 \times 10^{-2}$	61,02
1 pé cúbico =	$2,832 \times 10^{-2}$	$2,832 \times 10^4$	28,32	1	1728
1 polegada cúbica =	$1,639 \times 10^{-5}$	16,39	$1,639 \times 10^{-2}$	$5,787 \times 10^{-4}$	1

1 galão americano = 4 quartos americanos = 8 pints americanos = 128 onças americanas = = 231 in³.
1 galão britânico = volume de 10 libras de água a 62°F = 277,42 ft³
1 litro = volume de 1 kg de água no máximo de sua densidade = 10^{-3} m³

Massa

Nota: As unidades à direita e abaixo das linhas cheias não são unidades de massa, mas são, muitas vezes, utilizadas como tais. Quando se escreve, por exemplo:

1 kg "=" 2,205 libras

quer significar que o quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras, sob condição de gravidade padrão ($g = 9,80665$ m/s²).

	g	KG	slug	u.m.a	onça	lb	"ton"
1 grama =	1	0,001	$6,852 \times 10^{-5}$	$6,024 \times 10^{23}$	$3,527 \times 10^{-2}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$1,102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA =	1000	1	$6,852 \times 10^{-2}$	$6,024 \times 10^{26}$	35,27	2,205	$1,102 \times 10^{-3}$
1 "slug" =	$1,459 \times 10^4$	14,59	1	$8,789 \times 10^{27}$	514,8	32,17	$1,609 \times 10^{-2}$
1 u.m.a. =	$1,660 \times 10^{-24}$	$1,660 \times 10^{-27}$	$1,137 \times 10^{-28}$	1	$5,855 \times 10^{-26}$	$3,660 \times 10^{-27}$	$1,829 \times 10^{-30}$
1 onça (avoirdupois) =	28,35	$2,835 \times 10^{-2}$	$1,943 \times 10^{-3}$	$1,708 \times 10^{25}$	1	$6,250 \times 10^{-2}$	$3,125 \times 10^{-5}$
1 libra (avoirdupois) =	453,6	0,4536	$3,108 \times 10^{-2}$	$2,732 \times 10^{26}$	16	1	0,0005
1 "ton" =	$9,072 \times 10^5$	907,2	62,16	$5,465 \times 10^{29}$	$3,2 \times 10^4$	2000	1

Massa específica

Nota: As unidades à direita ou abaixo das linhas cheias são pesos específicos e, como tais, são dimensionalmente diferentes das massas específicas. Deve-se agir com cuidado. (Ver observação na tabela das massas.)

	slug/pé³	KG/M³	g/cm³	lb/ft³	lb/in³
1 slug por pé³ =	1	515,4	0,5154	32,17	$1,862 \times 10^{-2}$
1 QUILOGRAMA por METRO³ =	$1,940 \times 10^{-3}$	1	0,001	$6,243 \times 10^{-2}$	$3,613 \times 10^{-5}$
1 grama por cm³ =	1,940	1000	1	62,43	$3,613 \times 10^{-2}$
1 libra por pé³ =	$3,108 \times 10^{-2}$	16,02	$1,602 \times 10^{-2}$	1	$5,787 \times 10^{-4}$
1 libra por pol³ =	53,71	$2,768 \times 10^4$	27,68	1728	1

Tempo

	ano	dia	hora	minuto	SEGUNDO
1 ano =	1	365,2	$8{,}766 \times 10^{3}$	$5{,}259 \times 10^{5}$	$3{,}156 \times 10^{7}$
1 dia =	$2{,}738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8{,}640 \times 10^{4}$
1 hora =	$1{,}141 \times 10^{-4}$	$4{,}167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	$1{,}901 \times 10^{-6}$	$6{,}944 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO =	$3{,}169 \times 10^{-8}$	$1{,}157 \times 10^{-5}$	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1

Velocidade

	ft/s	km/h	METRO/ SEGUNDO	mi/h	cm/s	nó
1 pé por segundo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48	0,5925
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78	0,5400
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237	100	1,944
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70	0,8689
1 centímetro por segundo =	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$3{,}6 \times 10^{-2}$	0,01	$2{,}237 \times 10^{-2}$	1	$1{,}944 \times 10^{-2}$
1 nó =	1,688	1,852	0,5144	1,151	51,44	1

1 nó = 1 milha marítima/hora   1 mi/min = 88 pés/s = 60 mi/h

Força

Nota: As unidades à direita e abaixo da linha cheia não são unidades de força mas são, muitas vezes, usadas como tais, especialmente na Química. Por exemplo, se escrevemos:

1 grama-força "=" 980,7 dinas

queremos dizer que a *massa* de um grama sofre a *força* de 980,7 dinas sob condição de gravidade padrão ($g = 9{,}80665\ m/s^2$).

	dyn	NEWTON	lb	pdl	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	$2{,}248 \times 10^{-6}$	$7{,}233 \times 10^{-5}$	$1{,}020 \times 10^{-3}$	$1{,}020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON =	10^{5}	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	$4{,}448 \times 10^{5}$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal =	$1{,}383 \times 10^{4}$	0,1383	$3{,}108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1{,}410 \times 10^{-2}$
1 grama-força =	980,7	$9{,}807 \times 10^{-3}$	$2{,}205 \times 10^{-3}$	$7{,}093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força =	$9{,}807 \times 10^{5}$	9,807	2,205	70,93	1000	1

Pressão

	atm	dyn/cm²	pol d'água	cm Hg	NEWTON/METRO²	lb/in²	lb/ft²
1 atmosfera =	1	1,013 $\times 10^{6}$	406,8	76	1,013 $\times 10^{5}$	14,70	2116
1 dina por cm² =	9,869 $\times 10^{-7}$	1	4,015 $\times 10^{-4}$	7,501 $\times 10^{-5}$	0,1	1,450 $\times 10^{-5}$	2,089 $\times 10^{-3}$
1 pol d'água a 4°C* =	2,458 $\times 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	3,613 $\times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de Mercúrio a 0°C =	1,316 $\times 10^{-2}$	1,333 $\times 10^{4}$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 NEWTON por METRO² =	9,869 $\times 10^{-6}$	10	4,015 $\times 10^{-3}$	7,501 $\times 10^{-4}$	1	1,450 $\times 10^{-4}$	2,089 $\times 10^{-2}$
1 libra por pol² =	6,805 $\times 10^{-2}$	6,895 $\times 10^{4}$	27,68	5,171	6,895 $\times 10^{3}$	1	144
1 libra por pé² =	4,725 $\times 10^{-4}$	478,8	0,1922	3,591 $\times 10^{-2}$	47,88	6,944 $\times 10^{-3}$	1

* Onde aceleração da gravidade = 9,806.65 m/s²

1 bar = 10^{6} dyn/cm²   1 milibar = 10^{3} dyn/cm² = 10^{2} N/m²

Energia, Trabalho, Calor

As duas últimas colunas e as duas linhas não são propriamente unidades de energia, mas foram incluídas por comodidade. Resultam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia, $E = mc^2$, e representam a energia liberada quando se destrói completamente a massa de um quilograma ou unidade de massa atômica (u).

Novamente deve-se ter cuidado ao empregar esta tabela.

	Btu	erg	ft-lb	cv-h	JOULE	cal	kWh	eV	MeV	kg	u.m.a.
1 unidade térmica inglesa =	1	1,055 $\times 10^{10}$	777,9	3,929 $\times 10^{-4}$	1055	252,0	2,930 $\times 10^{-4}$	6,585 $\times 10^{21}$	6,585 $\times 10^{15}$	1,174 $\times 10^{-14}$	7,074 $\times 10^{12}$
1 erg =	9,481 $\times 10^{-11}$	1	7,376 $\times 10^{-8}$	3,725 $\times 10^{-14}$	10^{-7}	2,389 $\times 10^{-8}$	2,778 $\times 10^{-14}$	6,242 $\times 10^{11}$	6,242 $\times 10^{5}$	1,113 $\times 10^{-24}$	670,5
1 pé-libra =	1,285 $\times 10^{-3}$	1,356 $\times 10^{7}$	1	5,051 $\times 10^{-7}$	1,356	0,3239	3,766 $\times 10^{-7}$	8,464 $\times 10^{18}$	8,464 $\times 10^{12}$	1,509 $\times 10^{-17}$	9,092 $\times 10^{9}$
1 cv-hora =	2545	2,685 $\times 10^{13}$	1,980 $\times 10^{6}$	1	2,685 $\times 10^{6}$	6,414 $\times 10^{5}$	0,7457	1,676 $\times 10^{25}$	1,676 $\times 10^{19}$	2,988 $\times 10^{-11}$	1,800 $\times 10^{16}$
1 JOULE =	9,481 $\times 10^{-4}$	10^{7}	0,7376	3,725 $\times 10^{-7}$	1	0,2389	2,778 $\times 10^{-7}$	6,242 $\times 10^{18}$	6,242 $\times 10^{12}$	1,113 $\times 10^{-17}$	6,705 $\times 10^{9}$
1 caloria =	3,968 $\times 10^{-3}$	4,186 $\times 10^{7}$	3,087	1,559 $\times 10^{-6}$	4,186	1	1,163 $\times 10^{-6}$	2,613 $\times 10^{19}$	2,613 $\times 10^{13}$	4,659 $\times 10^{-17}$	2,807 $\times 10^{10}$
1 quiloWatt-hora =	3413	3,6 $\times 10^{13}$	2,655 $\times 10^{6}$	1,341	3,6 $\times 10^{6}$	8,601 $\times 10^{5}$	1	2,247 $\times 10^{25}$	2,247 $\times 10^{19}$	4,007 $\times 10^{-11}$	2,414 $\times 10^{16}$
1 elétron-Volt =	1,519 $\times 10^{-22}$	1,602 $\times 10^{-12}$	1,182 $\times 10^{-19}$	5,967 $\times 10^{-26}$	1,602 $\times 10^{-19}$	3,827 $\times 10^{-20}$	4,450 $\times 10^{-26}$	1	10^{-6}	1,783 $\times 10^{-36}$	1,074 $\times 10^{-9}$
1 milhão elétrons-Volt =	1,519 $\times 10^{-16}$	1,602 $\times 10^{-6}$	1,182 $\times 10^{-13}$	5,967 $\times 10^{-20}$	1,602 $\times 10^{-13}$	3,827 $\times 10^{-14}$	4,450 $\times 10^{-20}$	10^{6}	1	1,783 $\times 10^{-30}$	1,074 $\times 10^{-3}$
1 quilograma =	8,521 $\times 10^{13}$	8,987 $\times 10^{23}$	6,629 $\times 10^{16}$	3,348 $\times 10^{10}$	8,987 $\times 10^{16}$	2,147 $\times 10^{16}$	2,497 $\times 10^{10}$	5,610 $\times 10^{35}$	5,610 $\times 10^{29}$	1	6,025 $\times 10^{26}$
1 unidade de massa atômica =	1,415 $\times 10^{-13}$	1,492 $\times 10^{-3}$	1,100 $\times 10^{-10}$	5,558 $\times 10^{-17}$	1,492 $\times 10^{-10}$	3,564 $\times 10^{-11}$	4,145 $\times 10^{-17}$	9,31 $\times 10^{8}$	931,0	1,660 $\times 10^{-27}$	1

Potência

	Btu/h	pé-lb/s	Cv (hp)	cal/s	kW	WATTS
1 unidade térmica inglesa por hora =	1	0,2161	$3,929 \times 10^{-4}$	$7,000 \times 10^{-2}$	$2,930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo =	4,628	1	$1,818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1,356 \times 10^{-3}$	1,356
1 cavalo-vapor =	2545	550	1	178,2	0,7457	745,7
1 caloria por segundo =	14,29	3,087	$5,613 \times 10^{-3}$	1	$4,186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quiloWatt =	3413	737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	$1,341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

Carga elétrica

	abC	A-h	COULOMB (C)	statC
1 abCoulomb (1 uem) =	1	$2,778 \times 10^{-3}$	10	$2,998 \times 10^{10}$
1 Ampère-hora =	360	1	3600	$1,079 \times 10^{13}$
1 COULOMB =	0,1	$2,778 \times 10^{-4}$	1	$2,998 \times 10^{9}$
1 statCoulomb (1 ues) =	$3,336 \times 10^{-11}$	$9,266 \times 10^{-14}$	$3,336 \times 10^{-10}$	1

carga de 1 elétron = $1,602 \times 10^{-19}$ C

Corrente elétrica

	abA	AMPÈRE (A)	statA
1 abAmpère (1 uem) =	1	10	$2,998 \times 10^{10}$
1 AMPÈRE =	0,1	1	$2,998 \times 10^{9}$
1 statAmpère (1 ues) =	$3,336 \times 10^{-11}$	$3,336 \times 10^{-10}$	1

Potencial elétrico, força eletromotriz

	abV	VOLT (V)	statV
1 abVolt (1 uem) =	1	10^{-8}	$3,336 \times 10^{-11}$
1 VOLT =	10^{8}	1	$3,336 \times 10^{-3}$
1 statVolt (1 ues) =	$2,998 \times 10^{10}$	299,8	1

Resistência elétrica

	abOhm	OHM	statOhm
1 abOhm (1 uem) =	1	10^{-9}	$1,113 \times 10^{-21}$
1 OHM =	10^{9}	1	$1,113 \times 10^{-12}$
1 statOhm (1 ues) =	$8,987 \times 10^{20}$	$8,987 \times 10^{11}$	1

Capacitância

	abF	FARAD (F)	μF[1]	statF
1 abFarad (1 uem) =	1	10^{9}	10^{15}	$8{,}987 \times 10^{20}$
1 FARAD =	10^{-9}	1	10^{6}	$8{,}987 \times 10^{11}$
1 microFarad =	10^{-15}	10^{-6}	1	$8{,}987 \times 10^{5}$
1 statFarad (1 uem) =	$1{,}113 \times 10^{-21}$	$1{,}113 \times 10^{-12}$	$1{,}113 \times 10^{-6}$	1

[1] Freqüentemente indicada por mF, nos livros americanos.

Indutância

	abHenry	HENRY	μH	mH	statHenry
1 abHenry (1 uem) =	1	10^{-9}	0,001	10^{-6}	$1{,}113 \times 10^{-21}$
1 HENRY =	10^{9}	1	10^{6}	1000	$1{,}113 \times 10^{-12}$
1 microHenry =	1000	10^{-6}	1	0,001	$1{,}113 \times 10^{-18}$
1 miliHenry =	10^{6}	0,001	1000	1	$1{,}113 \times 10^{-15}$
1 statHenry (1 ues) =	$8{,}987 \times 10^{20}$	$8{,}987 \times 10^{11}$	$8{,}987 \times 10^{17}$	$8{,}987 \times 10^{14}$	1

Fluxo magnético

	Maxwell	WEBER
1 Maxwell (1 linha ou 1 uen) =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Campo magnético

	Gauss	TESLA	miliGauss
1 Gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 miliGauss =	0,001	10^{-7}	1

1 Tesla = 1 Weber/metro^2

APÊNDICE H
SÍMBOLOS MATEMÁTICOS E ALFABETO GREGO

Sinais e símbolos matemáticos

$=$ igual a
$\cong$ aproximadamente igual a
$\neq$ diferente de
$\equiv$ idêntico a, definido como
$>$ maior do que ($\gg$ muito maior que)
$<$ menor do que ($\ll$ muito menor que)
$\geqq$ maior do que ou igual a (ou, não é menor que)
$\leqq$ menor do que ou igual a (ou, não é maior que)
$\pm$ mais ou menos (p. ex.: $\sqrt{4} = \pm 2$)
$\propto$ proporcional a (ex.: lei de Hooke: $F \propto x$, ou $F = -kx$)
Σ somatório de
$\bar{x}$ valor médio de x

APÊNDICE I
FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Alfabeto grego

Alfa	A	α	Nu	N	ν
Beta	B	β	Ksi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ε	Ro	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ, ϑ	Úpsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ, φ
Kapa	K	κ	Chi	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	M	μ	Ômega	Ω	ω

Geometria

Círculo de raio r: circunferência $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.
Esfera de raio r: área $= 4\pi r^2$; volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
Cilindro circular reto de raio r e altura h: área $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$; volume $= \pi r^2 h$.

Fórmula quadrática

$$\text{Se } ax^2 + bx + c = 0, \text{ então, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Funções trigonométricas do ângulo θ

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \text{co-sec}\,\theta = \frac{r}{y}$$

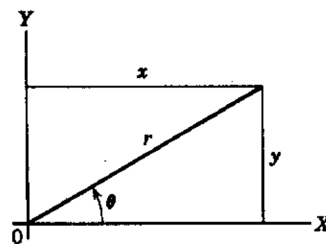


Fig. Ap. 1

Teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Identidades trigonométricas

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta - \text{tg}^2\theta = 1 \qquad \text{co-sec}^2\theta - \text{cotg}^2\theta = 1$$

$$\text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta}{1 \mp \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

$$\text{sen}\,\alpha \pm \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta.$$

Série de Taylor

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)\,x + f''(x_0)\frac{x^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Expansão binominal

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

Expansão exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Expansão logarítmica

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots$$

Expansões trigonométricas (θ em radianos)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$

Derivadas e Integrais indefinidas

No que se segue, as letras u e v valem para quaisquer funções de x, e a e m são constantes. Para cada uma das integrais, deve ser acrescentada uma constante arbitrária de integração. O *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Publishing Co.) dá uma relação mais completa.

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

1. $\int dx = x$
2. $\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ (m \neq -1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$

7. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

8. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$

9. $\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$

10. $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$

11. $\frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$

12. $\frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x$

13. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x$

14. $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

15. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,sec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

7. $\int e^x \, dx = e^x$

8. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$

9. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x$

10. $\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\cos x|$

11. $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x|$

12. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$

13. $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x$

Produtos vetoriais

Sejam **i**, **j** e **k** vetores unitários nas direções x, y, z. Então

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Qualquer vetor, **a**, de componentes a_x, a_y, a_z, ao longo dos eixos Ox, Oy, Oz, pode ser escrito como segue:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Sejam **a**, **b**, **c** vetores arbitrários de módulos a, b, c, respectivamente. Então

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

$$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad (s \text{ escalar}).$$

Seja θ o menor dos dois ângulos entre **a** e **b**. Então

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - b_ya_z)\mathbf{i} + (a_zb_x - b_za_x)\mathbf{j} + (a_xb_y - b_xa_y)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

Funções trigonométricas

APÊNDICE J
VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Radiano	Grau	Seno	Co-seno	Tangente	Cotangente		
0,0000	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	1,5708
0,0175	1	0,0175	0,9998	0,0175	57,29	89	1,5533
0,0349	2	0,0349	0,9994	0,0349	28,64	88	1,5359
0,0524	3	0,0523	0,9986	0,0524	19,08	87	1,5184
0,0698	4	0,0698	0,9976	0,0699	14,30	86	1,5010
0,0873	5	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	1,4835
0,1047	6	0,1045	0,9945	0,1051	9,514	84	1,4661
0,1222	7	0,1219	0,9925	0,1228	8,144	83	1,4486
0,1396	8	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	82	1,4312
0,1571	9	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	81	1,4137
0,1745	10	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	80	1,3963
0,1920	11	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	79	1,3788
0,2094	12	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	78	1,3614
0,2269	13	0,2250	0,9744	0,2309	4,332	77	1,3439
0,2443	14	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	76	1,3265
0,2618	15	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	75	1,3090
0,2793	16	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	74	1,2915
0,2967	17	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	73	1,2741
0,3142	18	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	72	1,2566
0,3316	19	0,3256	0,9455	0,3443	2,904	71	1,2392
0,3491	20	[illegible]	0,9397	0,3640	2,748	70	1,2217
0,3665	21	0,3584	0,9336	0,3839	2,605	69	1,2043
0,3840	22	0,3746	0,9272	0,4040	2,475	68	1,1868
0,4014	23	0,3907	0,9205	0,4245	2,356	67	1,1694
0,4189	24	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	66	1,1519
0,4363	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,144	65	1,1345
0,4538	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	64	1,1170
0,4712	27	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	63	1,0996
0,4887	28	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	62	1,0821
0,5061	29	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	61	1,0647
0,5236	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	60	1,0472
0,5411	31	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	59	1,0297
0,5585	32	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	58	1,0123
0,5760	33	0,5446	0,8387	0,6494	1,540	57	0,9948
0,5934	34	0,5592	0,8290	0,6745	1,483	56	0,9774
0,6109	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,428	55	0,9599
0,6283	36	0,5878	0,8090	0,7265	1,376	54	0,9425
0,6458	37	0,6018	0,7986	0,7536	1,327	53	0,9250
0,6632	38	0,6157	0,7880	0,7813	1,280	52	0,9076
0,6807	39	0,6293	0,7771	0,8098	1,235	51	0,8901
0,6981	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	50	0,8727
0,7156	41	0,6561	0,7547	0,8693	1,150	49	0,8552
0,7330	42	0,6691	0,7431	0,9004	1,111	48	0,8378
0,7505	43	0,6820	0,7314	0,9325	1,072	47	0,8203
0,7679	44	0,6947	0,7193	0,9657	1,036	46	0,8029
0,7854	45	0,7071	0,7071	1,0000	1,000	45	0,7854
		Co-seno	Seno	Cotangente	Tangente	Grau	Radiano

APÊNDICE K
*VENCEDORES DO PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA**

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845–1923	pelo descobrimento dos raios-X.
1902	Hendrik Antoon Lorentz	1853–1928	pelas suas pesquisas na influência
	Pieter Zeeman	1865–1943	do magnetismo sobre o fenômeno da radiação
1903	Antoine Henri Becquerel	1852–1908	pelo seu descobrimento da radio-atividade natural.

* Ver *Nobel Lectures, Physics*, 1901-1970, Elsevier Publishing Company, para as conferências apresentadas no recebimento do prêmio Nobel e biografias. As justificativas são, quase sem exceção, cotações das citações do Prêmio Nobel.

	Pierre Curie Marie Sklowdowska-Curie	1859–1906 1867-1934	por suas pesquisas em conjunto sobre o fenômeno da radiação descoberto pelo professor Henri Becquerel.
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842–1919	por suas pesquisas sobre as densidades dos gases mais importantes e pela descoberta do Argônio.
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862–1947	por seu trabalho sobre raios catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856–1940	por suas investigações técnicas e experimentais sobre condução de eletricidade por gases.
1907	Albert Abraham Michelson	1852–1931	pela invenção do interferômetro e por suas pesquisas feitas no campo da espectroscopia e da meteorologia.
1908	Gabriel Lippmann	1845–1921	por seu método de reproduzir cores fotograficamente, baseado no fenômeno da interferência.
1909	Gublielmo Marconi Carl Ferdinand Braun	1874–1937 1850-1918	por suas contribuições para o desenvolvimento do telégrafo sem fio
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837–1923	por seu trabalho sobre a equação de estado para gases e líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864–1928	pelo descobrimento de leis relativas à rediação térmica.
1912	Nils Gustaf Dalén	1869–1937	pela invenção de reguladores automáticos para uso em conjunto com acumuladores gasosos na sinalização costeira.
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853–1926	por suas investigações sobre propriedades da matéria a baixas temperaturas, que levaram à produção do Hélio líquido.
1914	Max von Laue	1879–1960	pelo descobrimento da difração dos raios-X em cristais.
1915	William Henry Bragg William Lawrence Bragg	1862–1942 1890–1971	por seus estudos na análise da estrutura cristalina por meio de raios-X.
1917	Charles Glover Barkla	1877–1944	pelo descobrimento da radiação X característica dos elementos.
1918	Max Planck	1858–1947	pelo descobrimento do quantum de energia.
1919	Johannes Stark	1874–1957	pela descoberta do efeito Doppler em raios canais e do desdobramento de linhas espectrais por campos elétricos.
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861–1938	por serviço prestado às medidas de precisão em Fisica, devido à sua descoberta das anomalias das ligas de aço-níquel.
1921	Albert Einstein	1879–1955	por seus serviços à Física Teórica, e, especialmente, pelo descobrimento da lei do efeito fotoelétrico.
1922	Niels Bohr	1885–1962	pela investigação da estrutura dos átomos e da radiação por eles emitida.
1923	Robert Andrews Milikan '	1868–1953	por seu trabalho sobre a carga elétrica elementar e sobre o efeito fotoelétrico.
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886–1954	por suas descobertas e pesquisas no campo da espectroscopia de raios X.
1925	James Franck Gustav Hertz	1882–1964 1887–1975	pela descoberta das leis que governam as colisões entre átomos e elétrons.
1926	Jean Baptiste Perrin	1870–1942	por seu trabalho sobre a estrutura descontínua da matéria, e, princi-

			palmente, pelo descobrimento do equilíbrio de sedimentação.
1927	Arthur Holly Compton	1892–1962	pelo descobrimento do efeito que tem seu nome.
	Charles Thomson Rees Wilson	1869–1959	pelo método de tornar visíveis, por condensação de vapor, as trajetórias de partículas carregadas.
1928	Owen Willians Richardson	1879–1959	por seu trabalho sobre o fenômeno termoiônico e, especialmente, pelo descobrimento da lei que tem seu nome.
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892–	pelo descobrimento da natureza ondulatória dos elétrons.
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888–1970	por seu trabalho sobre o espalhamento de luz e pelo descobrimento do efeito que tem seu nome.
1932	Werner Heisenberg	1901–1976	pela criação da Mecânica Quântica, cuja aplicação, entre outras coisas, conduziu à descoberta de formas alotrópicas do Hidrogênio.
1933	Erwin Schrödinger Paul Adrien Maurice Dirac	1887–1961 1902–	pelo descobrimento de novas formas da teoria atômica.
1935	James Chadwick	1891–1974	pelo descobrimento do nêutron.
1936	Victor Franz Hess	1883–1964	pela descoberta da radiação cósmica.
	Carl David Anderson	1905–	pela descoberta do pósitron.
1937	Clinton Joseph Davisson George Paget Thomson	1881–1958 1892–1975	pelo descobrimento experimental da difração de elétrons por cristais.
1938	Enrico Fermi	1901–1954	pelas demonstrações da existência de novos elementos radioativos produzidos por irradiação de nêutrons, e pela descoberta correlata de reações nucleares induzidas por nêutrons lentos.
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901–1958	pelo invento e desenvolvimento do cíclotron e pelos resultados obtidos com ele, especialmente com relação a elementos radioativos artificiais.
1943	Otto Stern	1888–1969	por sua contribuição para o desenvolvimento do método de feixes moleculares e seu descobrimento do momento magnético do próton.
1944	Isidor Isaac Rabi	1898–	por seu método de ressonância para registro das propriedades magnéticas dos núcleos atômicos.
1945	Wolfgang Pauli	1920–1958	pelo descobrimento do Princípio da Exclusão, também chamado Princípio de Pauli.
1946	Percy Williams Bridgman	1882–1961	pela invenção de um aparelho para produzir pressões extremamente altas, e pelas descobertas feitas com ele no campo da Física de altas pressões.
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892–1965	por seus estudos da física da atmosfera superior, especialmente pela descoberta da camada de Appleton.
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897–1974	pelo desenvolvimento do método da câmara de nuvem de Wilson, e seus descobrimentos, com ela, nos campos da Física Nuclear e radiação cósmica.
1949	Hideki Yukawa	1907–	pela predição da existência dos mésons, com base em trabalhos teóricos sobre forças nucleares.
1950	Cecil Frank Powell	1903–1969	pelo desenvolvimento do método fotográfico para estudo de pro-

			cessos nucleares e pela descoberta de mésons, feita com este método.
1951	Sir John Douglas Cockcroft Ernest Thomas Sintov Walton	1897–1967 1903–	por seus trabalhos pioneiros sobre a transformação de núcleos atômicos por partículas atômicas aceleradas artificialmente.
1952	Felix Bloch Edward Mills Purcell	1905– 1912–	pelo desenvolvimento de técnicas para medição de campos magnéticos nucleares.
1953	Frits Zernike	1888–1966	pela demonstração do método de contraste de fase, especialmente pela invenção do microscópio de contraste de fase.
1954	Max Born	1882–1970	por suas pesquisas em Mecânica Quântica, especialmente pela interpretação estatística da função de onda.
	Walther Bothe	1891–1957	pelo método da coincidência e pelas descobertas feitas com ele.
1955	Willis Eugene Lamb	1913–	por suas descobertas relativas à estrutura fina do Hidrogênio.
	Polykarp Kusch	1911–	pela determinação precisa do momento magnético do elétron.
1956	William Shockley John Bardeen Walter Houser Brattain	1910– 1908– 1902–	por suas pesquisas em semicondutores e pela descoberta do efeito transistor.
1957	Cheng Ning Yang Tsung Dao Lee	1922– 1926–	por suas profundas investigações das chamadas leis da paridade, que conduziram a importantes descobertas relativas às partículas elementares.
1958	Pavel Aleksejevič Cerenkov Il' ja Michajlovic Frank Igor' Evgen'evič Tamm	1904– 1908– 1895–1971	pelo descobrimento e interpretação do efeito Čerenkov.
1959	Emilio Gino Segrè Owen Chamberlain	1905– 1920–	pela descoberta do anti-próton.
1960	Donald Arthur Glaser	1926–	pela invenção da câmara de bolhas.
1961	Robert Hofstadter	1915–	por seus estudos pioneiros do espalhamento de elétrons por núcleos atômicos e por suas conseqüentes descobertas relacionadas à estrutura dos núcleons.
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929–	por suas pesquisas relacionadas com as absorções ressonantes de radiação γ e pela descoberta do efeito que tem seu nome.
1962	Lev Davidovic Landau	1908–	por suas teorias pioneiras sobre a matéria condensada, em especial sobre o Hélio liquido.
1963	Eugene P. Wigner	1902–	por suas contribuições à teoria do núcleo atômico e partículas elementares, particularmente através do descobrimento e aplicação de princípios fundamentais de simetria.
	Maria Goeppert Mayer J. Hans D. Jensen	1906–1972 1907–1973	pelas descobertas relativas à estrutura de camadas do núcleo.
1964	Charles H. Townes Nikolai G. Besov Alexander M. Prochorov	1915– 1922– 1916–	pelo trabalho fundamental no campo da Eletrônica Quântica, o que conduziu à construção de osciladores e amplificadores baseados no princípio maser-laser.
1965	Sin-Itiro Tomonaga Julian Schwinger Richard P. Feynman	1906– 1918– 1918–	pelo trabalho fundamental em Eletrodinâmica Quântica, com conseqüências profundas para a Física de Partículas Elementares.
1966	Alfred Kastler	1902–	pelo descobrimento e desenvolvimento de métodos ópticos para o estudo da ressonância de Hertz em átomos.

1967	Hans Albrecht Bethe	1906–	por suas contribuições à teoria das reações nucleares, especialmente suas descobertas relativas à produção de energia em estrelas.
1968	Luis W. Alvarez	1911–	por sua contribuição decisiva à Física de Particulas Elementares, em particular o descobrimento de um grande número de estados ressonantes, tornado possivel através do seu desenvolvimento da técnica de uso de câmara de bolhas de Hidrogênio e análise de dados.
1969	Murray Gell-Mann	1929–	por suas contribuições e descobrimentos relativos à classificação e às interações das particulas elementares.
1970	Hannes Alvén	1908–	por seu trabalho fundamental e descobertas em Magneto-Hidrodinâmica, com aplicações úteis em diferentes partes da Física do Plasma.
	Louis Néel	1904–	por seu trabalho fundamental e descobertas relativas ao antiferromagnetismo e ferromagnetismo, que conduziram a importantes aplicações em Física do Estado Sólido.
1971	Dennis Gabor	1900–	pelo descobrimento dos princípios da holografia.
1972	John Bardeen Leon N. Cooper J. Robert Schrieffer	1908– 1930– 1931–	pelo desenvolvimento de uma teoria da supercondutividade.
1973	Leo Esaki	1925–	pelo descobrimento do efeito túnel em semicondutores.
	Ivar Giaever	1929–	pelo descobrimento do efeito túnel em supercondutores.
	Brian D. Josephson	1940–	pela predição teórica das propriedades de uma supercorrente através uma barreira tipo-túnel.
1974	Antony Hewish	1924–	pelo descobrimento dos pulsares.
	Sir Martin Ryle	1918–	por seu trabalho pioneiro em radio-astronomia.
1975	Aage Bohr Ben Mottelson James Rainwater	1922– 1926– 1917–	pelo descobrimento da conexão entre movimento coletivo e movimento de partícula e pelo desenvolvimento da teoria da estrutura do núcleo atômico, baseado nesta conexão.
1976	Burton Richter Samuel Chao Chung Ting	1931– 1936–	pelo descobrimento (independente) de uma importante particula fundamental.
1977	Philip Warren Anderson Nerill Francis Mott John Hasbrouch Van Vlech	1923– 1905– 1899–	pelas pesquisas teóricas fundamentais sobre a estrutura eletrônica dos sólidos magnéticos e desordenados.

índice remissivo



Impressão e acabamento
Av. Senador Vergueiro, 1301
Fone: 452-1777
São Bernardo do Campo - SP
Brasil

ALGUNS VALORES ÚTEIS

$\sqrt{2} = 1{,}414$	$\sqrt{3} = 1{,}732$	$\sqrt{10} = 3{,}162$	$\pi = 3{,}142$
$\pi^2 = 9{,}870$	$\sqrt{\pi} = 1{,}773$	$\log \pi = 0{,}4971$	$4\pi = 12{,}57$
$e = 2{,}718$	$1/e = 0{,}3679$	$\log e = 0{,}4343$	$\ln 2 = 0{,}6932$

$\text{sen } 30° = \cos 60° = 0{,}5000$ $\quad$ $\text{cotg } 30° = \text{tg } 60° = 1{,}7321$

$\cos 30° = \text{sen } 60° = 0{,}8660$ $\quad$ $\text{sen } 45° = \cos 45° = 0{,}7071$

$\text{tg } 30° = \text{cotg } 60° = 0{,}5774$ $\quad$ $\text{tg } 45° = \text{cotg } 45° = 1{,}0000$

Mudança de Base

$\log x = \ln x/\ln 10 = 0{,}4343 \ln x$

$\ln x = \log x/\log e = 2.303 \log x$

FATORES DE CONVERSÃO

(Ver no Apêndice G uma lista mais completa.)

Massa
- 1 kg = 2,21 lb (massa) = $6{,}02 \times 10^{26}$ u
- 1 slug = 32,2 lb (massa) = 14,6 kg
- 1 u = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg

Comprimento
- 1 m = 39,4 pol. = 3,28 pé
- 1 mi = 1,61 km = 5 280 pé; 1 pol. = 2,54 cm
- 1 μm = 10^{-9} metros = 10Å

Tempo
- 1 d = 86 400 s
- 1 ano = 365 d = $3{,}16 \times 10^7$ s

Ângulo
- 1 rad = 57,3° = 0,159 rev
- π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ rev.

Velocidade
- 1 mi/h = 1,47 pé/s = 0,447 m/s

Eletricidade e Magnetismo
- 1 C = $3{,}00 \times 10^9$ statC
- 1 A = $3{,}00 \times 10^9$ statA
- 1 weber/metro^2 = 1 tesla = 10^4 gauss

Força e Pressão
- 1 N = 10^5 dina = 0,225 lbf; 1 lbf = 4,45 N
- 1 N/m^2 = 10 dina/cm^2 = $1{,}45 \times 10^{-4}$ lbf/pol.^{2} = $9{,}87 \times 10^{-6}$ atm = $7{,}50 \times 10^{-4}$ cm-Hg

Trabalho e Potência
- 1 cal = 4,186 J
- 1 J = 10^7 erg = 0,239 cal = 0,738 lbf · pé = $2{,}78 \times 10^{-7}$ kW · h
- 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J = $1{,}60 \times 10^{-12}$ erg
- 1 horsepower = 746 W = 550 lbf · pé/s

FÍSICA

R. RESNICK
D. HALLIDAY

2

Esta quarta edição foi cuidadosamente revisada e os problemas propostos, existentes no final de cada capítulo, foram totalmente reformulados. Em alguns, os dados numéricos foram substituídos. Outros foram modificados, sem alterar, no entanto, o conteúdo e o seu objetivo didático.

A principal finalidade da obra é de constituir uma base sólida dos princípios da Física Clássica, capacitando o estudante a equacionar problemas.

Foi conferida, também, ênfase à aplicação prática, às teorias mais modernas, bem como ao interesse histórico e filosófico dos eventos.

A reformulação dos problemas coube ao Professor Adir Moysés Luiz, Doutor em Ciência (D.Sc.) e Professor Adjunto do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, autor de inúmeras publicações, entre livros didáticos e trabalhos de pesquisa científica.

ISBN: 85-216-0300-2



LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA